

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ  
РЕВОЛЮЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Утверждено учебным управлением МЭИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по курсу Инженерная графика

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Москва  
1986

744

М545

УДК:744:69(077)

Пересечение поверхностей. Головина Л. Г., Касаткина Е. П.,  
Новодережкина Т. В., Патрунова М. С/Под ред. К. К. Александрова.— М.:  
Моск. энерг. ин-т, 1986. — 32 с.

Методические указания содержат основные теоретические положения  
темы «Пересечение поверхностей» в разделе «Теория построения  
чертежа» курса инженерной графики, которые рассматриваются в  
приложении к решению задач.

Указания предназначены для студентов, выполняющих индивидуальные  
графические работы по построению проекций линии пересечения по-  
верхностей в общем и частных случаях.

© Московский энергетический институт, 1986 г.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим сложные по форме предметы, поверхность которых можно  
представить как сочетание отсеков плоскостей и поверхностей вращения  
— цилиндрической, конической, сферической, торовой и т. д. В общем  
случае переход от одной поверхности к другой осуществляется по линии

их пересечения, частным является случай, когда переход происходит по линии касания поверхностей.

На чертеже информация о геометрических формах передается с помощью линий. Так, совокупности линий, составляющих изображения на рис. 1.1, однозначно определяют форму предмета в пространстве. Границей каждого изображения является очерковая линия. Она может быть сложной составной (очерковая линия главного вида) или графически простой (очерковая линия вида сверху — окружность), но это всегда замкнутая линия.

В пределах очерковой линии проекции отсеков разных поверхностей отделяются проекцией линии их пересечения или очерковой линией поверхности вращения. Кривая (чГ] на рис. 1.1 — фронтальная проекция пространственной линии пересечения (£) цилиндрической поверхности а со сферической поверхностью р; на главном виде она отделяет проекции соответствующих отсеков. Очерковая линия (отрезок прямой) (т"~л~ проекция очерковой образующей цилиндра а; в нижней своей части также отделяет проекции отсеков цилиндрической и сферической поверхностей, в верхней — входит в состав общей очерковой линии главного вида.

Если при построении изображения предмета по заданному направлению проецирования какая-либо поверхность (цилиндрическая или плоскость) занимает проецирующее положение, то она проецируется в линию.

Горизонтальной проекцией цилиндрической поверхности а будет окружность а'. Такая вырожденная проекция поверхности включает проекции всех линий ее пересечения со смежными поверхностями: а' включает дугу 1\ — горизонтальную проекцию линии пере

3

сечения 1\, дугу 1'2 — проекцию линии пересечения /2 цилиндрической поверхности а с плоскостью у и совпадает с линией ГЗ — проекцией линии пересечения поверхности а с плоскостью б. В таком случае можно говорить, что проекция отсека поверхности (б') отделяется на чертеже от проекций других отсеков (у' и р') вырожденной проекцией смежной проецирующей поверхности (а').

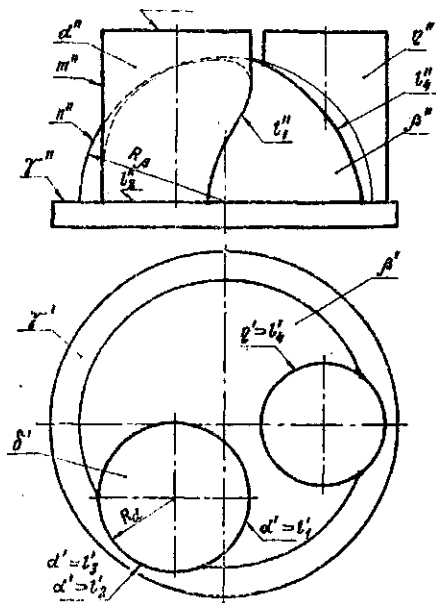


Рис. 1.1

В пространстве, в зависимости от направления проецирования, линия пересечения может быть полностью видимой, частично видимой и полностью невидимой. На чертеже видимые линии пересечения или ее видимые участки изображаются основной сплошной линией, невидимые — штриховой. Так, при построении главного вида рассматриваемого "предмета видима часть линии пересечения  $U$ , расположенная на передней половине цилиндрической поверхности  $a$ , остальная часть — невидима. Соответствующие участки фронтальной

3

проекции  $U$  представлены сплошной основной линией и штриховой линией.

Иногда видимая часть линии пересечения конкурирует с ее невидимой частью, например, линия пересечения  $\zeta$  цилиндрической поверхности  $\zeta$  со сферой  $p$  при построении главного вида. Естественно, что предпочтение отдается видимой части, и кривая  $\Gamma^4$  на чертеже показана основной сплошной линией.

В зависимости от направления проецирования, могут быть полностью видимыми, частично видимыми и полностью невидимыми и очерковые образующие поверхностей вращения. Например, часть очерковой образующей  $p$  сферы  $p$  при построении главного вида перекрывается цилиндрической поверхностью  $a$ . На чертеже соответствующая часть очерковой  $p''$  проведена штриховой линией.

Таким образом, при построении изображения предмета по заданному направлению проецирования необходим анализ видимости пространственных линий, которые отображаются на чертеже. Однако, если геометрические формы предмета полностью и однозначно

определяются совокупностью основных сплошных линий чертежа, то включение штриховых линий в состав изображения необязательно. Любые сложные по форме предметы при построении изображений считаются однородными, и переход от одной поверхности к другой внутри предмета на чертеже не показывается. Однако для выполнения графических построений часто требуются очерковые линии поверхностей вращения, тогда их показывают сплошной тонкой как вспомогательные линии чертежа. На рис. 1.1 таким образом представлена часть очерковой  $n''$  сферы  $p$ .

Итак, изображение предмета может включать:

1. Очерковые линии поверхностей вращения.
2. Проекции линий пересечения поверхностей. Если хотя бы одна из пересекающихся поверхностей является проецирующей, то проекция линии пересечения включается в вырожденную проекцию этой поверхности.

Обычно на практике построение очерковой линии поверхности вращения и вырожденной проекции проецирующих поверхностей (а следовательно, и проекций принадлежащих ей линий пересечения) особых затруднений не вызывает, так как соответствующие линии чертежа определяются характерными размерами с учетом масштаба изображения. Например:

5

очерковая линия  $n''$  проводится радиусом сферы вырожденная проекция  $a$  — радиусом цилиндра  $Rn$  и т. д.

Однако в общем случае проекция пространственной линии пересечения поверхностей совсем неочевидна. На рис. 1.1 кривая  $1''$  может быть построена только как совокупность проекций точек линии пересечения  $U$ . Если строится изображение реально существующего предмета, проецирование множества точек пространственной линии представляет сложный, трудоемкий процесс; чаще всего строятся и преобразуются изображения предметов, которые не имеют реальных аналогов.

Вследствие этого возникает необходимость в построении проекции линии пересечения, опираясь на очерковые линии и вырожденные проекции пересекающихся поверхностей. Пространственная задача решается на плоских изображениях. Такой общий метод графического построения проекции линии пересечения на базе очерковых линий заданных поверхностей излагается в дальнейших разделах этого пособия.

Рассмотрены также некоторые частные случаи пересечения при определенном расположении пересекающихся поверхностей.

## 2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Пусть две произвольные поверхности  $a$  и  $p$  (рис. 2.1) пересекаются по кривой  $l$ , которую можно представить как множество точек  $A$ :

« $\Pi = \{A_j\}, j=1, 2, 3, \dots$  Это множество одновременно принадлежит обоим пересекающимся поверхностям:

$\{L_j\}$  ста;  $\{D_j\}$  ср.

Каждую точку множества можно рассматривать как точку пересечения двух линий  $a$  и  $b$ , выделенных соответственно на заданных пересекающихся поверхностях:

$L_j = \{x \in \Pi; a \in a; b \in b\}$ .

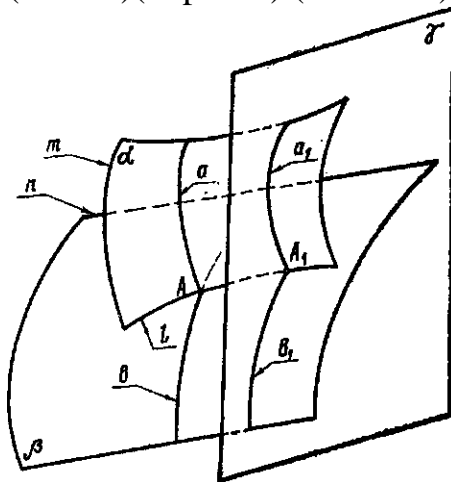
Таким образом, построение линии пересечения двух поверхностей сводится к определению множества точек пересечения линий, принадлежащих этим поверхностям.

Непосредственно на изображении заданных поверхностей выделить пару пересекающихся в пространстве линий затруднительно (например, линии  $t$  и  $p$  не пересекаются). Но если обе поверхности пересечь некоторой

5

поверхностью  $u$  и определить соответствующие линии пересечения  $a_i$  и  $b_i$  то точка пересечения этих линий  $A_i$  принадлежит обоим пересекающимся поверхностям, а следовательно, и линии пересечения  $l$ :

$(A_i \in a_i) \wedge (A_i \in b_i) \Rightarrow A_i \in l$ .



к<, Рис. 2.1

Вспомогательная поверхность ( $u$ ), которая применяется при построении линии пересечения поверхностей, называется посредником.

Применив достаточное количество посредников, можно определить необходимое количество точек линии пересечения  $l$ . Таким образом, общий алгоритм для определения линии пересечения двух произвольных поверхностей можно представить следующим образом:

$(\{u\} \cap \{a\}) \cap (\{u\} \cap \{b\}) = \{A_j\} = l$ .

Порядок графических операций на чертеже при построении проекции линии пересечения:

1. Построить проекцию поверхности-посредника. Если это плоскость частного положения или проецирующая цилиндрическая поверхность, то ограничиваются вырожденной проекцией посредника.

7

2. Построить проекции линии пересечения посредника с каждой из заданных поверхностей.
3. Определить точки пересечения этих кривых.
4. Используя достаточное количество поверхностей-посредников, построить последовательный ряд проекций точек линии пересечения. Как всегда .при построении линий чертежа, необходимо выделить и построить, опорные (характерные) точки проекции линии пересечения и определить ее видимость.

Метод поверхностей-посредников является общим методом построения проекций линии пересечения поверхностей по точкам. В зависимости от типа поверхности, которая используется в качестве" посредника, различают способы построения проекций точек линии; пересечения. Применение того или иного способа; зависит от типа пересекающихся поверхностей и от их взаимного расположения.

### 3. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

Использование в качестве посредника плоскости частного положения рассмотрим на примере построения проекций линии пересечения / двух торовых поверхностей  $\alpha$  и  $\rho$  (рис. 3.1). Условие задачи на чертеже определяется очерковыми линиями пересекающихся поверхностей и проекциями осей вращения.

Анализ условия показывает, что оси вращения заданных поверхностей параллельны и являются горизонтально-проецирующими прямыми. Через любую точку каждой поверхности можно провести параллели (окружности), проекции которых легко выделяются на чертеже в пределах очерковых линий. Например, параллели  $a$  и  $b$  соответственно на поверхностях  $\alpha$  и  $\rho$  на рис. 3.1 представлены фронтальными ( $a''$ ,  $b''$ ) и горизонтальными ( $a'$ ,  $b'$ ) проекциями.

В данной задаче в качестве посредника целесообразно выбрать плоскость, пересекающую обе заданные поверхности ортогонально к осям вращения, т. е. горизонтальную плоскость уровня. При таком расположении посредник-плоскость (например  $u$ ) будет пересекать заданные поверхности по параллелям  $au$  и  $b'u$  точка пересечения которых (1) будет принадлежать линии /. Для выбранного положения посредника на чертеже, сначала выделяются фронтальные проекции параллелей —  $a''$ ,  $b''$ , затем строятся горизонтальные проек

8

ции  $a/$  и  $B\backslash$ . Точка  $\Gamma$  определяется пересечением линий  $a/$  и  $Bx'$ . Фронтальная проекция точки  $\Gamma$  строится с помощью линии проекционной связи по принадлежности к фронтальной проекции параллели.

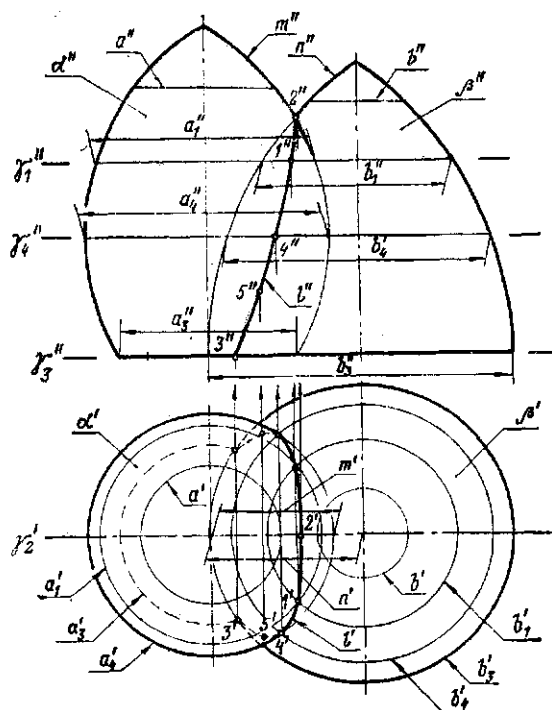


Рис. 3.1

Для построения всей кривой нужно применить несколько посредников — горизонтальных плоскостей уровня, расположенных на разной высоте по осям вращения заданных поверхностей. В общем случае необходимое количество посредников определяется сложностью линии пересечения и требуемой точностью решения.

Проекции некоторых точек линии пересечения можно выделить на чертеже сразу после анализа условия задачи без

9

каких-либо вспомогательных построений. Так, в точке  $2''$  пересекаются очерковые линии  $t''$  и  $p''$  заданных торов. Расположение горизонтальных проекций этих линий ( $mf$  и  $p'$ ) показывает, что в этой задаче соответствующие очерковые образующие тип находятся в общей плоскости симметрии заданных фигур  $u_2$ , которая является фронтальной плоскостью уровня (на чертеже обозначена горизонтальная проекция этой плоскости —  $u\Gamma 2$ )-

Общая точка изображения ( $2''$ ) двух линий ( $t''$  и  $p''$ ), расположенных в одной и той же плоскости ( $u_2$ ), является проекцией точки их пересечения: ( $2''=t'' \cap p''$ ) ( $t, p \cap u_2$ ) ( $2=t \cap p$ ).

Так как  $m$  принадлежит поверхности  $a$ ,  $p$  — поверхности то точка их пересечения  $2$  принадлежит линии пересечения поверхностей  $l$ :

(meet) ( $l \subset p$ ) ( $a \cap p = 0$  (26E/)) •

Точно так же на чертеже выделяются проекции точки  $3$ , принадлежащей линии пересечения. Действительно, в точке  $3'$  пересекаются параллели  $a'3$  и  $Б'3$ . По условию задачи, эти параллели расположены в общей плоскости оснований заданных фигур  $u3$ , которая является горизонтальной плоскостью уровня (на чертеже обозначена фронтальная проекция этой плоскости  $u''3$ ). Таким образом:

( $3, = o'8 \cap Б'3$ ) ( $a3, b3 \subset u3$ )  $\Rightarrow$  ( $3 = a3 \cap Б3$ ), ( $a3 \subset a$ ) ( $Б3 \subset p$ ) ( $a \cap p = 1$ )  $\Rightarrow$  ( $3 \in l$ ).

Точки  $2'$  и  $3''$  строятся с помощью линий проекционной связи.

Точки  $2$  и  $3$  являются очевидными точками линии пересечения. Отметим, что они будут опорными точками:  $2$  — высшая,  $3$  — низшая точки линии пересечения. Секущие плоскости проводятся между ними.

Очерковой линией  $a \setminus$  торова поверхности  $a$  на виде сверху является проекция параллели наибольшего диаметра — экватора. При построении этого изображения часть поверхности  $a$ , расположенная выше экватора  $a4$ , будет видима, ниже — невидима. Соответственно, часть линии пересечения, включая точки  $1$  и  $2$ , будет видимой; часть линии  $l$ , расположенная ниже «4, в том числе и точка  $3$ , будет невидимой. Очевидно, граничная точка видимости линии пересечения  $4$  расположена на экваторе. Для построения проекций этой точки проведем посредник  $У4$  через экватор  $at$ . Тогда поверх-

10

ность  $p$  пересечется по параллели  $bi$ . Как и при построении проекций точки  $l$ , сначала на чертеже выделяется фронтальная проекция линии пересечения посредника  $u^*$  с поверхностью  $p$  — отрезок  $b''it$  далее строится ее горизонтальная проекция  $Б'4$ , находится точка  $4'$  пересечения линий  $a \setminus$  и  $Б \setminus$ . Фронтальная проекция точки  $4—4''$  определяется с помощью линии проекционной связи по принадлежности к линиям  $a \setminus$  или  $Б \setminus$ . Точка  $4$  является очерковой точкой линии пересечения.

При построении главного вида линия пересечения видима, вернее видимая часть закрывает невидимую.

Окружности оснований торов  $a3$  и  $Б3$  ограничиваются точкой их пересечения  $3$ . При этом линия  $a3$  при построении вида сверху полностью невидима, линия  $Б3$  невидима на участке, где она перекрывается поверхностью тора  $a$ .

Обычно при решении задач сначала находят проекции опорных точек, так как они позволяют определить, в каких пределах расположены проекции линии пересечения и где имеет смысл строить проекции промежуточных точек с помощью посредников для более точного построения кривой.

Отметим, что проекции и даже уровень расположения экстремальных



точек не всегда очевидны. Тогда для более точного выявления характера кривой их необходимо построить. Часто положение таких точек определяется лишь приближенно. Например, на рис. 3.1 экстремальная точка 5' кривой V выделяется из ряда соседних точек как наиболее удаленная от оси симметрии изображения. Следовательно, в этой области линии пересечения необходимо использовать посредники, достаточно близко расположенные друг к другу.

Нетрудно видеть, что проекции линии пересечения всегда располагаются в пределах общей площади одноименных проекций пересекающихся поверхностей.

Из анализа проведенного решения следует, что способ вспомогательных секущих плоскостей для построения проекций линии пересечения применяется тогда, когда обе заданные поверхности можно пересечь по графически простым линиям некоторой совокупностью проецирующих плоскостей, или, в частности, совокупностью плоскостей уровня.

#### 4. СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

Поверхности, имеющие общую ось вращения, называются соосными поверхностями вращения.

11

Если одна поверхность формируется вращением образующей  $t$ , а другая — образующей  $p$  (рис. 4.1) вокруг общей оси  $i$ , то общие точки образующих 1, 2 будут описывать параллели, общие для обеих поверхностей. Когда ось  $i$  параллельна плоскости проекций, параллели изображаются в виде отрезков прямых ( $t''$ ,  $h''$ ); если перпендикулярна, то в виде концентрических окружностей ( $//$ ,  $/2'$ ). Таким образом, две соосные поверхности пересекаются друг с другом по параллелям, причем число линий пересечения равно числу точек пересечения образующих (меридианов) поверхностей.

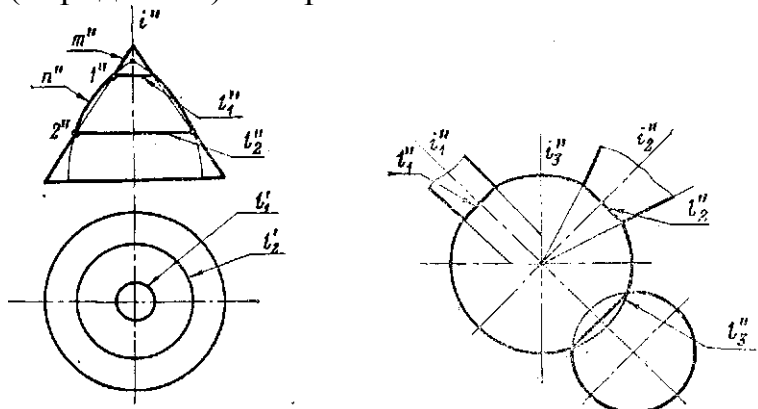


Рис. 4.1 Рис. 4.2

Сфера (рис- 4.2) имеет бесчисленное множество осей вращения, так как любая прямая, проходящая через центр сферы, может быть ее осью ( $U$ ,  $k$ ,  $h$  и т.д.). Когда центр сферы находится на оси какой-либо поверхности

вращения, то сфера соосна с этой поверхностью, и линией их пересечения является параллель. Если оси  $ii$ ,  $r'2$  и  $/3$  параллельны плоскости проекции, как на рис. 4.2, то линии пересечения сферы с цилиндрической поверхностью —  $U$ , с конической поверхностью —  $/2$  и с другой сферической поверхностью —  $/3$  изображаются в виде отрезков прямых. Через две точки (центры двух сфер) всегда можно провести прямую, поэтому две сферы всегда соосны. Сферы с общим центром называются концентрическими. Применение в качестве посредника сферы, соосной с пересекающимися поверхностями, рассмотрим на примере по

12

строения проекций линии пересечения / конической поверхности а и цилиндрической поверхности (J, взаимное расположение которых показано на рис. 4.3. Оси заданных поверхностей пересекаются в точке O и расположены в общей плоскости симметрии, которая является фронтальной плоскостью уровня. ....тл,

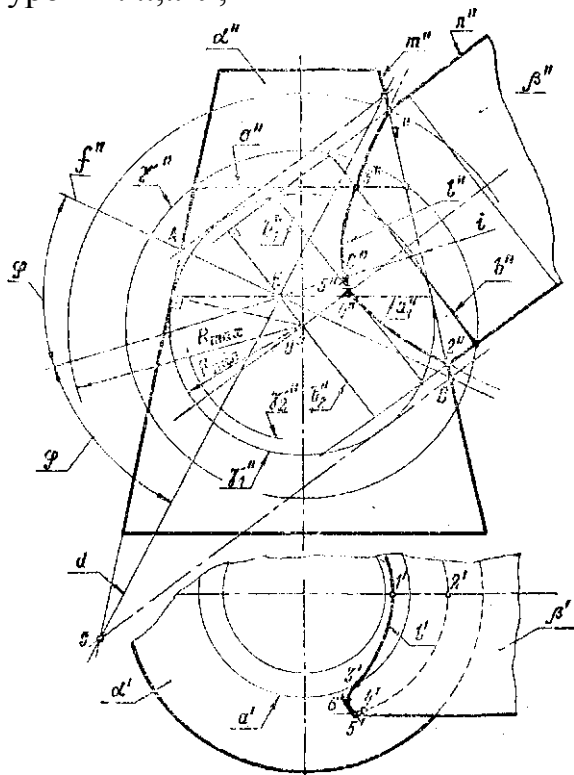


Рис. 4.3

Как и при решении предыдущей задачи, необходимо выделить опорные точки 1 и 2. Принадлежность этих точек к линии пересечения определяется тем, что фронтальные проекции  $1''$  и  $2''$  являются точками пересечения очерковых ли

10

ний конуса  $t''$  и цилиндра  $p''$ , а соответствующие им образующие  $t$  и  $p$  располагаются в общей плоскости симметрии.

Общий алгоритм решения задачи остается прежним: заданные поверхности нужно пересечь семейством вспомогательных поверхностей-посредников и найти точки пересечения полученных при этом линий.

Если в качестве посредника в данной задаче использовать плоскость, то при любом ее расположении по крайней мере одна из таких вспомогательных линий не будет проецироваться ни прямой, ни окружностью, что существенным образом затрудняет графические построения.

Но если из точки  $O$  пересечения осей как из центра провести сферу  $u$ , пересекающую заданные поверхности, то эта сфера будет соосна и с конической поверхностью  $a$ , и с цилиндрической  $p$ , и поэтому пересечется с каждой из них по параллелям (окружностям), т. е. по графически простым линиям.

Фронтальные проекции линии пересечения сферы-посредника с конической поверхностью  $a''$  и линии пересечения сферы-посредника с цилиндрической поверхностью  $p''$  будут представлять собой отрезки прямых, так как оси вращения данных поверхностей параллельны плоскости проекций. Пересечение отрезков  $a''$  и  $p''$  определит точку  $3''$ , принадлежащую фронтальной проекции линии пересечения —  $\Gamma$ .

Для нахождения последующих точек необходимо воспользоваться другими сферами, концентричными со сферой  $u$ , т. е. сохраняя центр  $O$ , изменять радиус сферы  $R$ . Радиусы максимальной и минимальной сфер, пригодных для построения точек кривой  $\Gamma''$ , определяются из условия задачи. Согласно требованиям к посреднику, он должен пересекать обе заданные поверхности таким образом, чтобы полученные линии пересечения пересекались между собой. Крайний случай заключается в касании линий пересечения в точке, поэтому радиус максимальной сферы  $R_{\max}$  равен расстоянию от проекции центра  $O''$  до наиболее удаленной точки пересечения очерковых линий  $1''$ . Чтобы определить радиус наименьшей сферы  $R_{\min}$ , необходимо провести через точку  $O''$  нормали к очерковым линиям заданных поверхностей. Большой из отрезков этих нормалей и определит  $R_{\min}$ , так как соответствующая сфера будет касаться поверхности конуса и пересекать цилиндрическую поверхность  $p$ . Если в качестве  $R_{\min}$  взять отрезок нормали к очерковой линии цилиндра, то такая сфера поверхность конуса не пересечет. Таким образом, в

11

качестве минимальной выбирается сфера, радиус которой  $R_{\min}$  равняется наибольшему из отрезков нормалей к очерковым линиям пересекающихся поверхностей. В рассматриваемой задаче сфера  $u_1$  с радиусом  $R_{\min}$  касается конической поверхности по параллели  $a_4$  и пересекает

цилиндрическую поверхность по параллели  $B'$ . Пересечение проекций этих линий  $a''$  и  $B'$  определит точку  $4''$  кривой

Проекция других точек линии пересечения строятся при изменении радиуса сферы-посредника в пределах  $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$ .

Горизонтальные проекции точек линии пересечения находятся по принадлежности к одной из пересекающихся поверхностей с помощью параллелей. Например, чтобы найти горизонтальную проекцию точки  $3$ , следует сначала провести параллель  $a'$ , а затем на ней по линии проекционной связи определить положение точки  $3'$ .

При построении горизонтальной проекции линии пересечения  $l'$  особое внимание следует обратить на очерковую точку  $5$ . Она выделяется на чертеже своей фронтальной проекцией  $5''$  как точка пересечения проекции оси цилиндра и кривой  $B$  в пространстве точка  $5$  соответствует точке входа в тело конуса очерковой образующей цилиндра при построении вида сверху. Точка  $5'$  как проекция очерковой отделяет проекцию видимой части линии пересечения  $l'$  от невидимой. При построении вида сверху будет также невидимой часть окружности нижнего основания конуса, закрытая цилиндрической поверхностью (3).

Кривая  $l''$  является гиперболой. Построение центра гиперболы  $K$ , асимптот  $I, g$ , оси  $i$  и вершины — точки  $6''$  — будет рассмотрено в главе 7.

Таким образом, способ концентрических сфер можно применять для построения линии пересечения двух поверхностей вращения, оси которых пересекаются. Если по условию задачи общая плоскость симметрии, проходящая через оси вращения, непараллельна плоскости чертежа, то дополнительным проецированием или вращением следует преобразовать условие задачи таким образом, чтобы она стала параллельна плоскости чертежа.

## 5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Если одна из поверхностей является проецирующей, то ее вырожденная проекция включает проекцию линии пересече-

15

ния. Другие проекции этой линии определяются из условия принадлежности ее точек непроецирующей поверхности.

Пусть требуется построить линию пересечения  $l'$  конической поверхности  $a$  с фронтально-проецирующей цилиндрической поверхностью  $p$  (рис. 5.1). Естественно, фронтальная

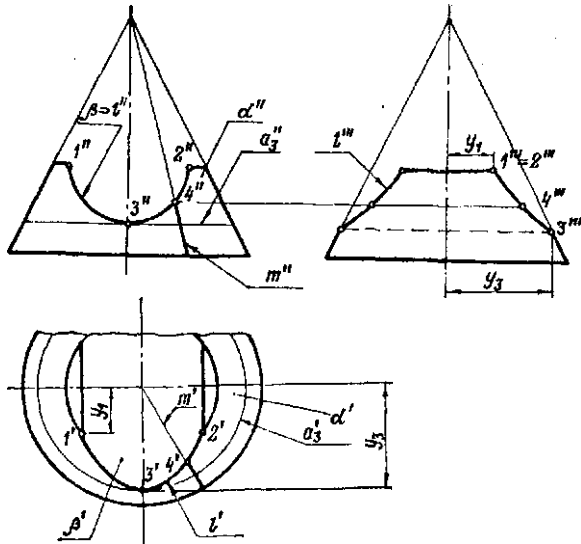


Рис. 5.1

проекция цилиндрической поверхности ( $\Gamma''$ ) является вырожденной и включает в себя проекцию линии пересечения —  $V''$ . Таким образом, кривая  $V''$  выделяется на чертеже из анализа условия задачи без вспомогательных построений. Для определения горизонтальной проекции линии пересечения —  $\Gamma'$  следует при помощи параллелей или меридианов конической поверхности построить горизонтальные проекции точек, выделенных на кривой  $V$ . Точки 1 и 2 — высшие точки линии пересечения; горизонтальные проекции  $1'$  и  $2'$  определяются по принадлежности к окружности верхнего основания конуса с помощью линий проекционной связи. Горизонтальная проекция нижней точки 3 строится с помощью параллели  $a_3$ . Точки 1, 2, 3 — опорные точки построения. Промежуточная точка линии пересечения 4 также выделена на кривой  $V''$

16

своей фронтальной проекцией  $4''$ . Горизонтальная проекция этой точки —  $4'$  построена с помощью меридиана  $t$ .

Таким образом, в данном случае построение проекций линии пересечения существенно упрощается, так как нет необходимости вводить поверхность-посредник. Для решения задачи достаточно использовать графически простые линии — параллели или меридианы — одной из пересекающихся поверхностей.



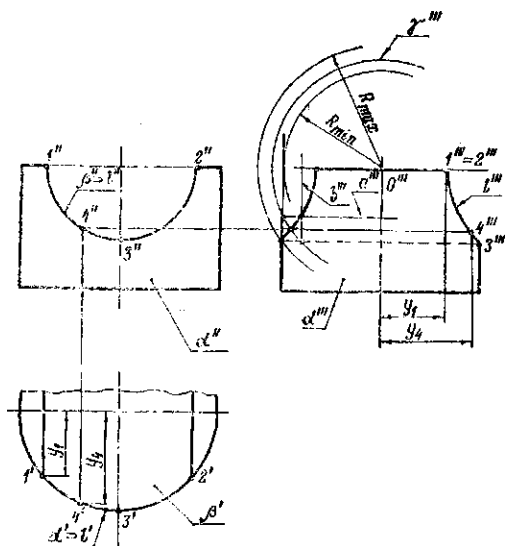


Рис. 5.3

нуса а, проекцию вершины гиперболы — точку касания  $3'''$  параллели наименьшего диаметра, и промежуточную точку  $4'''$ . Фронтальные проекции всех этих точек —  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  и  $4''$  определяются на фронтальных проекциях соответствующих параллелей линиями проекционной связи. Точно таким же образом строятся фронтальные проекции линий пересечения конуса с другими гранями шестигранника. Горизонтальные проекции кривых определяются проекциями выделенных точек, построенных по координатам.

Если пересекаются две проецирующие поверхности, то вырожденные проекции этих поверхностей определяют две проекции линии пересечения.

18

Пусть заданы проецирующие цилиндрические поверхности (рис. 5.3): а — горизонтально-проецирующая цилиндрическая поверхность; р — фронтально-проецирующая цилиндрическая поверхность.

Вырожденная горизонтальная проекция цилиндрической поверхности а' включает горизонтальную проекцию линии пересечения а вырожденная фронтальная проекция цилиндрической поверхности р'' включает фронтальную проекцию линии пересечения Г'. При выделении проекций линии пересечения необходимо помнить, что она находится в пределах наложенного изображения обеих пересекающихся поверхностей. В данной задаче кривые Г и Г' ограничиваются точками  $2'$  и  $1''$ ,  $2''$  соответственно. Профильная проекция линии пересечения V'' строится по точкам фронтальной Г' и горизонтальной V проекций.

Отметим, что кривая V'' может быть построена и с помощью концентрических сфер-посредников с центром в точке  $O'''$ . Согласно рис. 5.3, посредник у пересекает цилиндрическую поверхность а по параллели а, поверхность р — по параллели Ъ. Точка пересечения 5 проекций этих

параллелей принадлежит проекции линии пересечения — кривой. Изменяя радиус сферы в пределах от  $R_{\min}$  до  $R_{\max}$ , можно построить проекции остальных точек.

## 6. ТЕОРЕМА МОНЖА

Порядок линии пересечения равен произведению порядков пересекающихся поверхностей. В общем случае две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка. В некоторых частных случаях взаимного расположения поверхностей кривая четвертого порядка может распадаться на более простые кривые низших порядков. В пределах ограниченного круга рассматриваемых поверхностей особый интерес представляет случай распада-ния линии пересечения на пару плоских кривых второго порядка.

Теорема Монжа. Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания.

Пусть пересекающиеся конусы аир описаны около сферы (рис. 6.1).

Поверхность  $\alpha$  касается сферы у по окружности, фронтальной проекцией которой является отрезок  $a''$ ,



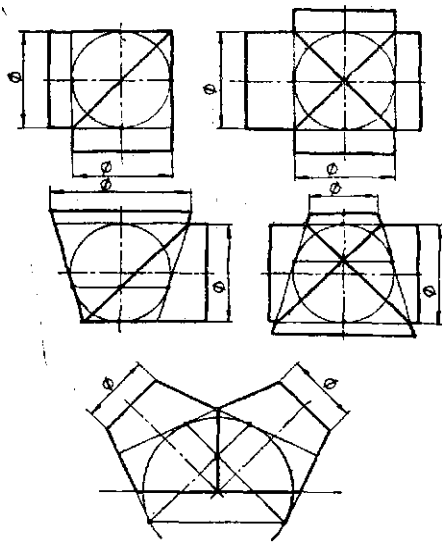


Рис. 6.2

окружность касания поверхности  $p$  проецируется отрезком  $B''$ . Точки пересечения этих окружностей  $M$  и  $N$  являются точками касания поверхностей  $a$  и  $p$  и принадлежат линии пересечения. Общие очерковые точки конусов 1, 2, 3, 4 также принадлежат линии пересечения. Согласно теореме, плоскости искомых кривых второго порядка проходят через фронтально-проецирующую прямую ( $MN$ ), т. е. также являются фронтально-проецирующими. Таким образом, кривые будут иметь вырожденные проекции в виде отрезков прямых  $[Г—2']$  и  $[3''—4'']$  на фронтальной плоскости проекций.

В рассматриваемом случае линия пересечения двух конических поверхностей, описанных около общей сферы, распадается на эллипс (кривая  $U$ ) и параболу (кривая  $k$ ). На других изображениях проекции кривых строятся по принадлежности к одной из пересекающихся поверхностей, т. е. с помощью каркасных линий этой поверхности. Теорема позволяет строить проекции кривых второго порядка по точкам пересечения очерковых линий заданных поверхностей там, где общая плоскость симметрии параллельна плоскости чертежа.

Плоские кривые пересечения поверхностей второго порядка часто встречаются в технике при конструировании переходов цилиндрических и конических труб с пересекающимися осями. Различные примеры таких переходов представлены на рис. 6.2.

## 7. ПРОЕКЦИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБЩЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ СИММЕТРИИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИИ

Для облегчения и контроля точности построения кривой, которая является проекцией пространственной линии пересечения поверхностей, можно использовать следующую теорему:

Если пересекающиеся поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на параллельную ей плоскость проекций кривой второго порядка.

Теоретические исследования показывают:

1. Проекцией линии пересечения цилиндрической и конической поверхностей с пересекающимися осями будет гипербола. При пересечении двух цилиндрических поверхностей

18

или двух конических с равными углами при вершине гипербола будет равноугольной, т. е. асимптоты гиперболы будут пересекаться под прямым углом.

2. Центр гиперболы находится в точке пересечения проекций линий касания концентрических сфер, вписанных в заданные поверхности. Центром сфер является точка пересечения осей.

3. Направление асимптот гиперболы не меняется при изменении диаметров цилиндрической поверхности и при перемещении конической поверхности вдоль оси.

4. Проекцией линии пересечения цилиндрических и конических поверхностей с параллельно расположенными осями будет парабола.

5. Линия пересечения сферы с цилиндрической или конической поверхностью всегда проецируется параболой, за исключением случая, когда центр сферы расположен на оси цилиндра или конуса (соосные поверхности).

Определение вида строящейся на чертеже линии (гипербола, парабола) и ее характерных параметров (центр, асимптоты и вершина гиперболы; вершина параболы позволяет строить точки, используя осевую и центральную симметрию кривой).

Пример 1. На рис. 7.1 представлены две конические поверхности с пересекающимися осями. Общая плоскость симметрии, проходящая через оси, параллельна плоскости проекции. Линии  $1''$  и  $1'''$  согласно теореме — гиперболы. Точки пересечения очерковых линий  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  — опорные

точки кривых. Промежуточные точки могут быть построены способом посредников-сфер.

Отрезки  $a''$  и  $b''$  — проекции линий касания сфер, вписанных в заданные коические поверхности. Точка пересечения этих отрезков  $K$  — центр гиперболы.

Если конус с горизонтально расположенной осью переместить влево вдоль оси на такое расстояние, чтобы оба конуса оказались описанными около одной сферы, то, по теореме Монжа, линия пересечения конусов в этом положении будет проецироваться двумя пересекающимися отрезками прямых. На рис. 7.1 штрихпунктирными линиями показаны очерковые линии конуса после перемещения. Тогда отрезки  $[AB]$  и  $[CD]$ , также изображенные штрихпунктирной линией, будут проекциями соответствующих линий пересечения. Так как направление (но не положение) асимптот не меняется при перемещении конуса вдоль оси, то прямые  $fug$ ,

22

проведенные из точки  $K$  параллельно построенным отрезкам  $[AB]$  и  $[CD]$ , будут асимптотами гипербол  $1''$  и  $1''z$ . Ось гипербол  $i$  — биссектриса угла между асимптотами  $f$  и  $g$ . В данной задаче она совпадает с линией касания  $a''$ . Вершины гипербол  $5''$  и  $6''$  могут быть построены с помощью сферы-посредника, вписанной в конус с вертикальной осью.

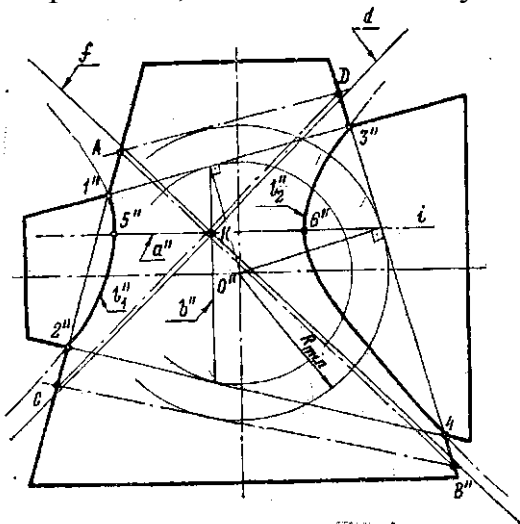


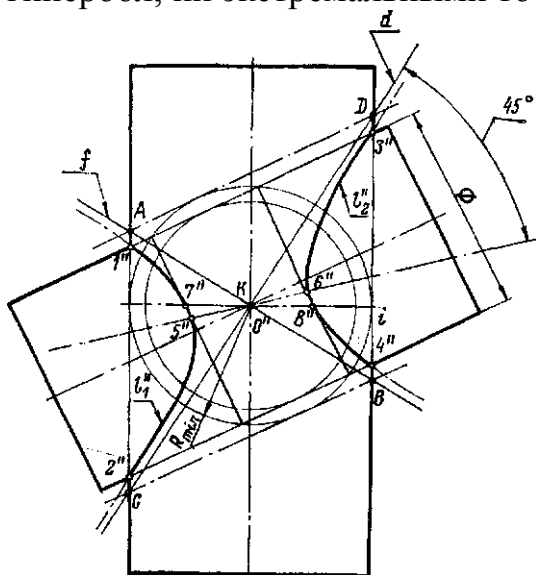
Рис. 7.1

Пример 2. Линии пересечения двух цилиндрических поверхностей с пересекающимися осями (рис. 7.2) проецируются гиперболами  $1''$  и  $1''z$ . Они могут быть построены способом концентрических сфер-посредников. Опорными будут точки пересечения очерковых линий  $2''$ ,  $3''$  и  $4''$ . Центр гипербол  $K$  в данном случае находится в точке пересечения проекций осей цилиндров  $O''$ . Чтобы определить направление асимптот, увеличим диаметр наклонно расположенного цилиндра так, чтобы он имел общую

вписанную сферу с вертикальным цилиндром. Тогда через точки пересечения очерковых линий А, В, С и D пройдут асимптоты  $g'$  и  $ft$ . Ось гипербол  $i$  расположена под углом в  $45^\circ$  к асимптотам, так как при пересечении цилиндрических поверхностей асимптоты всегда ортогональны. Вершины гипербол — точки  $5''$  и  $6''$ , естественно, находятся на оси  $i$ . В данной задаче они опре

20

деляются последовательным построением ряда промежуточных точек кривых  $1''$  и  $1''$  в области оси  $i$ . Как видно по чертежу, точки  $7''$  и  $8''$ , построенные с помощью сферы-посредника радиусом  $R_{\min}$ , в случае пересечения цилиндров с наклонными осями не являются ни вершинами гипербол, ни экстремальными точками.



0

Рис 7.2

Пример 3. Если оси двух цилиндрических поверхностей пересекаются под прямым углом (рис. 7.3), то вершины гипербол  $1''$  и  $1''г$  будут находиться на оси цилиндра с меньшим диаметром. Соответствующие точки  $5''$  и  $6''$  построены с помощью сферы-посредника радиусом  $R_{\min}$ . Точки А, В, С и D, через которые проходят асимптоты  $fug$ , определены так же, как и в предыдущем примере. Центр гиперболы К — в точке пересечения проекций осей цилиндров  $O''$ . На рис. 7.3 показано построение промежуточных точек гипербол  $7''$ ,  $8''$ ,  $9''$ ,  $10''$  с помощью сферы-посредника  $u$ . Линии  $a''$  и  $б''$  — проекции параллелей, по которым посредник пересекает заданные цилиндрические поверхности.

20

Пример 4. Пересечение конической и цилиндрической поверхностей с наклонно расположенными осями было рассмотрено в главе 4 (рис. 4.3). Отрезок  $a''$  — проекция линии касания сферы  $u$  и вписанной в коническую

поверхность,  $B''Г$  — проекция линии касания сферы  $72$ . вписанной в цилиндричес-

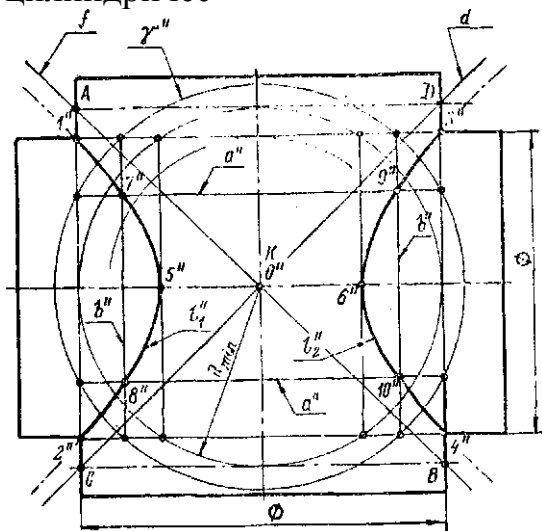


Рис. 7.3

кую поверхность. Точка пересечения этих линий  $K$  — центр гиперболы. Центр обеих вписанных сфер находится в точке пересечения осей  $O''$ . Если увеличить диаметр цилиндра до касания сферы  $u_1$ , то очерковые линии (на рис. 4.3 проведены штрихпунктирными) такой цилиндрической поверхности пересекутся с очерковыми линиями конуса в точках  $A, B, C, D$ , через которые пройдут асимптоты  $f$  и  $g$ . Если угол между асимптотами равен  $2\sigma$ , то ось гиперболы расположена к ним под углом  $\sigma$ . Вершина гиперболы — точка  $6''$  строится последовательным приближением точек кривой  $Г''$  к оси гиперболы.

Пример 5. Пространственная линия пересечения конической и цилиндрической поверхностей с параллельными осями проецируется в виде параболы  $Г''$  (рис. 7.4). Опорные точки  $1''$  и  $2''$  определяются пересечением очерков заданных поверх-

Рис. 7.4

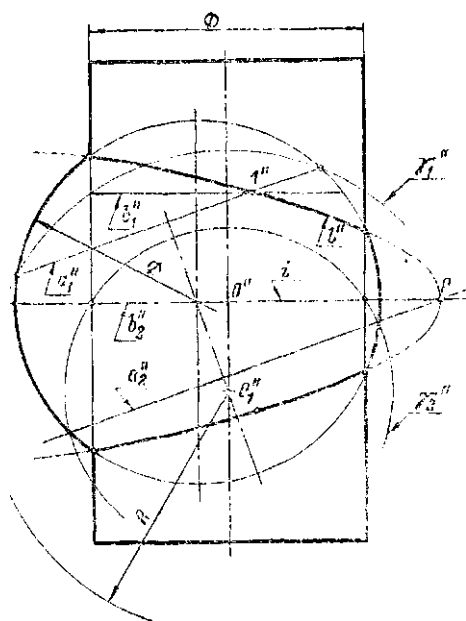


Рис. 7.5

ностей. Промежуточные точки могут быть построены способом вспомогательных секущих плоскостей. Так, полуокружности  $a'$  и  $b'$  — наложенные горизонтальные проекции линий пересечения посредника  $u$  (горизонтальная плоскость уровня) соответственно с конической и цилиндрической поверхностями. Точка пересечения этих линий  $3'$  определяет фронтальную проекцию точки, принадлежащей линии пересечения,  $3''$  на уровне секущей плоскости. Для более точного построения кривой  $\Gamma''$  необходимо применить ряд плоскостей-посредников. Вершина параболы  $P$  находится на уровне вершины конуса и, таким образом, кривая  $\Gamma''$  своей выпуклой стороной всегда расположена к основанию конуса.

Пример 6. Если пересекающиеся сферическая и цилиндрическая поверхности заданы только одним изображением, когда общая плоскость симметрии, проходящая через оси, расположена параллельно плоскости проекции (рис. 7.5), то проекцию линии пересечения удобно строить способом сфер-посредников. Центр посредников может быть расположен в любой точке на оси цилиндра. Действительно, сфера имеет бесчисленное

множество осей, и прямая, проходящая через центр заданной сферы и произвольную точку  $O_1$  также может быть ее осью. Посредник  $Y_1$  с центром в точке  $O$  пересекает заданную сферу по параллели  $a_1$  и цилиндр — по параллели  $b_1$ . Проекция точки пересечения этих параллелей — точка  $1''$  — принадлежит проекции линии пересечения  $l$ . Изменяя величину радиуса сферы-посредника, можно построить необходимое количество точек кривой  $l''$ , которая, согласно теории, должна быть параболой. В данной задаче вершина параболы расположена за пределами изображения пересекающихся поверхностей, поэтому проекциями линий пересечения будут симметрично расположенные дуги ветвей параболы. Ось параболы  $i$  совпадает с горизонтальной осью заданной сферы, а вершина  $P$  находится на этой оси. Чтобы найти ее, нужно воспользоваться посредником  $u_2$ , который пересечет цилиндр по параллели  $b_2$ , проекция которой  $b''$  будет лежать на оси параболы. Заданная сфера пересечется по параллели  $a_2$ . Точка пересечения линии  $a_2$  и оси параболы  $i$  определит ее вершину  $P$ . Если по условию задачи очерковые линии сферы и цилиндра имеют только две общие точки  $1''$  и  $2''$ , как это представлено на рис. 7.6, то вершина параболы  $P$  находится в поле изображения пересекающихся поверхностей. В этом

23

случае центром сфер-посредников может быть выбрана точка  $O$ , а вершина параболы определяется с помощью сфер-посредника  $u$  радиусом  $R_{min}$ . На рис. 7.6 показано, что при использовании сферы-посредника  $u_1$  с центром в произволь-

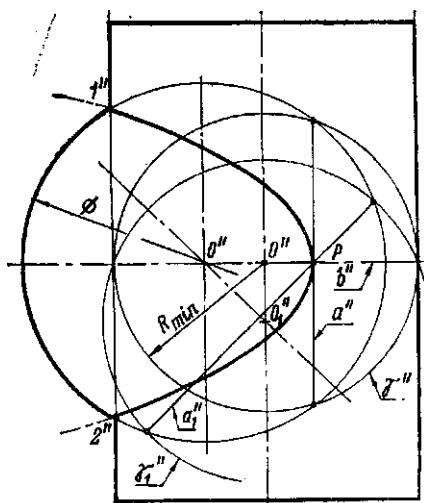


Рис. 7.6

ной точке  $O_1$  на оси цилиндра проекции соответствующих линий пересечения  $a_1$  и  $b_1$  пересекутся также в точке  $P$ .

## Контрольные вопросы по теме «Пересечение поверхностей»

1. Что называется поверхностью – посредником?
2. Когда применяется посредник?
3. Какие требования предъявляются к посреднику?
4. Каков общий порядок построения проекций линии пересечения с помощью посредника?
5. Какие поверхности применяются в качестве посредника?
6. Когда применяется посредник – плоскость?
7. Какие поверхности называются соосными?
8. Как пересекаются соосные поверхности?
9. Когда применяется посредник – сфера?
10. Как определяются пределы изменения радиуса сферы – посредника?
11. Какие преимущества имеет способ сфер – посредников?
12. В каком случае для построения проекции линии пересечения достаточно воспользоваться каркасными линиями?
13. Когда проекция линии пересечения может быть построена координатным способом?
14. Как определяется видимость линии пересечения?
15. Как определяется видимость очерков пересекающихся поверхностей?
16. Когда проекция линии пересечения может быть построена по теореме Монжа?
17. В виде каких кривых могут быть проекции линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии, параллельной плоскости чертежа?

## ЛИТЕРАТУРА

### Рекомендуемая

1. Фролов С. А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение. 1983. С. 126—165.

### Использованная

2. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1973. С. 222—265.

3. Глазунов Е. А. О проекции линии пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии. В сб. «Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике». М.: «Советская наука», 1958. С. 35—64.

## СОДЕРЖАНИЕ



1. Введение ,....., ..... 3
2. Пересечение поверхностей в общем случае..... 6
3. Способ вспомогательных секущих плоскостей..... 8
4. Способ концентрических сфер..... 11
5. Частные случаи пересечения поверхностей..... 15
6. Теорема Монжа..... 19
7. Проекция линии пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии, параллельной плоскости проекции 21
8. Вопросы для повторения..... 28
9. Литература.