УДК
621.396
К-192

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

Ю.В. КАНДЫРИН, Л.Т. САЗОНОВА

СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ВАРИАНТОВ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Лабораторная работа
по курсу
"Конструирование и технология РЭС"
для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника»

Москва Издательство МЭИ 2012

УДК
621.396
К-192

Рецензент каф. РПУ С.А. Хватынец
Подготовлено на кафедре радиоприемных устройств

Кандырин Ю.В., Сазонова Л.Т.
СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ВАРИАНТОВ. Лабораторная работа: Методическое пособие. М.: Каф. РПУ, МЭИ (ТУ) 2012, – 1,0 п.л.

Приводятся методические указания к выполнению лабораторной работы «Сравнение критериев выбора вариантов». В её состав входят: блок формирования базы данных, раздел формирования ТЗ на выбор, раздел проведения поиска допустимых и оптимальных вариантов, раздел статистики результатов выбора, позволяющий наглядно судить о силе усечения исходных множеств с помощью метрических и неметрических критериев посредством гистограмм сравнения. В работе имеются файлы справки, помощи и методической поддержки, вызываемые с экрана.

Пособие предназначено для студентов РТФ, обучающихся по направлению «Радиотехника» и выполняющих лабораторные работы по дисциплинам «Теория выбора и принятия решений в задачах проектирования РЭС» и «Основы конструирования и технологии производства РЭС».

Учебное издание

СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ВАРИАНТОВ.
Лабораторная работа

Методическое пособие
по курсам
«Теория выбора и принятия решений в задачах проектирования РЭС»
и «Основы конструирования и технологии производства РЭС».
для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника»

Москва Издательство МЭИ 2012

1. ЦЕЛЬ, СТРУКТУРА И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РАБОТЕ

1.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью лабораторной работы является изучение сравнительной силы усечения исходных множеств вариантов для наиболее распространённых критериев выбора с помощью компьютерной программы «Сравнительный анализ критериев выбора»*.

В работе проводится компьютерный экспериментальный анализ силы усечения исходных множеств вариантов для следующих критериев:

- неметрического безусловного критерия Парето;
- неметрического условного *L*-критерия предпочтения с разными приоритетами показателей качества;
- неметрического условного **Δ -** критерия;
- метрического интегрального скалярного критерия аддитивного типа.

Все результаты работы студента, полученные в диалоге с программой, запоминаются и выдаются студенту и преподавателю в разделе **«Статистика».**

* Авторы программы: Ю.В. Кандырин, А.В. Пшеничников

1.2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ ОБУЧАЮЩЕЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Решая задачу выбора с помощью тех или иных векторных и скалярных критериев, студент должен четко понимать, что различные критериальные постановки обладают различной силой усечения исходных множеств, а это значит, что и задача выбора будет иметь разные решения, и не всегда приводить к одним и тем же оптимальным вариантам. Мощности множеств оптимальных вариантов у разных критериальных постановок будут разные. Мощность зависит от вида критерия, от числа включенных в критерий показателей качества, от приоритетов показателей качества в условных постановках, и от величины уступок в Δ-критерии. Теоретическое сравнение силы усечения исходных множеств с помощью различных критериев - сложная задача и она решается строго лишь в отдельных случаях [1], поэтому проведение наглядного виртуального сравнительного исследования силы критериальных постановок является важным этапом в освоении основ многокритериального выбора проектных вариантов.

Работа содержит четыре основные части:

- знакомство с представленной базой данных по системам охлаждения процессоров - кулерам, их конструкциями и основными характеристиками;
- формирование ТЗ на выбор;
- проведение расчетов по всем сравниваемым критериям;

- изучение результатов и проведение семантического и количественного сравнительного анализа различных критериальных постановок.

Программа реализована в виде совокупности базовых окон, переход из окна в окно осуществляется с помощью виртуальных кнопок, расположенных в обрамлении окон в последовательности, которая логически требуется для решения задачи выбора по разным критериям, и последующего сравнения результатов проведенных расчетов. Вызов программы осуществляется исполняемым файлом «***Coller DB.exe***», а вход - с помощью виртуальной кнопки «**Вход в программу**».

1.3. НАЧАЛО РАБОТЫ С ПРОГРАММОЙ

При запуске программы на экране появляется диалоговое окно **«Регистрация пользователей»** (рис. 1). В него студенты должны вести следующие данные о пользователе: фамилию, имя, отчество, номер группы и номер бригады. Данная информация в дальнейшем используется для формирования и идентификации статистики результатов работы каждого из студентов.

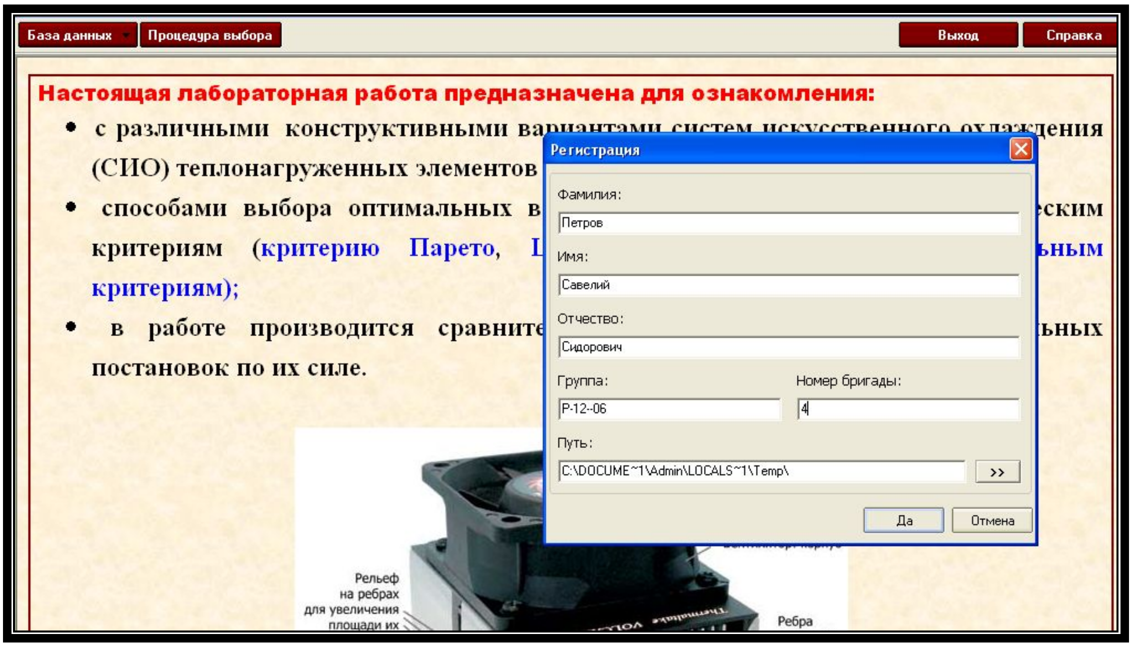

Рис. 1. ***Окно регистрации***

После заполнения соответствующих полей необходимо нажать кнопку **«Да»**, посредством чего информация будет введена, окно регистрации закрыто, что даёт возможность приступить к работе.

Знакомство с базой данных, выбираемых кулеров, осуществляется посредством нажатия виртуальной кнопки «**База данных**», расположенной слева, внизу экрана. При этом появляется окно с реляционным описанием вариантов (рис. 2).

Компания	Модель	Скорость вращения,	Воздушный поток, CFM	Уровень шума, дБ
ADDA	AW-B38-2	4600	21	35.8
ADDA	B14-3HB	4600	21	35.8
ADDA	B53HB	4600	21	35.8
ADDA	B60HB	4600	21	35.8
ADDA	C68-MB	3500	29.2	34.5
ADDA	D20MB	4600	21	35.8
Glacial Tech	Diamond 2000	4500	37	35
Glacial Tech	Diamond 2100	3400	29.2	29.2
Glacial Tech	Diamond 4100	4500	37	35
Glacial Tech	Diamond 4200	3400	29.2	30
Glacial Tech	Igloo 2320 Pro	4800	22.8	35
Glacial Tech	Igloo 2400 Pro	4800	30	37
Glacial Tech	Igloo 2410 Pro	4500	37.1	35
Glacial Tech	Igloo 2411	2800	22.7	26
Glacial Tech	Igloo 2420	2800	24.3	26

Рис. 2 ***Реляционная модель представления вариантов кулеров.***

Кликом по имени варианта можно посмотреть более полное описание всех объектов через числовые, символьные характеристики и визуальное графическое изображение объектов выбора (рис.3).

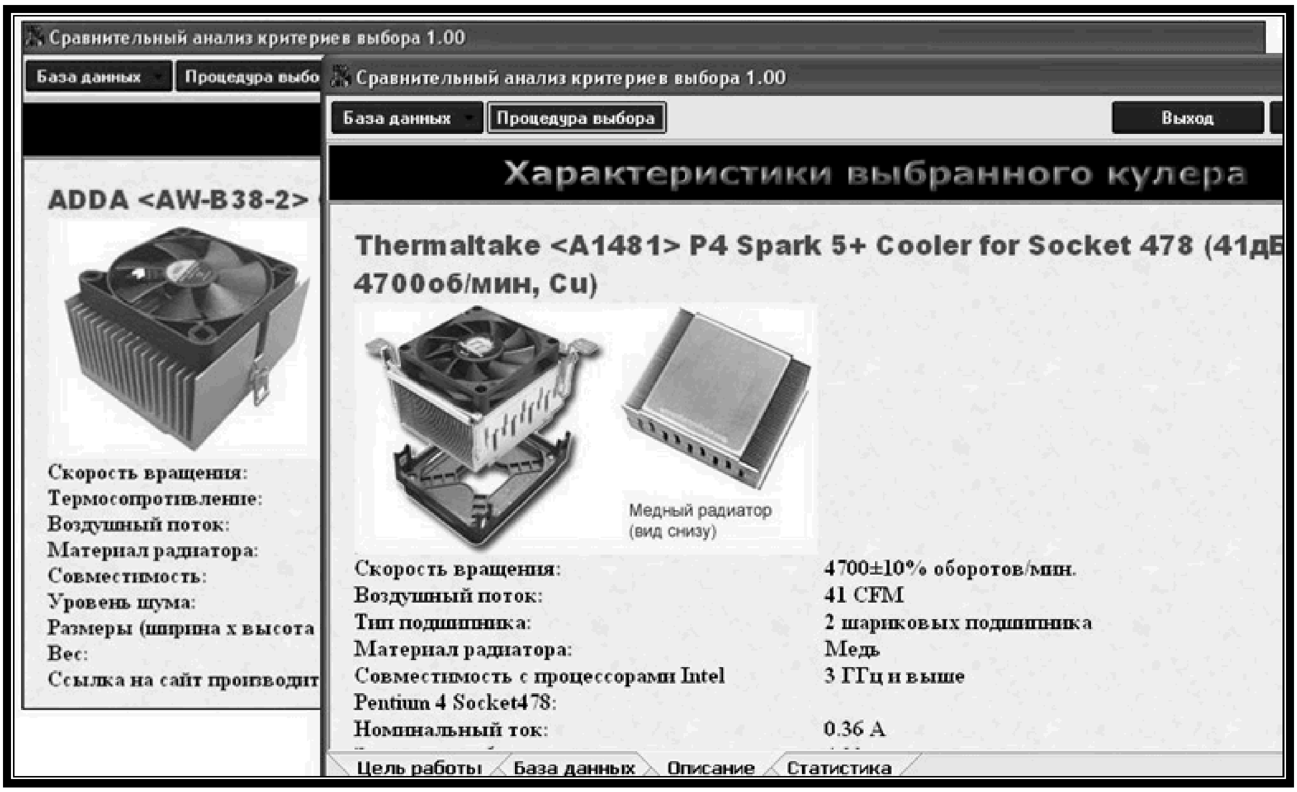

Рис. 3. ***Графическое, числовое и символьное описание объектов выбора***

Ввод характеристик для сравнения и выбора вариантов осуществляется через окно, представленное на рис.4.

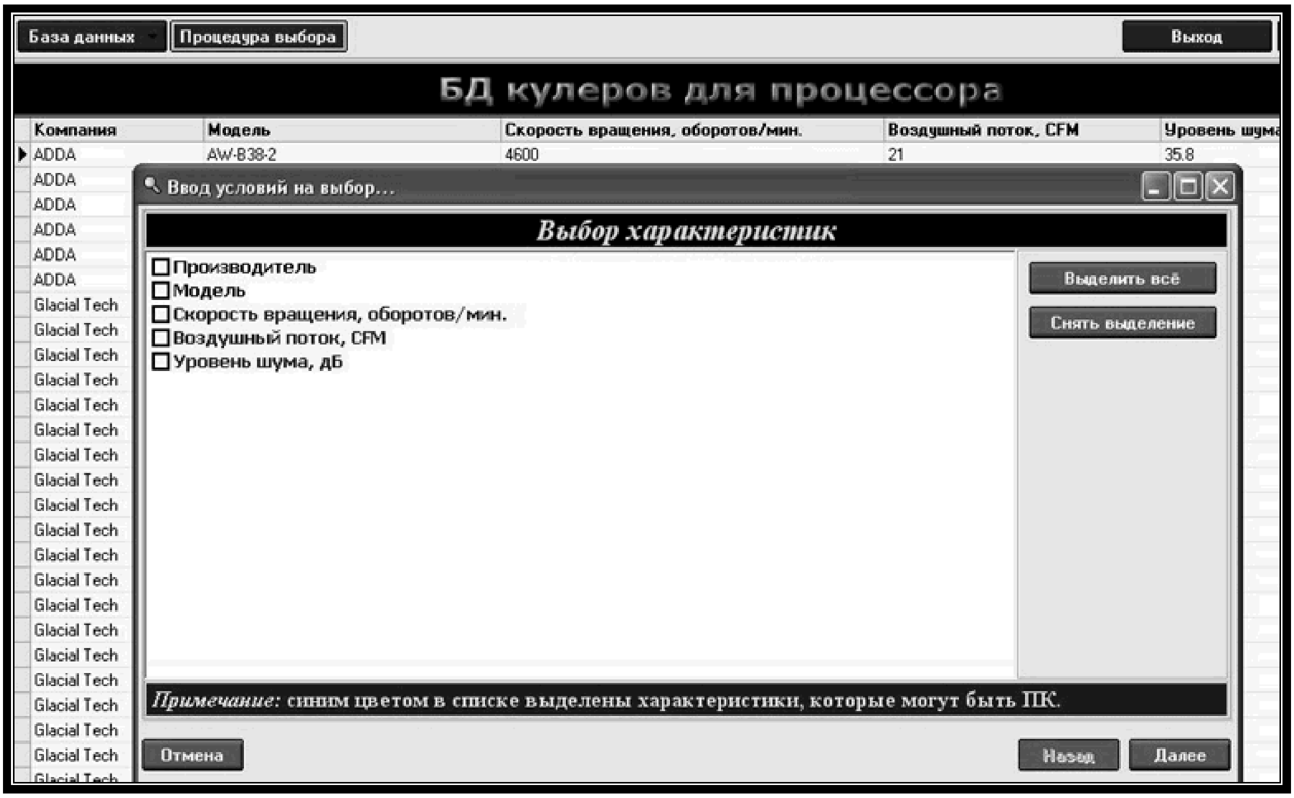

Рис. 4. ***Окно ввода характеристик вариантов кулеров для МКВ***

Далее вводятся собственно условия на выбор. Напомним, что они задаются отношениями типа равенств «=» (рис.5).

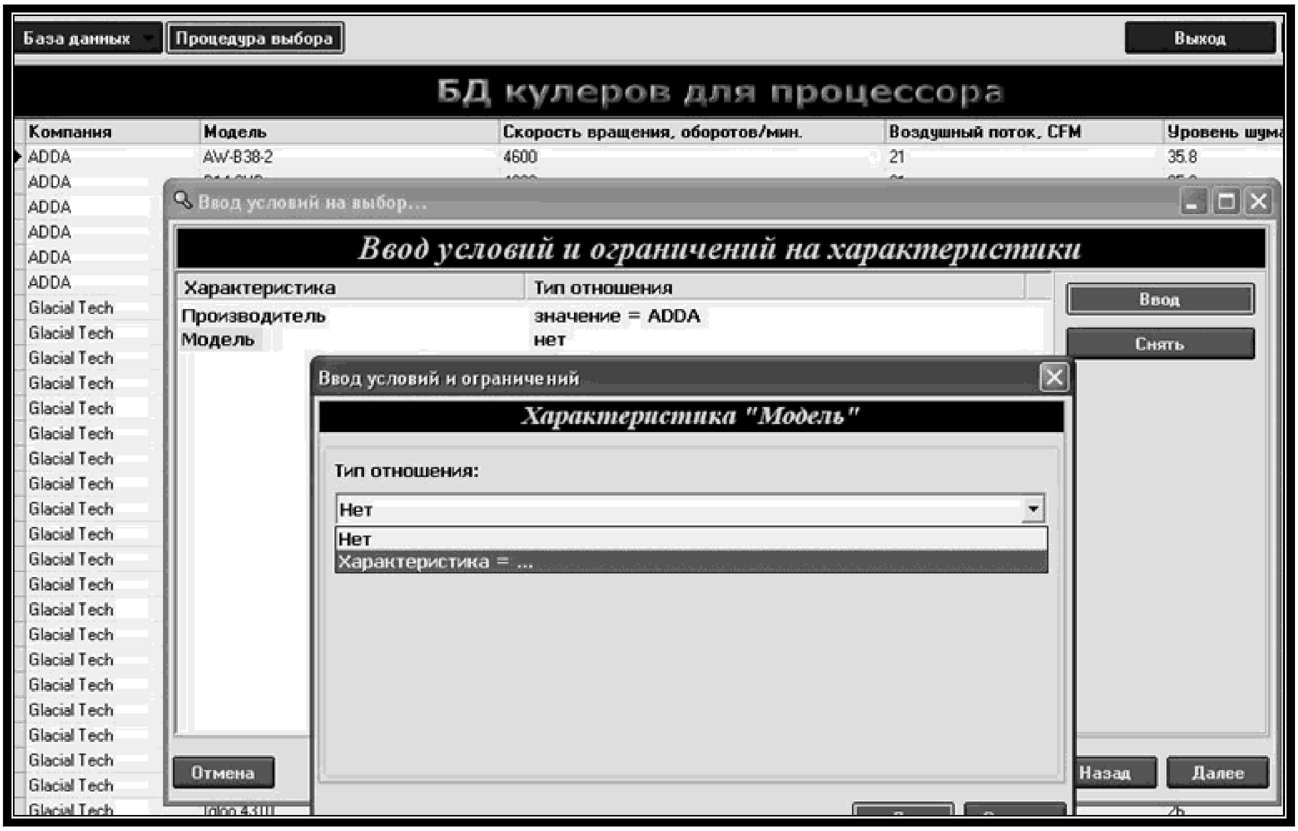

Рис. 5. ***Окно ввода условий на выбор вариантов кулеров для МКВ***

После ввода последовательно всех условий, ограничений и показателей качества программа предлагает проверить правильность ввода ТЗ на МКВ (рис.

6). В случае допущенных ошибок необходимо вернуться в соответствующий раздел и произвести процедуру ввода задания на выбор заново.

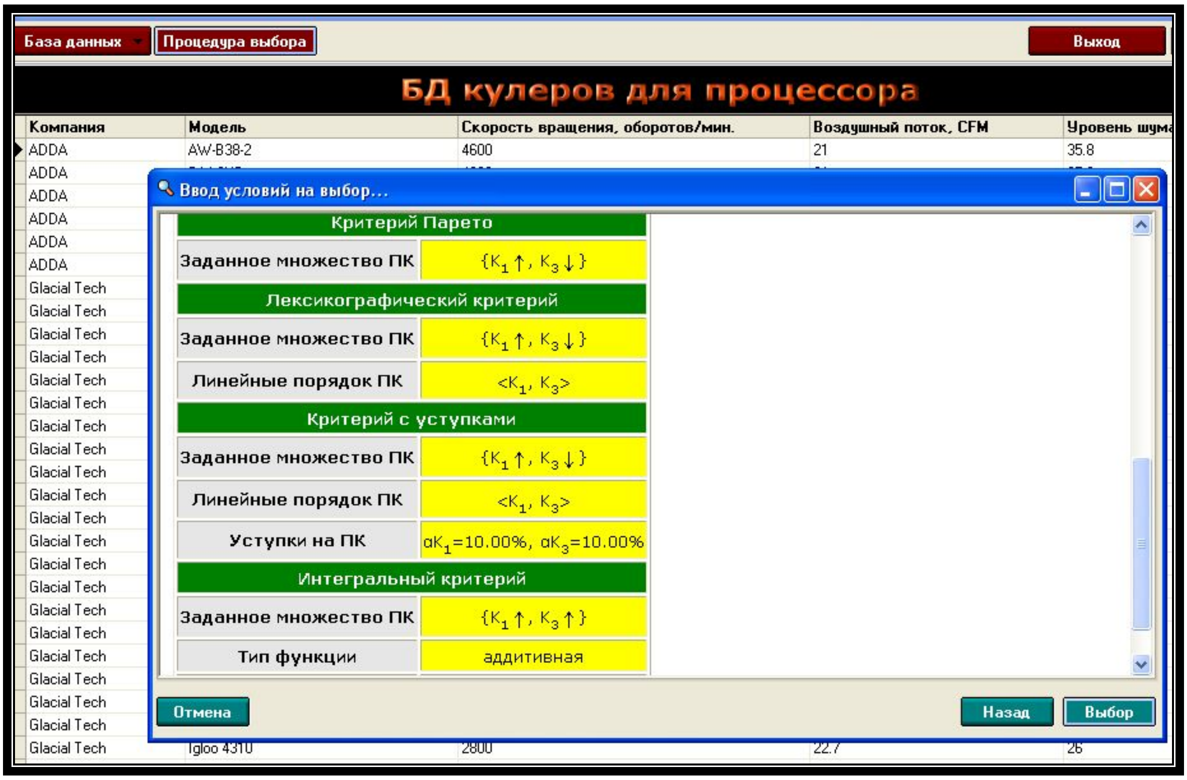

Рис. 6. ***Окно проверки ввода ТЗ на выбор вариантов кулеров для МКВ***

Далее программа проводит выбор допустимых и оптимальных вариантов в автоматическом режиме по всем введенным в рассмотрение требованиям по допустимости и критериальным требованиям. Результаты проведенного выбора по совокупности ПК и сравнительного анализа критериев по их силе усечения исходных множеств в виде таблицы и гистограммы выводятся в окно «**Статистика**», составляющие которого представлены на рис. 7 и рис. 8.

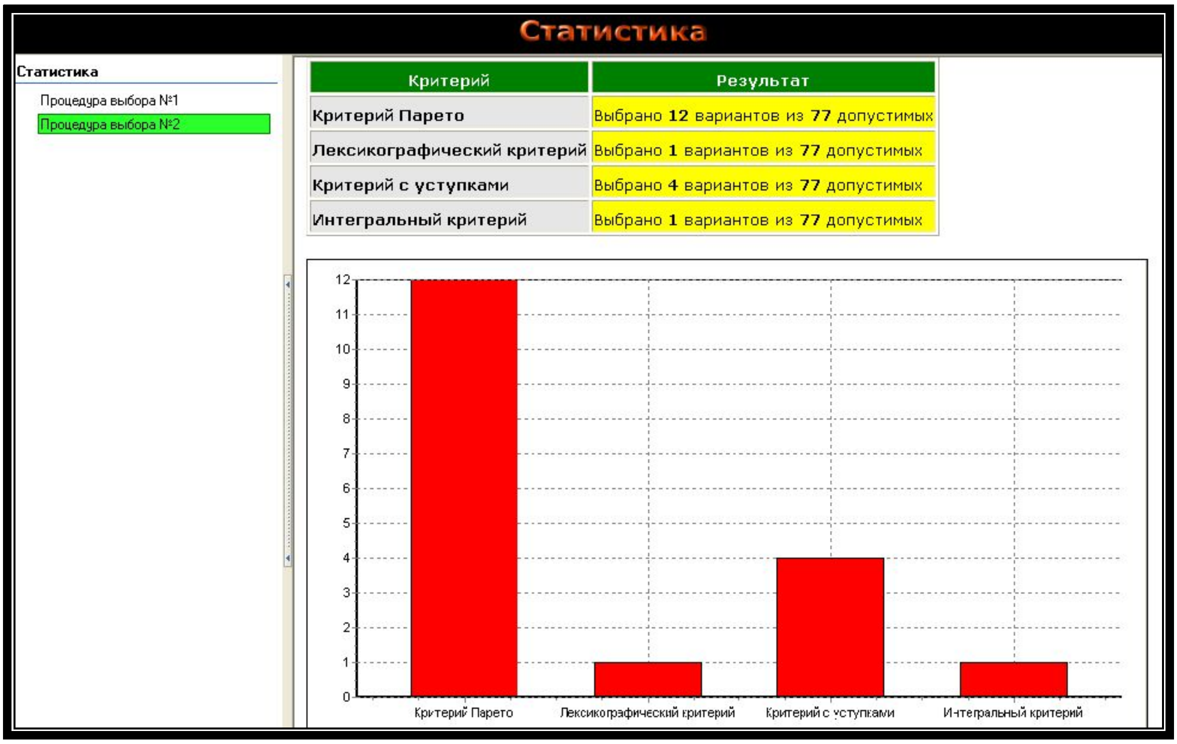

Рис. 7. ***Окно «Статистика» с результатами выбора вариантов для разных критериев***

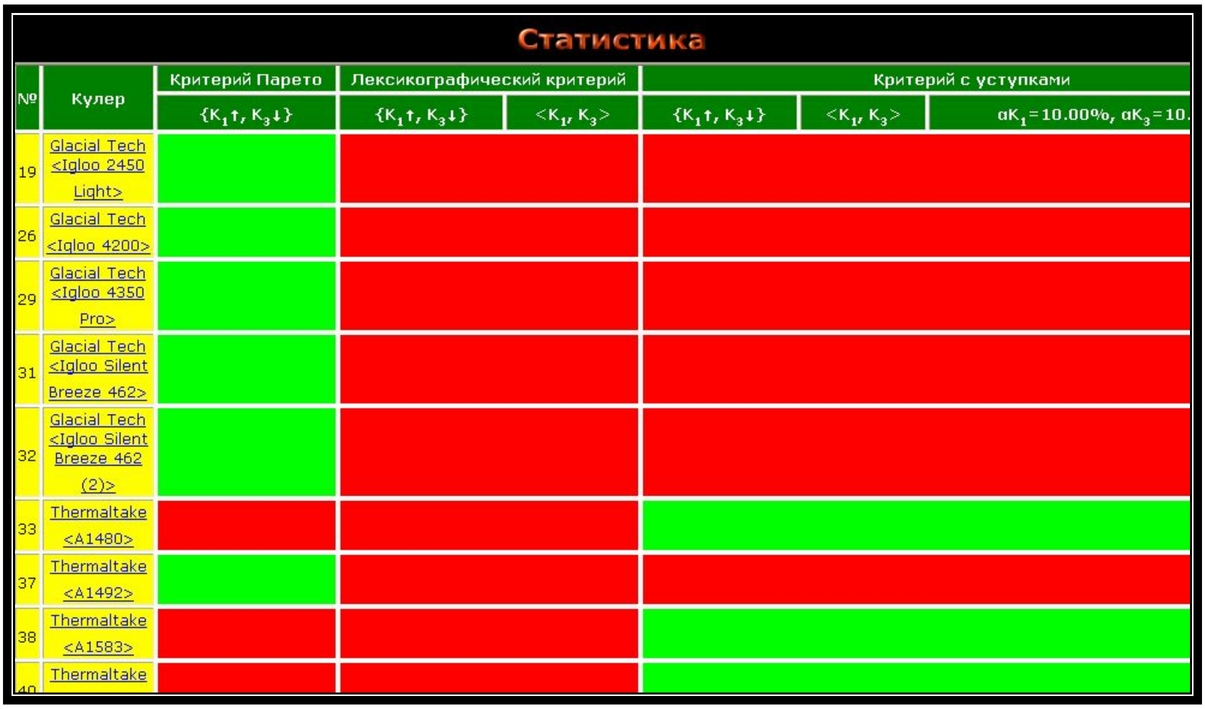

Рис. 8. ***Продолжение окна «Статистика» с частичными результатами выбора вариантов для разных критериев (захват частичного виртуального окна)***

В работе проводится 7÷10 процедур выбора оптимальных вариантов по разным ТЗ и осуществляется сравнительный анализ решений задач выбора, полученных для различных критериальных постановок. По этим результатам можно сделать вывод о потенциальной силе усечения исходных множеств вариантов с помощью различных критериев на основе проведенных виртуальных экспериментов.

1.4. РАБОТА НАД ИНДИВИДУАЛЬНЫМ ЗАДАНИЕМ

Исходные данные для индивидуальных заданий студентам выдаёт преподаватель либо на лабораторном занятии, либо на консультации или по E-mail (для дистанционной формы обучения). Техническое задание на выбор представлено в виде реляционной таблицы, описывающей варианты, условия, ограничения, показатели качества, их приоритеты (для условных критериев предпочтения), уступки (для Δ-критерия) и весовые коэффициенты для интегрального аддитивного критерия. После уточнения всех особенностей ТЗ у преподавателя, студенты могут приступать к выполнению лабораторной работы. Детализация пунктов выполнения работы приведена ниже в разделе 2.2.

2. ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

2.1. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучите основы теории многокритериального выбора по конспекту своих лекций и рекомендуемой литературе: [1 – разд. 2.2. ÷2.5] или [2 – разд. 1.2] или [4 – Электронный конспект лекций на CD: лекции № 2, №3, №4, № 8].
2. Изучите описание лабораторной работы «Сравнительный анализ критериев выбора», включая Приложение 1.

3. Подготовьте бланки отчета по работе в соответствии с образцами, вывешенными на кафедре РПУ (4 этаж корп.13, лаборатория КПР).
4. Продумайте ответы на контрольные вопросы, приведенные в данном описании.

2.2. ЛАБОРАТОРНОЕ ЗАНЯТИЕ В КОМПЬЮТЕРНОМ КЛАССЕ (или дома при дистанционной форме обучения)

1. Зарегистрируйтесь в «Окне регистрации» программы.
2. Приступите к выполнению лабораторной работы. Внимательно вводите и, в случае необходимости, корректируйте результаты ТЗ на выбор допустимых и оптимальных вариантов.
3. Выполните последовательно все пункты работы с программой (см. разд.1.3 настоящего описания) для всех 7 вариантов индивидуального задания по двум ПК для трёх неметрических критериальных постановок: π, L, Δ и метрической интегральной критериальной постановки аддитивного типа. .
4. Распечатайте результаты проделанной работы для всех 7 вариантов задания. Обдумайте полученные результаты. Проведите сравнительный анализ силы усечения исходных множеств по разным критериям на основании проведенных виртуальных экспериментальных исследований.
5. Составьте отчет по работе. Он должен содержать результаты домашней подготовки, протоколы проведения экспериментального анализа 7 вариантов выбора по четырем критериям, с выкладкой на бумажном носителе всех распечаток раздела «**Статистика**» и выводы по проделанной работе.

2.3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое принцип оптимальности, функция выбора, требования по допустимости и критериальные требования?
2. Какие характеристики вариантов могут быть показателями качества, какие условиями, а какие ограничениями?
3. В чем отличие понятий «показатель качества» и «критерий» (или критериальной постановки)? Когда они могут совпадать?
4. Как зависит сила усечения исходных множеств по π -критерию от числа показателей качества, участвующих в процедуре выбора?
5. Какой из критериев сильнее $\pi(\Omega/\{k_1, k_2\})$ или $\pi(\Omega/\{k_1, k_2, k_3\})$ и почему?
6. Включают ли множества оптимальных по вариантов по π -критерию варианты, оптимальные по L-критерию для тех же показателей качества? Покажите это на примере.
7. Как зависит сила L-критерия от числа включенных в её постановку показателей качества?

8. Какой из критериев сильнее $L(\Omega/<k_1, k_2>)$ или $L(\Omega/<k_1, k_2, k_3>)$ и почему? Приведите примеры.
9. Являются ли решения, полученные по L- критерию, оптимальными в π- постановке?
10. Какой из критериев сильнее $\pi(\Omega/\{k_1, k_2\})$ или $\Delta(\Omega/<k_1, k_2>, <\Delta k_1 = 90\%, \Delta k_2 = 90\%>)$ и почему? Поясните ответ рисунком.
11. В чем особенности оптимальных решений, полученных по интегральному критерию аддитивного типа, и могут ли они быть также оптимальными по π -критерию?
12. Какая из записей верна:

    а) $|\Omega_{\pi(\Omega/\{k_1, k_2\})}| \geq |\Omega_{L(\Omega/<k_1, k_2>)}|$ или б) $|\Omega_{\pi(\Omega/\{k_1, k_2\})}| \leq |\Omega_{L(\Omega/<k_1, k_2>)}|$?
13. Как изменится сила Δ -критерия при увеличении величины уступок по показателям качества? Приведите графическое подтверждение Вашему ответу.

Библиографический список

1. **Кандырин Ю.В.** Методы и модели многокритериального выбора вариантов в САПР: Учебное пособие для Вузов. -М.: Издательство МЭИ. 2004г. - 172 с. (Глава 2).

2. **Кандырин Ю.В.** Автоматизированный многокритериальный выбор альтернатив в инженерном проектировании. Учеб. пособие. -М.: Издательство МЭИ, 1992 – 54 с. (глава 1).

3. **Кандырин Ю.В., Покровский Ф.Н., Сорокин С.А.** Элементы конструкций радиоэлектронной и электронно-вычислительной аппаратуры / ***Под ред. Ю.В. Кандырина***: Учеб. пособие. -М.: Издательство МЭИ, 1993 –304 с. (глава 2).

4. **Кандырин Ю.В**. Электронный конспект лекций на CD по разделу «Автоматизированный многокритериальный выбор вариантов в САПР РЭС». Компакт-диск в электронной библиотеке кафедры РПУ МЭИ. Или на сайте www.mpei.ru. в разделе подразделения – каф. РПУ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

П1. Введение в сравнительный анализ силы усечения множеств вариантов с помощью π и L критериев

Вначале рассмотрим понятие силы критериальной постановки. Сила критериальной постановки обычно рассматривается для *экстенциальных* R^{ext} (осуществимых) отношений порядка.

Пусть в исходном множестве альтернатив Ω существуют варианты, для которых выполняется отношение R^{ext} , т.е. справедливо

$$\exists \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \qquad \omega_1 \neq \omega_2 \in \Omega: \quad \omega_1 R^{ext} \omega_2. \qquad (1)$$

По определению [1] отношение R_1^{ext} сильнее отношения R_2^{ext}, если R_1^{ext} приводит к “большему усечению” исходного множества альтернатив Ω, чем R_2^{ext}

$$\Omega_1 = \{\omega^0{}_1 \in \Omega: \quad \omega^0{}_1 R_1^{ext} \omega_i, \ \forall \omega_i \in \Omega\},$$

$$\Omega_2 = \{\omega^0{}_2 \in \Omega: \omega^0{}_2 \mathrm{R}_2^{ext} \omega_i, \ \forall \omega_i \in \Omega\},$$

$$\Omega_1 \subseteq \Omega_2, \text{ т. е.}$$

$$R_1^{ext} \triangleright R_2^{ext} \Leftrightarrow R_2^{ext} \subseteq R_1^{ext} \Leftrightarrow \{(\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing\} \wedge \{(\Omega_1 \subseteq \Omega_2)\}. \qquad (2)$$

Отношение порядка R^{ext} на Ω называется *экстраэкстенциальным*, если оно экстенциально и множество наилучших по R^{ext} элементов не пусто, т.е.

$$\Omega_0 = \{\omega_0 \in \Omega\textbf{:} \ \omega_0 \ R^{ext} \omega_i, \ \forall \omega_i \in \Omega\} \neq \varnothing. \qquad (3)$$

Далее будем рассматривать только экстраэкстенциальные отношения порядка, как представляющие наибольший интерес при решении задач проектного выбора.

Введем следующие определения:

- Отношения порядка R сильнее каждого $R_k, \ k = \{1,M\}$,

$$\text{если } \{R \triangleright R_k\} \wedge \{\Omega_0 \cap \Omega_k\} \neq \varnothing \wedge \Omega_0 \subseteq \Omega_k, \text{ где}$$

$$\Omega_0 = \{\omega_0 \in \Omega\textbf{:} \ \omega_0 R \,\omega, \ \forall \omega \in \Omega\}, \quad \Omega_k = \{\omega_0 \in \Omega \textbf{:} \ \omega_0 R_k \,\omega, \ \forall \omega \in \Omega\}.$$

- Отношения порядка R сильнее совокупности $\{R_k\}, \ k = \{1,M\}$,

$$\text{т.е. } R \triangleright \{R_k\}, \ k = \{1,M\}, \text{ если}$$

$$\{\mathrm{R} \triangleright R_k\}, \ k = \{1,M\} \wedge \Omega_0 \cap \{\bigcap_K \Omega_k\} \neq \varnothing, \ \Omega_0 \subseteq \{\bigcap_K \Omega_k\}.$$

- Совокупность отношений порядков $\{R_k\}$, $k = \{1,M\}$ сильнее R,

$$\text{т. е. } \{R_k\} \triangleright R, \ k = \{1,M\}, , \text{ если}$$

$$\{\mathrm{R}_k \triangleright R\}, \wedge \{\bigcap_K \Omega_k\} \cap \Omega_0 \neq \varnothing, \ \{\bigcap_K \Omega_k\} \subseteq \Omega_0, \ k = \{1,M\}.$$

Причем если, среди экстенциальных отношений R^{ext} найдется отношение доминирования R^{dom}, для которого существует решение, то это решение - единственное. Понятно, что среди экстраэкстенциальных отношений R^{dom} обладает максимальной силой. Поэтому далее рассматриваются множества альтернатив, не содержащие доминирующего элемента.

- Размерность π и L – критериальных постановок определяется числом участвующих в ней показателей качества – компонент k_m вектора $\boldsymbol{K}$. Или, другими словами, мощность $|\boldsymbol{K}|$ задает размерность многокритериальной постановки.
- Две лексикографические L - постановки сравнимы, если линейный порядок на показателях качества критериальной постановки меньшей размерности совпадает с началом линейного порядка постановки большей размерности.

$L_1 < k_{j1}, \ldots, k_{jm} > j \in J$ *сравнима* с $L_2 < k_{i1}, \ldots, k_{in} >, \ i \in I, \ |J| \geq |I|$, если

$$\begin{cases} k_{j1} = k_{i1}, \\ k_{j2} = k_{i2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{jn-1} = k_{in-1} \\ k_{jn} = k_{in}. \end{cases}$$

При этом L- постановка *неизбыточна,* если удаление последнего показателя качества в линейном порядке, которым она задана, приводит к изменению оптимальных альтернатив ее решения.

То есть, $L < k_{j1,}...k_{jm} >$ неизбыточна, если

$$\Omega_{01}: L(\Omega\ / < k_{j1,}...k_{jm} >),\ \Omega_{02}:\ L(\Omega / < k_{j1,}...k_{jm\text{-}1} >),\quad \text{то } \Omega_{01} \neq \Omega_{02},$$
$$\Omega_{01} \subset \Omega_{02}.$$

- Две π - постановки *сравнимы,* если множество ПК, входящих в одну из них является подмножеством другой.

То есть, постановка $\pi_1 \{ k_{j1,}...k_{jm} \},\quad j \in J$ сравнима с постановкой

$\pi_2 \{k_{i1,}...k_{jn} \}, i \in I,\quad \left|J\right| \geq \left|I\right|,$ если: $\{k_{j1,}...k_{jm} \} \supseteq \{k_{i1,}...k_{jn} \}$ и

если Ω_{01}: $\pi\ \{k_{j1,}...k_{jm} \}$, Ω_{02} : $\pi\ \{k_{j1,}...k_{jm\text{-}1} \}$, *то* $\Omega_{01} \neq \Omega_{02},\ \Omega_{01} \supset \Omega_{02}$.

- Две комбинированные πL - постановки *эквивалентны*, если их решения совпадают.

Так $\pi_1 L_1 (k_{j1,}...k_{jm})$ эквивалентна $\pi_2 L_2\ (k_{i1,}...k_{in})$, если

$$\Omega_{01} / \pi_1 L_1 (k_{j1,}...k_{jm}) \equiv \Omega_{02} / \pi_2 L_2\ (k_{i1,}...k_{jn}).$$

Введенные определения и отмеченные основные свойства π и L, а также комбинированных πL постановок позволяют проанализировать возможности силы их усечения. Проведем этот анализ несколько подробнее.

Анализ основных свойств π - критериев в задачах выбора вариантов

Решением задачи выбора вариантов в π*- постановке* $\pi(\Omega\ /\ \{k_{1,...}k_m\})$ *на множестве* Ω *по совокупности показателей качества* $\{k_1,...k_m\}$ *является подмножество* Ω_π *недоминируемых и несравнимых внутри* Ω_π *альтернатив.*

Иными словами, для множества оптимальных по Парето альтернатив $\Omega_0 \equiv \Omega_\pi$ справедливо утверждение (для минимизации), что

$$\exists\omega_0 \in \Omega_\pi\!: \{k_l(\omega_0) \leq k_l(\omega_j),\ \forall l \in M\} \wedge \{\exists\ l_o \in J\!:\ k_l(\omega_0) < k_l(\omega_j)\}.$$

Процедуры отыскания множества Ω_π лучших по Парето альтернатив, как это было показано выше, могут быть различными. По определению для π- критерия имеет смысл рассматривать процедуры выбора по совокупности ПК, где число показателей качества больше двух. Учитывая это обстоятельство, процедура отыскания множества Ω_π оптимальных по Парето решений предлагается в следующем утверждении.

<u>Утверждение 1</u>. *Решение* Ω_π π *- постановки вида* $\pi\ (\Omega\ /\{k_{1,...}k_m\})$ *определяется пересечением окрестностей фактор-множеств для порядков альтернатив по всем показателям качества из выделенной совокупности* $\{k_1,\ k_{2,...}k_m\}$. Для доказательства этого утверждения определим некоторые новые термины.

Прежде всего, введем понятие «*фактор-множества*». Фактор-множеством*:* Ω/R (множество Ω по отношению R) будем называть множество окрестностей O_i единичного радиуса, взятых для всех элементов $\omega_i \in \Omega$, $i = \{1, |\Omega|\}$.

В свою очередь, *окрестностью* O_i единичного радиуса элемента ω_i будем называть множество элементов $\{\omega_{i2}\}$, доминирующих ω_i, таких, что: $<\{\omega_{i2}\},\ \omega_i > \in R$. Очевидно, что окрестностью минимальных элементов является пустое множество.

Определим окрестность O_i в фактор-множестве Ω/k_j для отношения $\succ =$ по показателю качества k_j в виде

$$O_i(\Omega/k_j) \equiv\ \{\omega_l\!: k_j(\omega_l) \leq\ k_j(\omega_i),\ \ \omega_l \in \Omega\}.$$

Тогда фактор-множество Ω/k_j можно представить как совокупность окрестностей $\Omega/k_j = \{O_i(\Omega/k_j)\}$, $i = \{1,|\Omega|\}$.

Рассмотрим пересечение окрестностей множеств-локаторов Ω/k_{j1} *и* Ω/k_{j2} для ω_i:

$$O_i(\Omega/k_{j1}) \cap O_i(\Omega/k_{j2}) = \{\omega_l\colon k_{j1}(\omega_l) \le k_{j1}(\omega_i),\ \omega_l, \omega_i \in \Omega\} \wedge$$
$$\wedge \{\omega_l\colon k_{j2}(\omega_l) \le k_{j2}(\omega_i),\ \omega_l, \omega_i \in \Omega\} =$$
$$= \{\omega_l\colon [k_{j1}(\omega_l) \le k_{j1}(\omega_i)] \wedge [k_{j2}(\omega_l) \le k_{j2}(\omega_i)],\ \omega_l, \omega_i \in \Omega\}.$$

Продолжая для $j_1, \ldots j_m \in J$, получаем:

$$\bigcap_{j\in J} O_i(\Omega/k_j) = \bigcap_{j\in J} \{\omega_l\colon k_j(\omega_l) \le k_j(\omega_i),\ \forall j \in J,\ \omega_l, \omega_i \in \Omega\}.$$

И если $\bigcap_{j\in J} O_i(\Omega/k_j) = \varnothing$, то ω_l - недоминируемый любым $\omega_i \in \Omega$ а, следовательно, $\omega_l \in \Omega_\pi$ является Парето оптимальным элементом

$$\Omega_\pi\ \{k_{j1,\ldots,}k_{jm}\} = \{\omega_{l0}\colon \bigcap_{j_1,\ldots,j_m} O_i(\Omega/k_j) = \varnothing,\quad \omega_l \in \Omega\}. \tag{4}$$

Условие $\bigcap_{j\in J} O_i(\Omega/k_j) = \varnothing$ означает, что ω_{l0} – минимальные элементы частично упорядоченного множества – нехудшие по Парето. Таким образом, *Утверждение 1* доказано.

Для сравнимых π- постановок выполняется следующее утверждение:

<u>Утверждение 2</u>. *Среди сравнимых π - постановок сильнее постановка меньшей размерности.*

$$\text{То есть: } \pi\ \{k_m\} \lhd \pi\ \{k_{m-1}\} \lhd \pi\ \{k_{m-2}\} \lhd, \ldots, \lhd \pi\ \{k_2\}, \tag{5}$$
$$\text{где } k_m \supseteq k_{m-1} \supseteq k_{m-2} \supseteq \ldots \supseteq k_2,\quad k_m = \{k_{j1}, k_{j2}, \ldots k_{jm}\}.$$

Для доказательства *Утверждения 2* рассмотрим две π - постановки разной размерности $\pi_1\ \{k_q\}$, $q \in Q$ и $\pi_2\ \{k_m\}$, $m \in M$, причем пусть для определенности $Q \supset M$. Тогда оптимальные решения для π_1 и π_2 – постановок согласно *Утверждению 1* представим как пересечение окрестностей фактор-множеств в виде

$$\Omega_{\pi 1} = \{\omega_l : \bigcap_{q\in Q} O_l(\Omega/k_q) = \varnothing,\ \omega_l \in \Omega\}, \tag{6}$$

$$\Omega_{\pi 2} = \{\omega_i\colon \bigcap_{m\in M} O_l(\Omega/k_m) = \varnothing,\ \omega_i \in \Omega\}, \tag{7}$$

где Ω/k_q, Ω/k_m – фактор-множества порядков по k_q и k_m соответственно.

Представим $\bigcap_{q\in Q} O_l(\Omega / k_q)$, используя (6) и (7) в виде

$$\bigcap_{q\in Q} O_l(\Omega / k_q) = \bigcap_{m\in M} O_l(\Omega / k_m) \vee \bigcap_{q\in Q\setminus M} O_l(\Omega / k_q).$$

Последнее соотношение, учитывая, что $Q \supset M$ в силу сравнимости π - постановок и то, что оптимальные по Парето альтернативы (минимальные элементы) обладают пустой окрестностью, можно переписать в следующем виде:

$$\{\omega_l\colon \bigcap_{q\in Q} O_l(\Omega/k_q) = \varnothing,\ \omega_l \in \Omega\} = \{\omega_l\colon \bigcap_{m\in M} O_l(\Omega/k_m) = \varnothing,\ \omega_l \in \Omega\} \vee$$

$$\vee\ \{\omega_l\colon \bigcap_{q\in Q\setminus M} O_l(\Omega/k_q) = \varnothing,\ \omega_l \in \Omega\},\quad \text{т.е. } \Omega_{\pi 1} \supseteq \Omega_{\pi 2}.$$

А это, в свою очередь значит, что $\pi_1\{k_q\} \lhd \pi_2\{k_m\}$, $q \in Q$, $m \in M$, $|Q| \ge |M|$, при $\{k_q\} \supseteq \{k_m\}$, что и требовалось доказать.

Лексикографическая постановка $L(\Omega/<k_1,\dots k_m>)$ многокритериальной задачи задает множество лучших альтернатив Ω_0 следующим образом:

$$\Omega_0 : \Omega^1/\min_{\Omega} k_1,\dots \Omega^i/\min_{\Omega^{q-1}} k_q,\dots \Omega^m/\min_{\Omega^{m-1}} k_m,\ \text{где}$$

$$\Omega^q/\min_{\Omega^{q-1}} k_q \Leftrightarrow \Omega^q = \{\omega_l : k_q(\omega_l) = \min k_q,\ \min k_q \le k_{qi}(\omega_i),\ \omega_l,\omega_i \in \Omega^q\}. \quad (8)$$

Будем искать решение задачи (8) в виде включения линейных порядков альтернатив по мере привлечения показателей качества в процесс выбора вариантов, в соответствии с установленным ЛПР линейным порядком.

Линейный порядок альтернатив $<\omega_i>$, $i = \{1,N\}$ по показателю качества k_1 устанавливается с помощью выражения вида

$$L(\Omega/k_1) = <\omega_1,\dots \{\omega_k,\omega_{k+1},\dots \omega_{i\,k+p}\},\dots\omega_n>,$$

то есть $\omega_1 \succ \dots \succ \omega_{ik}, \omega_{ik+1}, \omega_{k+p}, \succ \dots \succ \omega_n$.

Упорядочение $L(\Omega/k_1)$ элементов множества $\Omega = \{\omega_i\}$, $i=\{1,N\}$ по k_1 получено посредством последовательности операций (9).

Заметим, что в полученном упорядочении $L(\Omega/k_1)$ могут быть подмножества вида $\{\omega_k, \omega_{k+1},\dots\omega_{k+p}\}$, эквивалентных по k_1 вариантов.

$$\begin{cases} \omega_1/\min\limits_{\Omega} k_1 \\ \omega_2/\min\limits_{\Omega\setminus\omega} k_1, \\ \{\omega_k, \omega_{k+1},\dots,\omega_{k+p}\}/\min\limits_{\Omega\setminus\{\omega_1,\dots,\omega_{k-1}\}} k_1 \\ \dots\dots\dots \\ \omega_n/\min\limits_{\Omega\setminus\{\omega_1,\dots,\omega_{n-1}\}} k_1 \end{cases} \quad (9)$$

Элементы этих подмножеств имеют одинаковые значения показателя качества k_1, т.е. $k_1(\omega_k) = k_1(\omega_{k+1}) =, \dots, = k_1(\omega_{k+p})$.

Упорядочение этих подмножеств (раскрытие $\{\dots\}$скобок) можно провести установлением линейного порядка среди элементов подмножеств по следующему по важности показателю качества k_2, т.е. $L(\{\omega_k, \omega_{k+1,\dots}\omega_{k+p}\}/k_2)$. В этом линейном порядке, в свою очередь, также могут быть подмножества с одинаковыми значениями показателя качества k_2. Аналогично, проводя упорядочение в соответствии с линейными порядками по $k_3, \dots, k_m$,.. получаем некоторый результирующий порядок по «вложенным» линейным порядкам в соответствии с заданным приоритетом показателей качества $k_1 \succ k_2 \succ \dots \succ k_{jm}$. Этот результирующий порядок альтернатив, установленный по L -критерию будем обозначать в виде $L(\Omega/<k_1,\dots k_m>)$.

Введем операцию поиска минимального элемента в линейном порядке альтернатив $L(\Omega/k_1)$ как взятие первого элемента ω_l в этом порядке, т. е. $\omega_1 = \min L(\Omega/k_1)$ или

$$\{\omega_{k,},\dots\omega_{k+p}\} = \min L(\Omega_l/k_1) \mid \Omega_l = \Omega \setminus \{\omega_{1,\dots}\omega_{k-1}\}.$$

Сравнивая выражения (8) и (9) получаем, что

$\min L(\Omega/<k_1,\dots k_m>)$ является решением постановки $L<k_1,\dots k_m>$.

При этом можно сделать следующие утверждения:

Утверждение 3: *Решение L -постановки вида $L< k_1, \ldots k_m>$ сводится к «вложению» линейных порядков $L(\Omega\ /< k_1, \ldots k_m >)$ альтернатив по последовательно рассматриваемым показателям качества.*

Утверждение 4: *Если рассматриваемое множество альтернатив отличается значениями, по крайней мере, одного показателя качества, участвующего в L - постановке, то оптимальная (лучшая) альтернатива - единственна.*

В этом случае L -постановку будем называть *полной.* Доказательство этого утверждения очевидно. Пусть для постановки $L<k_1, \ldots k_m>$ решение не единственно, т.е. существуют, по крайней мере, два оптимальных элемента $\omega_{01} \neq \omega_{02}$. Но для выполнения условия оптимальности необходимо совпадение всех координат $k_1(\omega_{01}) = k_1(\omega_{02})$, $k_2(\omega_{01}) = k_2(\omega_{02})$, ..., $k_m(\omega_{01}) = k_m(\omega_{02})$, что противоречит условиям *Утверждения 4.*

Если две постановки сравнимы, то для сравнимых L- постановок выполняется *Утверждение 5.*

Утверждение 5: *Среди сравнимых L-постановок сильнее постановка большей размерности.*

$$L< k_1, k_2, \ldots k_m > \rhd < k_1, k_2, \ldots k_{m-1} > \rhd, \ldots, \rhd L< k_1 >. \qquad (10)$$

Правильность *Утверждения 5* следует из рассмотрения решений для сравнимых L- постановок. На основании (9) для $L(\Omega/<k_1, k_2, \ldots k_m>)$ можно записать:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\Omega_{01}/\min_{\Omega} k_1}_{:L< k_1>},\quad \Omega_{02}/\min_{\Omega_{01}} k_2, \ldots}_{:L < k_1,\ k_2 >}\quad ,\ \Omega_{0m}\ /\ \min_{\Omega_{0m-1}} k_m}_{:\ L < k_1,\ k_2, \ldots, k_m >}$$

т.е. $\Omega_{01} = \Omega^{1}, \ldots,\ \Omega_{0i} = \Omega^{i}, \ldots,\ \Omega_{0m} = \Omega^{m}$

При этом множества оптимальных постановок для $L < k_{j1}>$, $L<k_{j1}, k_{j2}>, \ldots$ $\ldots L <k_{j1}, k_{j2}, \ldots k_{jm}>$ на основании (9) соотносятся следующим образом:

$$\Omega \supseteq \Omega^{1} \supseteq \Omega^{2} \supseteq \ldots \supseteq \Omega^{i} \supseteq \ldots \supseteq \Omega^{m},$$

а это означает справедливость *Утверждения 5.*

Для *полной* L-постановки мощность множества Ω_{0m} равна 1, т.е. $|\Omega_{0m}| = 1$, что следует из *Утверждения 4.*

Совокупность сделанных утверждений позволяет проанализировать некоторые важные свойства и комбинированных πL – постановок.

Рассмотрим соотношения силы комбинированных πL – постановок.

В начале данного раздела было показано, что πL – постановки можно свести к суперпозиции π и L – постановок. Оценим силу πL – постановок.

Утверждение 6. *Сравнимые πL – постановки различной размерности могут быть строго упорядочены по их силе, следующем образом:*

$$L <k_{j1}, k_{j2}, \ldots k_{jm}> \rhd L <k_{j1} \ldots k_{jm-1}> \rhd \ldots \rhd L <k_{j1}> \rhd \pi\ \{k_2\} \rhd \ldots \rhd \pi\{k_{m-1}\} \rhd \pi\{k_m\},$$

$$\text{где } k_{j1} \subseteq k_2 \subseteq k_3 \subseteq \ldots \subseteq k_{m-1} \subseteq k_m. \qquad (11)$$

Утверждение 6 логически следует из *Утверждения 2* и *Утверждения 5* и значит, его можно считать доказанным.

Рассмотренные свойства и утверждения для неметрических постановок задач многокритериального выбора альтернатив во многом дают возможность определить концептуальную стратегию выбора вариантов через назначаемые ЛПР критериальные постановки и заложить основные принципы решения таких задач.

Столь строго как для π и L критериев установить силу критерия с уступками не представляется возможным, так как результат зависит не только от принятых во внимание показателей качества и их приоритетов, но и от величины уступки по каждому из показателей. В работе предлагается провести исследование силы Δ -критерия экспериментальным путем и сделать соответствующие выводы по индукции.

Учебное издание

Кандырин Юрий Владимирович
Сазонова Людмила Тимофеевна

СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ВЫБОРА ВАРИАНТОВ

Лабораторная работа

Методическое пособие
по курсам
«Теория выбора и принятия решений в задачах проектирования РЭС»
и «Основы конструирования и технологии производства РЭС».
Для студентов, обучающихся по направлению «Радиотехника»

Редактор издательства

Темплан издания МЭИ 2008(1), метод.		**Подписано в печать**
Формат 60×84/16	**Печать офсетная**	**Физ. печ. л. 1,0**
Тираж 100 экз.	**Изд. №**	**Заказ**

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная ул. Д.14
Отпечатано в типографии «НИИ «Геодезия» 141292, Московская обл.,
Г. Красноармейск, просп. Испытателей, д.14.