

УДК  
744  
У 912

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»

---

Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ  
по курсу  
ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

ПОВЕРХНОСТИ И РАЗВЕРТКИ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

УДК  
744  
У 912

*Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»*

*Подготовлено на кафедре инженерной графики*

Рецензенты: докт. техн. наук, проф. В.М. Матюнин (НИУ «МЭИ»),  
докт. техн. наук, проф. Т.В. Богомолова (НИУ «МЭИ»),  
канд. техн. наук, доц. О.А. Кутышкина  
(МГУП имени Ивана Фёдорова)

Авторы: Е.П. Касаткина, И.В. Гордеева, Л.Г. Головина, Е.А. Капитанова,  
В.Н. Нетунаева, Т.А. Полтавцева, Ю.В. Степанов

**Поверхности** и развертки. Пересечение поверхностей: учебное пособие / Касаткина Е.П., Гордеева И.В. и др. – М.: Издательство МЭИ, 2017. – 78 с.

Учебное пособие является переработанным и дополненным изданием ранее созданных на кафедре инженерной графики МЭИ пособий «Поверхности и развёртки» и «Пересечение поверхностей».

Учебное пособие содержит теоретический материал по темам: поверхности, развертки и пересечение поверхностей; задачи для решения на практических занятиях и для самостоятельного решения, а также вопросы для контроля усвоения изложенного материала.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса, изучающих раздел «Теория построения чертежа» в рамках дисциплин «Начертательная геометрия», «Инженерная графика» и др., обучающихся по всем направлениям подготовки НИУ «МЭИ».

## 1. ПОВЕРХНОСТИ

### 1.1. Способы образования поверхностей. Каркас поверхности

Технические объекты любой формы можно разделить на различные геометрические тела, границами которых являются *поверхности*. Поэтому, выполняя комплексные чертежи различных технических объектов (деталей, сборочных единиц и т.д.) необходимо знать способы образования поверхностей и их изображения на чертеже.

Наиболее широкое применение в инженерной практике получил *кинематический* способ образования поверхностей (от греческого слова *kinema* – движение). В этом случае поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений некоторой линии, называемой образующей  $l_n$ , непрерывно перемещающейся в пространстве вдоль другой линии – направляющей  $q_n$  по определенному закону. Такие поверхности называются *кинематическими* (рис. 1.1).

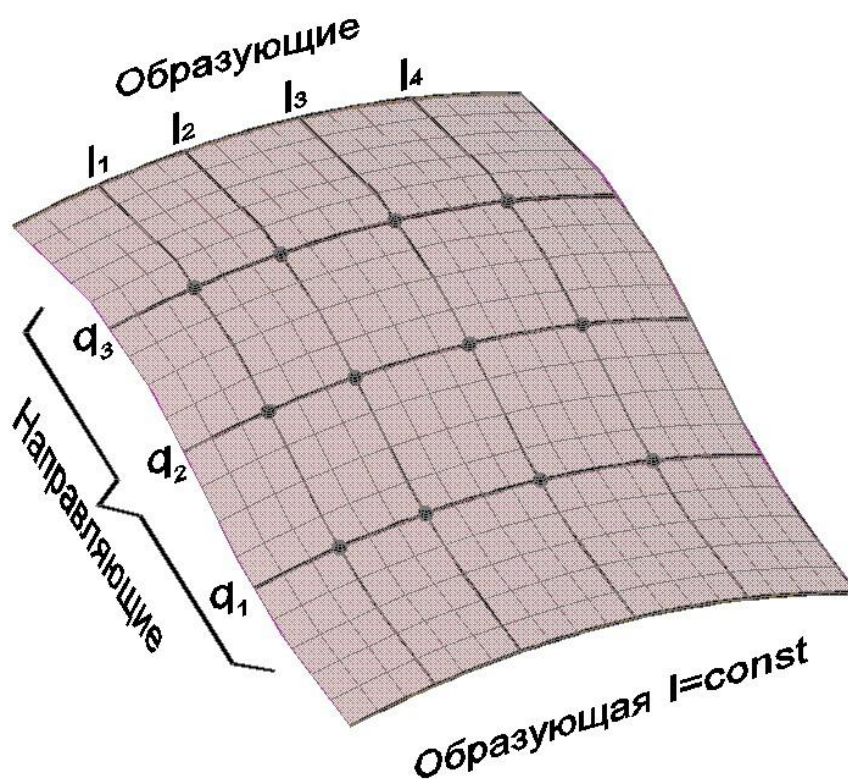


Рис. 1.1. Каркас кинематической поверхности

Некоторые поверхности образуются движением линий постоянной формы, которые конгруэнтны друг другу (поверхности с постоянной образующей), другие же так, что образующая вместе с изменением

положения в пространстве изменяет и свою форму (поверхности с переменной образующей) (рис. 1.2).

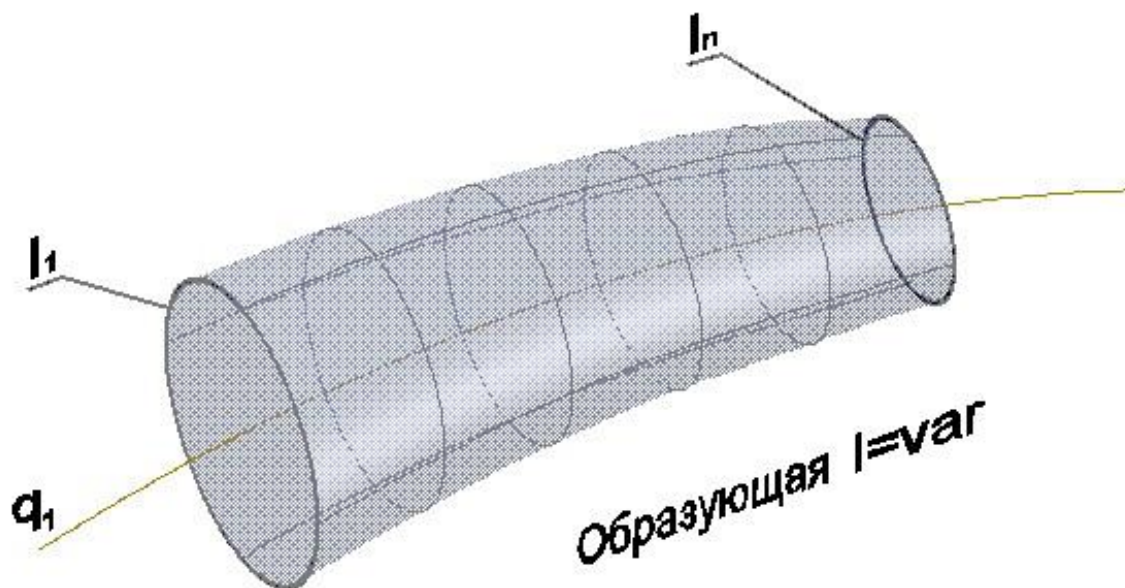


Рис. 1.2. Поверхность с переменной образующей (циклическая поверхность)

На кинематических поверхностях можно выделить семейство направляющих  $l_n$  и семейство образующих  $q_n$ .

Множество точек или линий, принадлежащих поверхности и объединенных каким-либо общим признаком, называется ее каркасом (точечным или линейным).

Следовательно, каждая кинематическая поверхность имеет два каркаса: направляющих и образующих. Эти каркасы образуют каркасную сеть.

Если множество точек или линий, определяющих поверхность, непрерывно, то каркас называется *непрерывным*. В противном случае он называется *дискретным*. В первом случае через любую точку поверхности можно провести линию каркаса (для кинематических поверхностей две линии: образующую и направляющую). Следовательно, непрерывный каркас определяет единственную поверхность. Во втором случае каркас состоит из конечного числа линий или точек, и могут существовать поверхности с одним и тем же *дискретным* каркасом, отличающиеся друг от друга.

## 1.2. Способы задания поверхностей

### *а) Аналитический способ задания поверхностей*

В этом случае поверхность рассматривается как непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида  $F(x, y, z) = 0$ , где  $F$  – многочлен.

Для алгебраических поверхностей существует понятие «порядок». Если поверхность определяется уравнением  $n$ -й степени, то она называется алгебраической поверхностью  $n$ -го порядка. Порядок поверхности также соответствует числу точек пересечения поверхности с прямой линией.

В частности, плоскость определяется уравнением первой степени и является поверхностью первого порядка.

Поверхность  $n$ -го порядка можно определить как поверхность, пересекающуюся с произвольной плоскостью по кривой того же порядка.

### *б) Графические способы задания поверхностей. Определитель поверхности*

Для построения изображений поверхности на чертеже необходимо выяснить, проекции каких элементов надо задать для того, чтобы получить обратимый чертеж этой поверхности, т.е. такой чертеж, по которому можно реконструировать объект.

Поверхность считается заданной на чертеже, если относительно любой точки пространства однозначно решается вопрос о ее принадлежности данной поверхности.

Или же можно сказать, что поверхность считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей данной поверхности, можно построить ее вторую проекцию.

*Сложные* поверхности технических объектов (самолетов, кораблей, автомобилей), детали сложной формы (лопатки турбин, компрессоров), имеющие образующие переменной формы, задаются *дискретным* каркасом линий или точек. Такие поверхности называются *каркасными*. Они задаются на чертеже проекциями элементов каркаса. Точность задания поверхности в этом случае зависит от плотности каркаса.

Для задания на чертеже *кинематических* поверхностей вводится понятие: *определитель поверхности*.

*Совокупность всех условий, определяющих поверхность, называется определителем поверхности.*

Определитель поверхности включает в себя:

– геометрическую часть, т.е. геометрические элементы поверхности;

– алгоритмическую часть, т.е. соотношение между ними (взаиморасположение элементов, условие перемещения одного элемента относительно другого, закон изменения образующей – для поверхностей с переменной образующей и т.д.). Соотношение элементов может быть задано аналитически, в словесной форме, чертежом.

Одна и та же поверхность может иметь несколько различных *определителей*. Выбирают тот из них, который по каким-либо признакам удобнее в каждом конкретном случае.

Например, поверхность прямого кругового цилиндра может быть образована вращением прямолинейной образующей  $l$  вокруг параллельной ей оси  $i$ . Но эта же поверхность может быть образована перемещением окружности постоянного радиуса вдоль прямой линии (оси  $i$ ) таким образом, что ее центр всегда принадлежит оси (рис. 1.3, *а*, *б*).

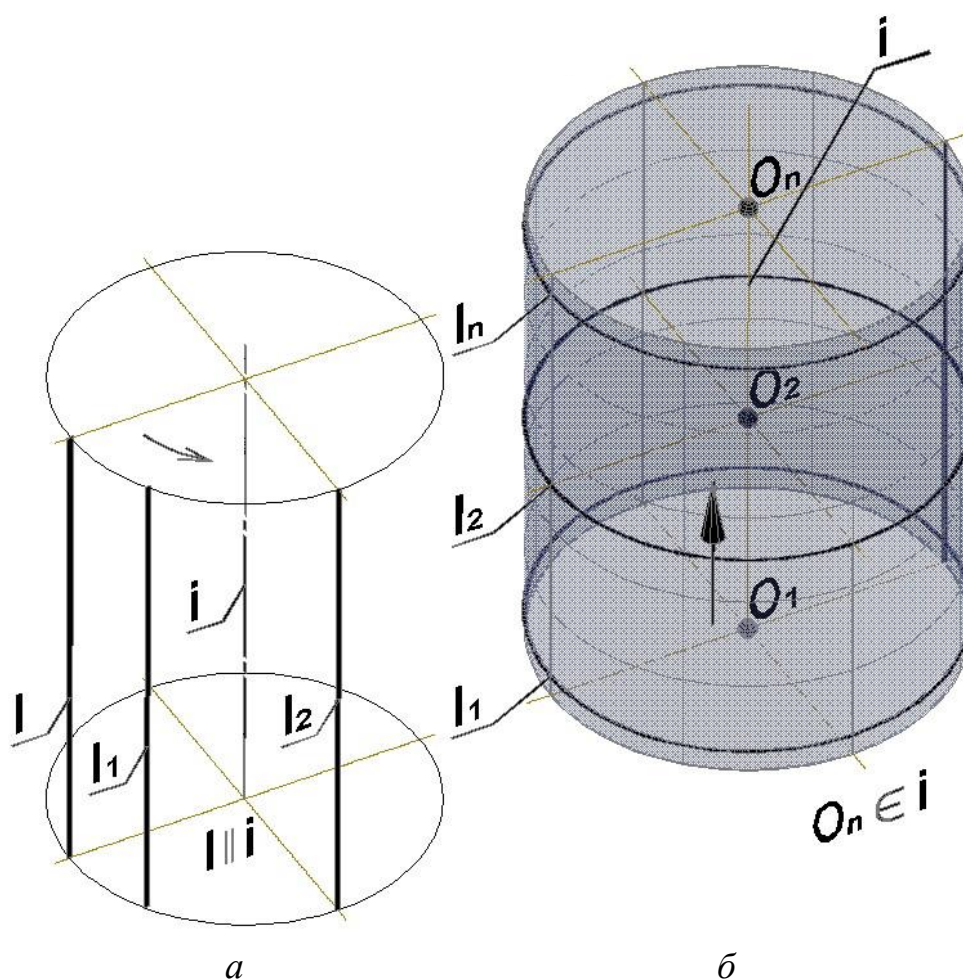


Рис. 1.3. Определители прямого кругового цилиндра:  
*а* – образующая прямая; *б* – образующая окружность

Изобразить поверхность можно проекциями геометрической части ее определителя. Такое изображение обеспечивает обратимость чертежа,



но не является наглядным и затрудняет чтение чертежа. Поэтому для получения наглядного изображения поверхности на чертеже следует показывать очерк (очертание) этой поверхности.

*Проекция контура видимости поверхности при ее проецировании по заданному направлению, называется очерком.*

Так, например, очерк прямого кругового цилиндра, ось которого перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций, на виде спереди ограничен проекциями крайних образующих (представляет прямоугольник), а на виде сверху – проекцией основания (представляет окружность).

### 1.3. Классификация поверхностей

Многообразие форм поверхностей создает большие трудности при их изучении. Для облегчения процесса изучения поверхностей целесообразно осуществить их систематизацию.

*Кинематические поверхности* систематизируются по форме образующей и закону ее перемещения в пространстве.

По форме образующей различают поверхности:

- 1) линейчатые (образующая – прямая линия);
- 2) нелinearчатые (образующая – кривая линия).

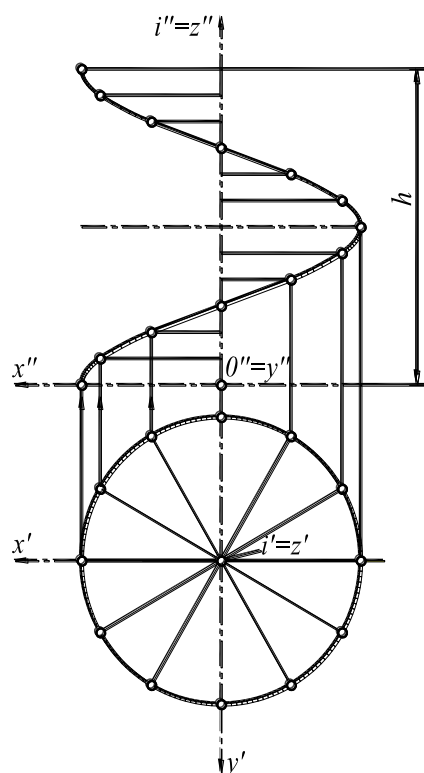


Рис. 1.4. Образование винтовой поверхности

По закону перемещения образующей различают:

- 1) *поверхности вращения* – поверхности, образованные вращением образующей  $l$  вокруг оси  $i$ ;
- 2) *циклические поверхности* – поверхности, образованные движением окружности в пространстве (рис. 1.2);
- 3) *винтовые поверхности* – поверхности, образованные винтовым перемещением образующей  $l$  (рис. 1.4). Винтовое перемещение состоит из вращения вокруг оси  $i$  и продольного перемещения вдоль нее.

Следовательно, для линейчатых и циклических поверхностей характерно постоянство формы образующей и разнообразие законов ее движения. Для поверхностей вращения – постоянство закона движения и разнообразие форм образующих.

Очевидно, что некоторые поверхности могут быть отнесены одновременно к различным типам. Например, поверхность прямого кругового цилиндра является линейчатой поверхностью и поверхностью вращения.

## 1.4. Определители геометрических поверхностей

### 1.4.1. Определители граничных поверхностей

*Гранные поверхности* – это поверхности, ограниченные плоскими фигурами – многоугольниками. *Плоскость* – это простейшая поверхность. Ее определителем являются три несовпадающие точки (рис. 1.5).

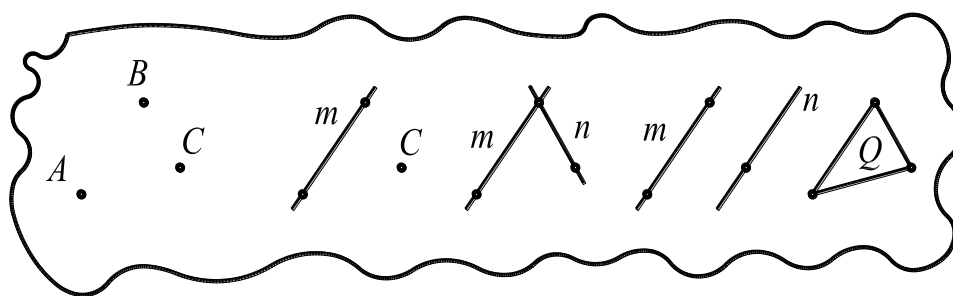


Рис. 1.5. Графическое представление определителя плоскости

Плоские фигуры называются *гранями*, а линии их пересечения – *ребрами*. Ребра пересекаются в точках, называемых *вершинами*.

Гранный поверхность называется *выпуклой*, если она целиком лежит по одну сторону от плоскости любой своей грани.

Практический интерес представляют *призматические* и *пирамидальные* поверхности.

Направляющей этих поверхностей является ломаная линия  $q$ , образующей – прямая линия  $l$ , т.е. геометрическая часть определителя у них одинаковая. Отличаются они условиями перемещения образующей, т.е. алгоритмической частью.

В случае образования призматической поверхности образующая остается параллельна сама себе, а в случае образования пирамидальной поверхности образующая должна все время проходить через точку  $S$ , называемую вершиной пирамиды (рис. 1.6, 1.7). Пирамидальная поверхность является *двухполостной*.



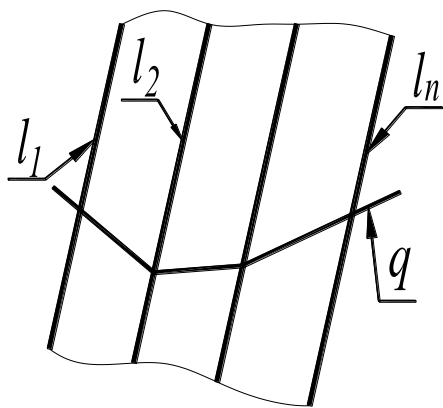


Рис. 1.6. Определитель призмы

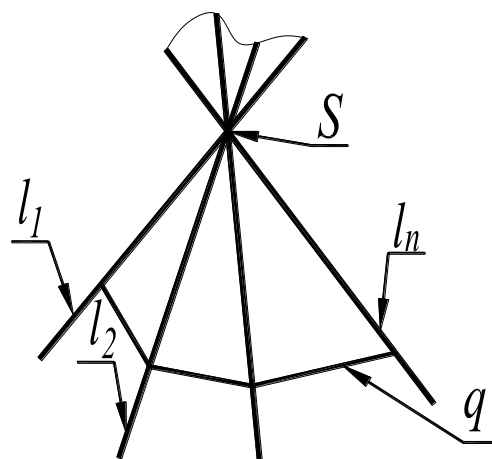


Рис. 1.7. Определитель пирамиды

Если расечь пирамидальную поверхность с замкнутой направляющей  $q$  плоскостью, не проходящей через вершину, то часть пространства, ограниченная плоскостью (основанием) и поверхностью, называется *пирамидой*. Если расечь двумя плоскостями, то получится усеченная пирамида.

Иначе, пирамидой называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из некоторого числа плоских треугольников – боковых граней и одного плоского многоугольника – основания.

Если расечь призматическую поверхность с замкнутой направляющей  $q$  двумя плоскостями, не параллельными образующей, то часть пространства, расположенная между секущими плоскостями внутри поверхности, называется геометрическим телом – *призмой*. Ее боковая поверхность состоит из параллелограммов или прямоугольников, по числу которых призма называется трех-, – четырехгранной и т. д. Основания призмы – плоские многоугольники с числом сторон, равным числу боковых граней.

На практике редко изображают призматическую и пирамидальную поверхности, обычно изображают призмы и пирамиды, т.е. геометрические тела.

Если ребра призмы перпендикулярны основанию, она называется *прямой призмой*. Такая призма занимает *проецирующее* положение и одной из ее проекций будет направляющая  $q$ . Эта проекция обладает «собирательным» свойством, т.к. она «собирает» на себя проекции всех точек и линий, принадлежащих поверхности призмы.

*Пирамида* называется *прямой*, если ее высота проецируется в центр основания (точку пересечения медиан, если пирамида трехгранная; если четырехгранная, то в точку пересечения диагоналей).

### 1.4.2. Построение проекций точек, принадлежащих поверхности гранного тела

Для построения недостающей проекции точки, принадлежащей гранной поверхности, можно использовать прямые линии частного и общего положения, принадлежащие граням поверхности и проходящие через заданную проекцию точки (условие принадлежности точки плоскости: точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо линии плоскости).

Пусть задана пирамида двумя своими изображениями – видом спереди и видом сверху. На боковой грани дана фронтальная проекция точки  $l''$ . Построить вторую проекцию этой точки  $l'$  (рис. 1.8).

Для решения этой задачи через проекцию точки  $l''$  проведем вспомогательную прямую  $a$ , принадлежащую поверхности и проходящую через проекцию вершины  $S''$ . Построим горизонтальную проекцию прямой  $a$  и с помощью линии проекционной связи найдем горизонтальную проекцию точки  $l'$ .

### 1.4.3. Поверхности вращения общего вида

Поверхностью вращения общего вида называется поверхность, образованная произвольной кривой (образующей  $l$ ) (рис.1.9) при ее вращении вокруг неподвижной оси  $i$ . Следовательно, геометрическая часть определителя включает в себя образующую  $l$  и ось вращения  $i$ .

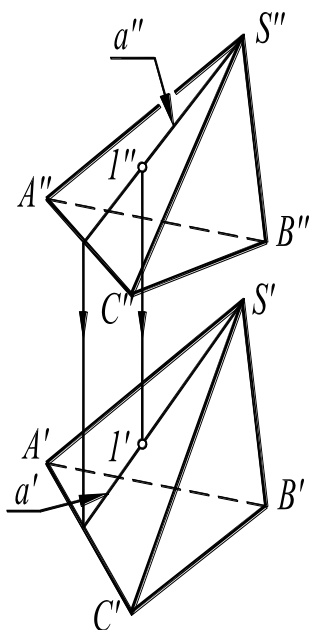


Рис. 1.8. Построение проекции точки

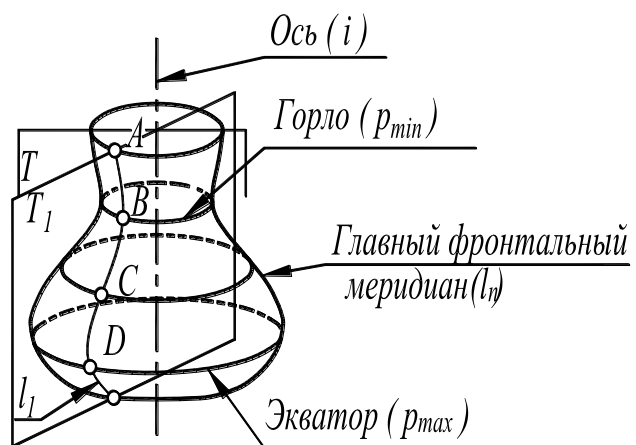


Рис. 1.9. Каркасные линии на поверхности вращения

Каждая точка образующей ( $A, B, C, D$ ) при вращении вокруг оси  $i$  описывает окружность с центром на оси. Эти окружности (различных или одинаковых диаметров) называются *параллелями* поверхности ( $p$ ).

Наименьшая параллель называется *горлом* ( $p_{\min}$ ), наибольшая параллель – *экватором* ( $p_{\max}$ ). Поверхность вращения в зависимости от формы образующей может иметь несколько линий типа «горло» и несколько экваторов или не иметь ни одного горла и ни одного экватора. Так как образующая состоит из бесконечного числа точек, то параллели образуют *непрерывный каркас*.

Плоскости, проходящие через ось вращения, называются *меридиональными* ( $T, T_1$ ). Линии их пересечения с поверхностью называются *меридианами* ( $l$ ).

Меридиональная плоскость  $T$  параллельная фронтальной плоскости проекций  $F$ , называется *главной меридиональной* плоскостью, а линия ее пересечения с поверхностью вращения – *главным фронтальным меридианом*. Он проецируется в истинную величину и определяет очерк поверхности на виде спереди. *Главный фронтальный меридиан* является границей видимости для вида спереди, т.е. делит поверхность вращения на переднюю (видимую) и заднюю (невидимую) части. Соответственно, если меридиональная плоскость будет параллельна профильной плоскости проекций, то при пересечении с поверхностью вращения получим *главный профильный меридиан*, который будет границей видимости для вида слева. Через ось вращения можно провести бесчисленное множество меридиональных плоскостей, т.е. получить бесчисленное множество меридианов. Следовательно, *меридианы* также образуют *непрерывный каркас* поверхности вращения.

Параллели и меридианы (образующие) образуют непрерывную каркасную сеть поверхности вращения, т.е. *через каждую точку поверхности можно провести две каркасные линии – параллель и меридиан (образующую)*.

При задании поверхности вращения на чертеже изображают проекции оси вращения  $i$ , фронтальную проекцию *главного меридиана* и горизонтальную проекцию *экватора и горла* (если ось  $i$  перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций).

#### **1.4.4. Определители элементарных поверхностей вращения**

1. *Цилиндрическая поверхность* – это линейчатая поверхность вращения, у которой все образующие  $l$  параллельны оси вращения  $i$ .

Геометрическая часть определителя цилиндрической поверхности:  $\Phi = \{l, i, R\}$ , алгоритмическая часть определителя:  $l_1 \parallel l_2 \parallel \dots \parallel l_n \parallel i$  (рис. 1.10, а).

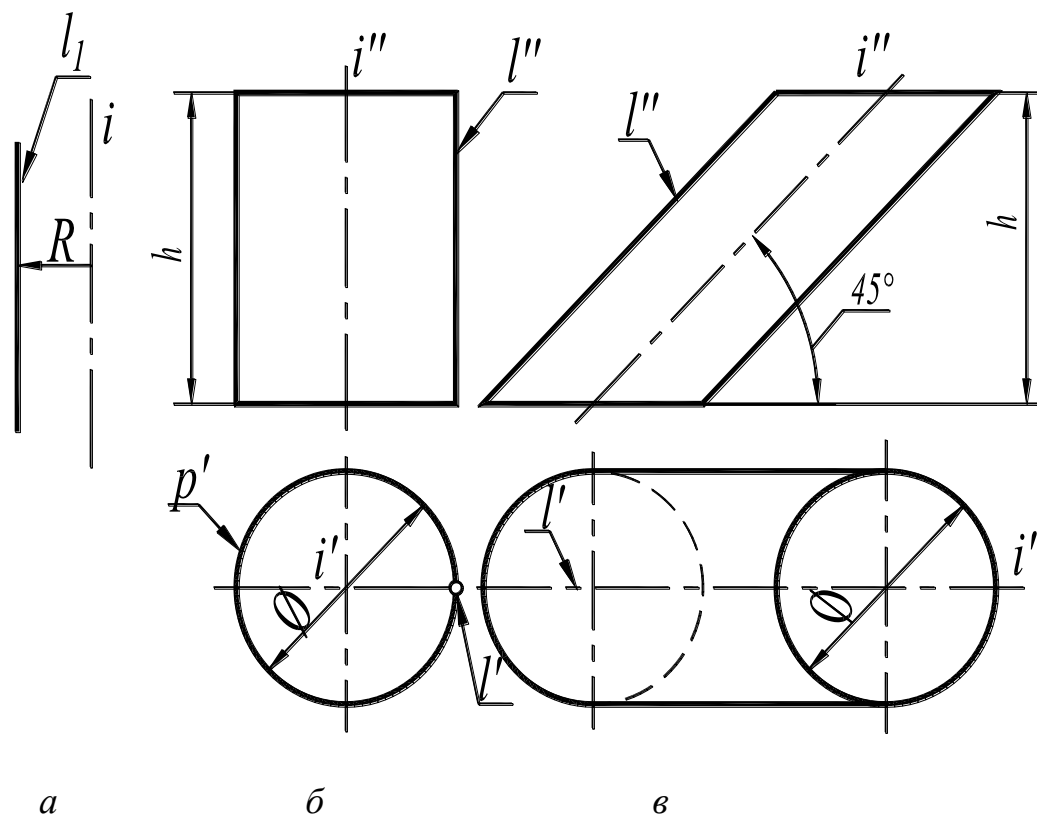


Рис. 1.10. Изображения цилиндров:  
*a* – графическая часть определителя цилиндра; *б* – прямой круговой цилиндр; *в* – наклонный цилиндр

В общем случае цилиндрическая поверхность считается бесконечной вдоль оси  $i$ .

Если рассечь цилиндрическую поверхность двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси, то часть пространства, расположенная внутри поверхности между секущими плоскостями (которые называются основаниями) будет называться *цилиндром* и являться геометрическим телом. На чертеже цилиндр изображается проекциями главного меридиана  $l$  и параллели  $p$ .

Если ось вращения цилиндра перпендикулярна плоскости проекций, то цилиндр называется *прямым круговым*. Такой цилиндр является *проецирующим*, т.к. на одну из плоскостей проекций вся поверхность цилиндра проецируется в линию – окружность (рис. 1.10, *б*). Если ось  $i$  не перпендикулярна плоскости проекций, то цилиндр называется *наклонным* (рис.1.10, *в*).

Параметрами, определяющими размеры цилиндра, являются его высота  $h$  (длина образующей  $l$ ) и диаметр параллели  $p$ . Для наклонного цилиндра добавляется угол наклона оси вращения  $i$  к плоскости проекций.

2. *Коническая поверхность* – это линейчатая поверхность вращения, у которой все образующие  $l_i$  пересекают ось вращения в одной точке –  $S$ .

Образующая  $l$  – прямая линия, которая при вращении вокруг оси все время проходит через точку  $S$ , лежащую на оси.

Геометрическая часть:  $\Phi = \{i, l, \alpha, S\}$ , алгоритмическая часть определителя:  $l \cap i = S$  (рис. 1.11, а).

Коническая поверхность является *двухполостной*. Как правило, когда рассматривается геометрическое тело – конус, имеется ввиду одна полость, ограниченная конической поверхностью и плоскостью основания.

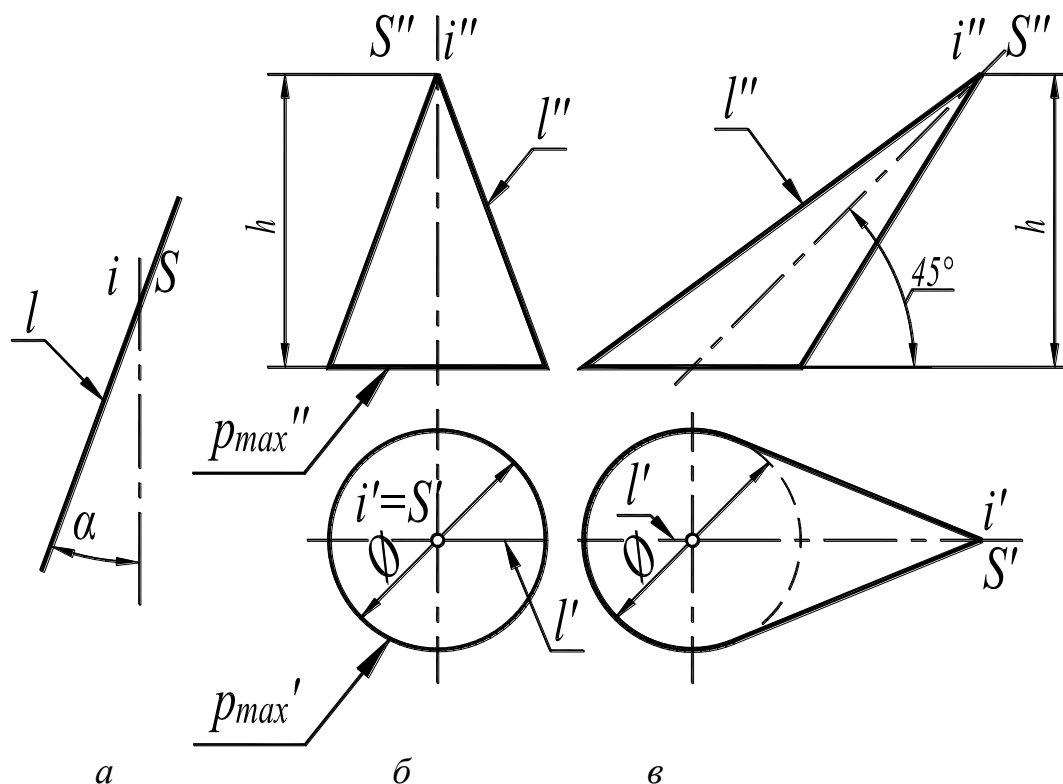


Рис. 1.11. Изображения конусов:

а – графическая часть определителя конуса; б – прямой круговой конус;  
в – наклонный конус

На чертеже конус изображается проекциями главного фронтального и профильного меридианов (или, что то же самое, проекциями очерковых образующих) и проекцией максимальной параллели.

Если ось вращения перпендикулярна плоскости проекций, то конус называется *прямым* круговым. Если ось вращения не перпендикулярна плоскости проекций, то конус называется *наклонным* (рис. 1.11, б, в).

Параметрами, определяющими размеры прямого кругового конуса, являются его высота  $h$  и диаметр основания (диаметр максимальной параллели  $r_{max}$ ). Для наклонного конуса добавляется угол наклона оси вращения к плоскости проекций.

Цилиндр и конус – это геометрические тела, ограниченные линейчатыми поверхностями вращения.

3. *Торовая поверхность* – это поверхность, образованная вращением окружности или ее части (дуги) вокруг оси  $i$ , не проходящей через ее центр, но лежащей в ее плоскости.

Геометрическая часть определителя торовой поверхности:  $\Phi = \{i, l, R, r\}$ . Алгоритмическая часть определителя зависит от соотношения величин – радиуса  $R$  образующей окружности  $l$  и расстояния  $r$  от оси образующей  $i_0$  до оси вращения  $i$ . В зависимости от этого соотношения различают следующие тела:

1) открытый (кольцевой) тор,  $R < r$ , т. е. образующая  $l$  не пересекает ось вращения  $i$  (рис. 1.12, а);

2) закрытый тор,  $R = r$ , т.е. образующая  $l$  касается оси вращения  $i$  (рис. 1.12, б);

3) самопересекающийся тор,  $R > r$ ; т. е. образующая  $l$  пересекает ось  $i$  (рис. 1.12, в). В последнем случае образующая  $l$  разделяется осью вращения  $i$  на две части  $l_1$  и  $l_2$ , каждая из которых образует свою поверхность.

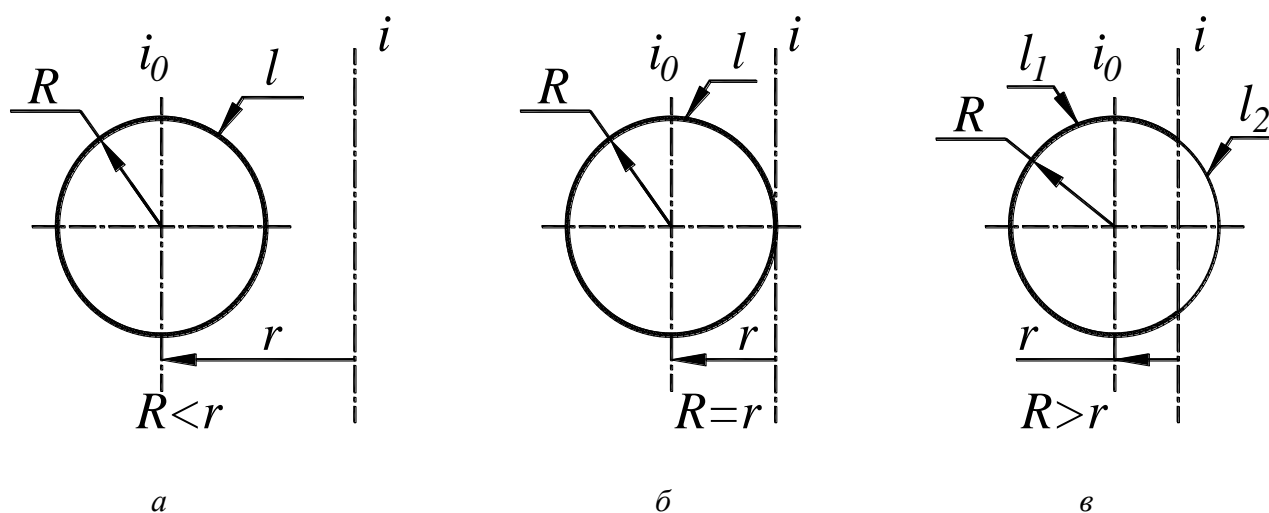


Рис. 1.12. Изображения определителей торовых поверхностей:  
а – открытый тор; б – закрытый тор, в – самопересекающийся тор

На чертеже тор изображается проекциями контура видимости. Окружность, по которой перемещается центр образующей при ее вращении вокруг оси, называется *криволинейной осью тора* (рис. 1.13, а, б, в).

При вращении внутренних частей образующих линий тора создаются различные варианты торовых поверхностей (рис. 1.14, а, б, в).



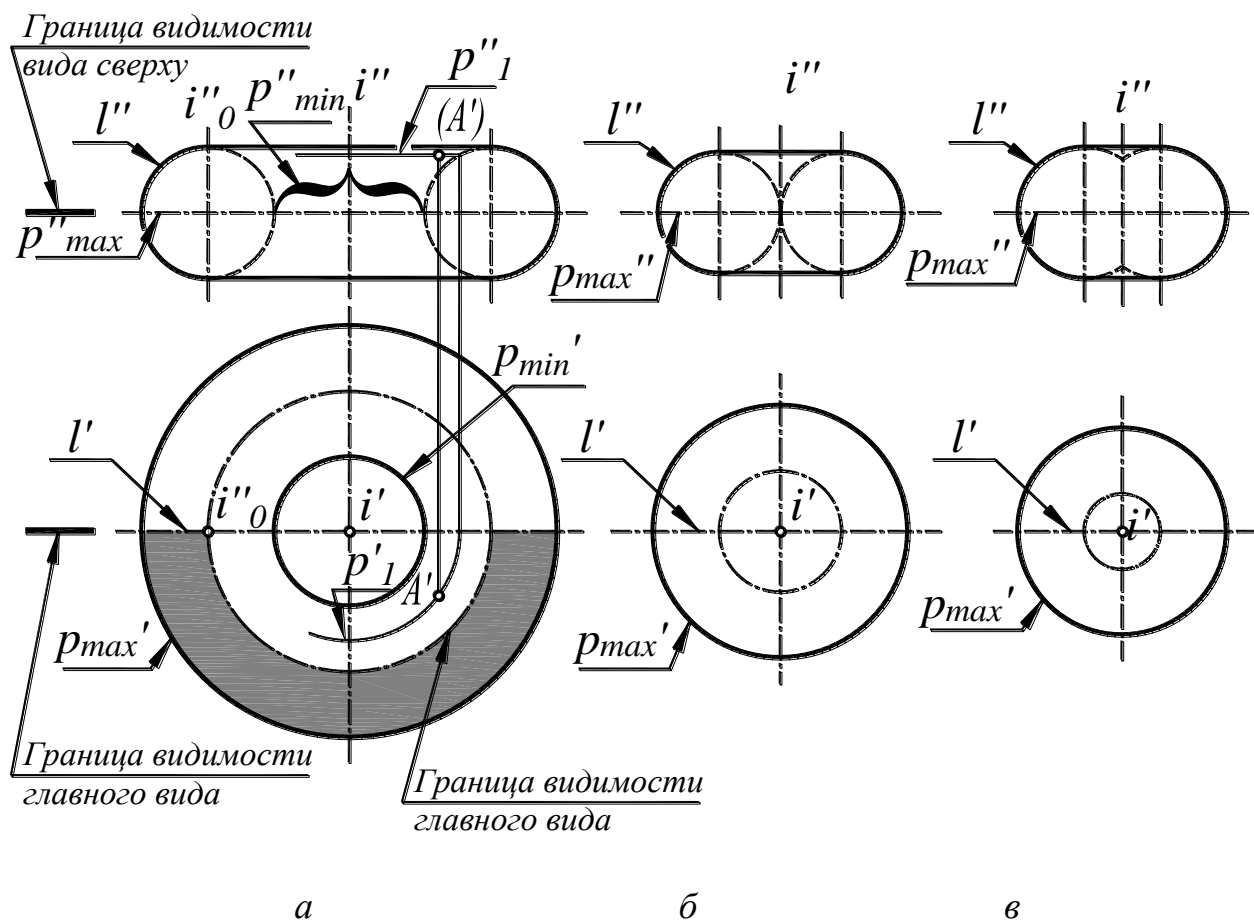


Рис. 1.13. Изображения различных типов торовых поверхностей: а – открытый тор; б – закрытый тор; в – самопересекающийся тор

Открытый тор имеет два семейства параллелей. Одно семейство образуется от части образующей  $l$ , расположенной слева от оси образующей окружности  $i_0$ . Радиусы этих параллелей изменяются в интервале от  $\rho_{max}$  до криволинейной оси тора. Радиусы второго семейства параллелей изменяются в интервале от криволинейной оси тора до  $\rho_{min}$ . Таким образом получаем *внешнее* и *внутреннее* семейства параллелей.

Границей видимости торовой поверхности (линией, делящей тор на видимую и невидимую части) для вида сверху является экватор  $\rho_{max}$ . Границей видимости для главного вида является проекция очерковой образующей  $l'$  и проекция криволинейной оси тора, т.е. на главном виде будет видна только часть торовой поверхности, выделенная на рис. 1.13, а. Тор – *нелинейчатая поверхность* вращения, поэтому для построения недостающих проекций точек используются только параллели (рис. 1.13, а).

В рассмотренных случаях в образовании поверхности тора используется вся окружность образующей  $l$  за исключением случаев, представленных на рис. 1.12, в, рис. 1.13, в и рис. 1.14 а, б, в. Достаточно

часто при образовании тора используется только часть дуги этой образующей.

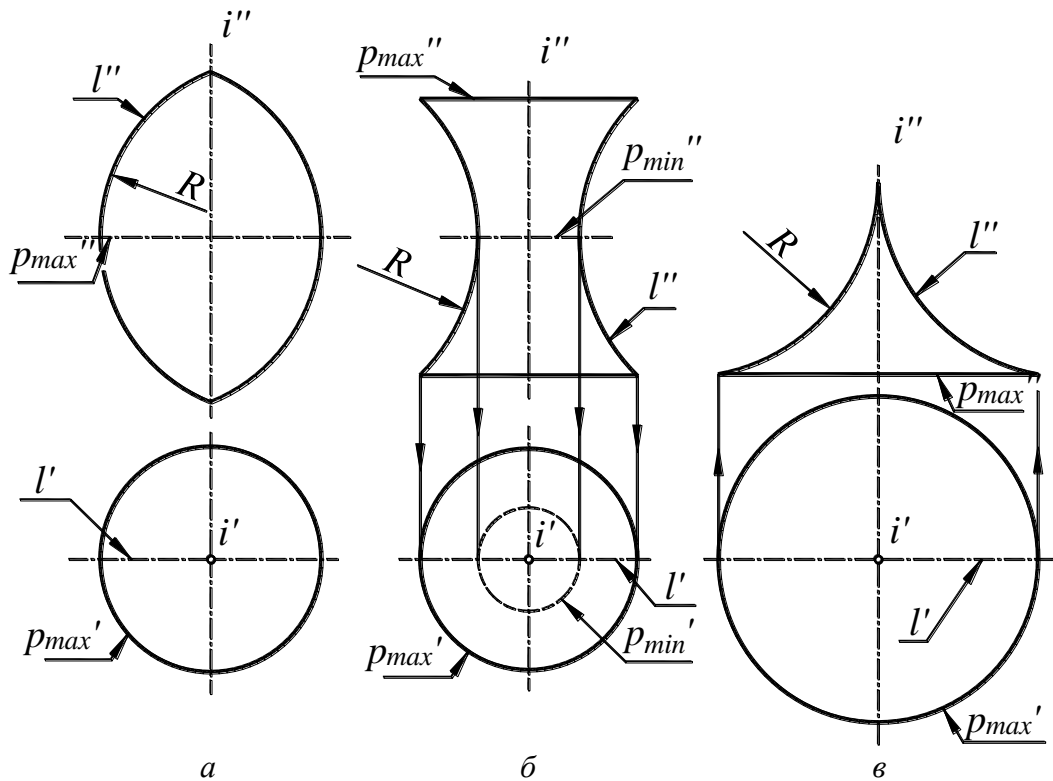
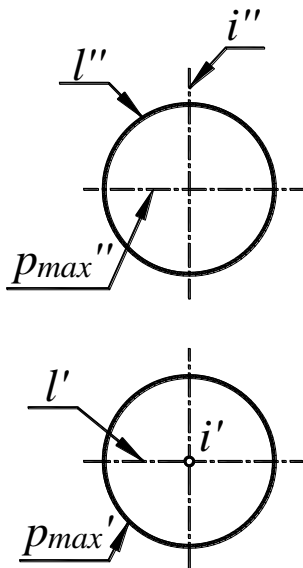


Рис. 1.14. Варианты торов:

*а* – самопересекающийся тор; *б* – открытый тор; *в* – закрытый тор

Варианты поверхностей торов, которые образуются при этом, показаны на рис. 1.14, *а*, *б*, *в*. На рис. 1.14, *а* изображена поверхность внутренней полости *самопересекающегося* тора. На рис. 1.14, *б* показана поверхность внутренней части *открытого* тора, а на рис. 1.14, *в* – внутренней части *закрытого* тора.



4. *Сферическая поверхность* образуется в том случае, если ось  $i_0$  образующей окружности  $l$  совпадает с осью вращения  $i$ . Сферическую поверхность можно рассматривать как частный случай торовой поверхности, у которой расстояние  $r = 0$ .

Геометрическая часть определителя сферической поверхности:

$$\Phi = \{l, i\}.$$

Геометрическое тело *сфера* на чертеже изображается проекциями главного меридиана  $l$  и

Рис. 1.15. Изображение сферы

экватора  $P_{\max}$  (рис. 1.15). Сфера имеет бесчисленное множество осей вращения  $i_i$  и, соответственно, бесчисленное множество семейств параллелей и меридианов.

#### 1.4.5. Построение проекций точек, принадлежащих поверхностям вращения

Для того чтобы на чертеже поверхности построить недостающие проекции принадлежащей ей точки, необходимо через заданную проекцию точки провести какую-либо линию каркаса поверхности: параллель или меридиан (образующую  $l$ ). Для *линейчатых поверхностей* вращения можно использовать параллели и меридианы, для *нелинейчатых* – только параллели. Затем построить вторую проекцию линии каркаса и по линии проекционной связи и найти на ней недостающую проекцию искомой точки с учетом ее расположения на поверхности, т.е. с учетом ее видимости.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. *Прямой круговой цилиндр* занимает горизонтально-проецирующее положение (рис. 1.16). На виде сверху вся боковая поверхность цилиндра спроецировалась в линию – окружность. Все параллели и прямые образующие линии цилиндра проецируются в эту же окружность. Горизонтальные проекции точек  $A$  и  $B$  определяются как точки пересечения линии проекционной связи с окружностью. Невидимые проекции точки изображаются заключенными в круглые скобки.

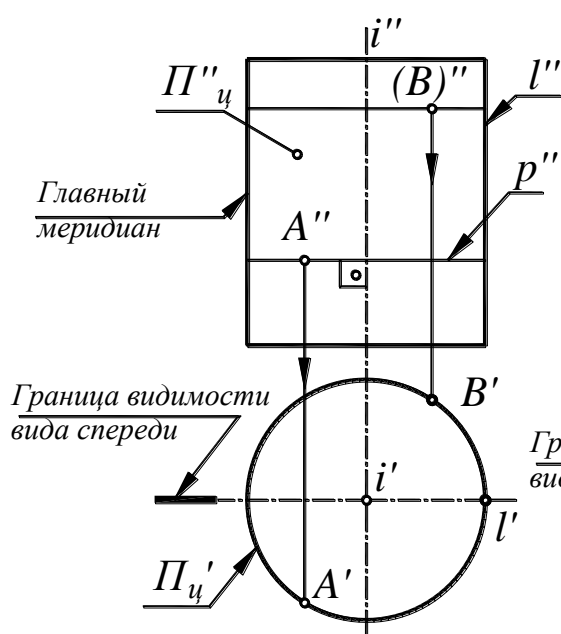


Рис 1.16. Точки на поверхности цилиндра

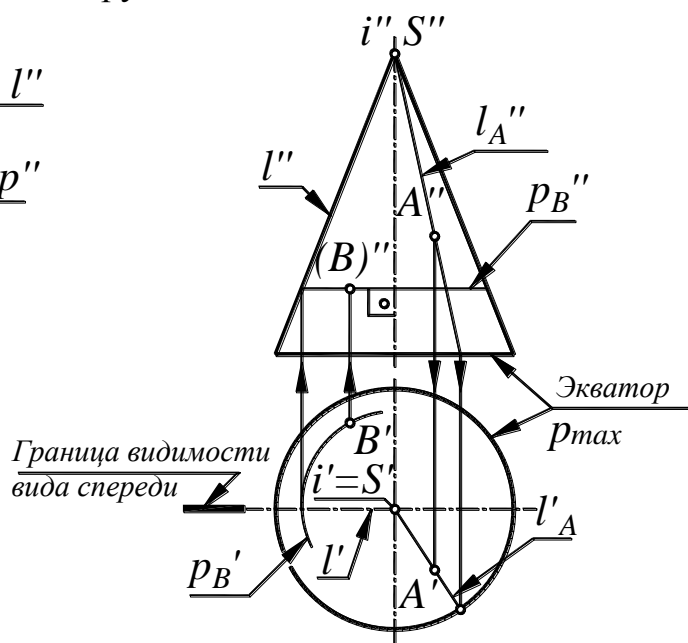


Рис. 1.17. Точки на поверхности конуса



Для рассмотренных поверхностей вращения можно сделать следующие выводы:

1. Очерком поверхности на виде спереди является *главный фронтальный меридиан* (очерковые образующие), а на виде сверху – *экватор* поверхности, если ось вращения поверхности перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций.

2. *Главный фронтальный меридиан* делит поверхность на переднюю и заднюю части; *экватор* – на верхнюю и нижнюю части. *Экватор* и *меридиан* являются границами видимости поверхности.

#### Алгоритм построения недостающей проекции точки:

1) через заданную проекцию точки проводим проекцию какой-либо линии каркаса. Для линейчатых поверхностей – параллель или образующую, для нелинейчатых – только параллель;

2) находим проекцию этой линии на втором заданном виде;

3) при помощи линии проекционной связи находим на ней вторую проекцию точки и определяем её видимость.

### **1.5. Построение проекций линии, принадлежащей поверхности вращения**

*Линия* – это непрерывное множество точек. Следовательно, для построения линии, принадлежащей поверхности, надо построить проекции точек, принадлежащих этой линии. Проекции точек строятся при помощи линий каркаса (параллелей и образующих).

Прежде чем приступить к построению проекций линии на поверхности надо провести классификацию точек, принадлежащих ей. Среди точек линии необходимо выделить: 1) *характерные точки*; 2) *промежуточные точки*.

*Характерные* точки определяют характер линии, ее границы и ее видимость. К ним относятся точки, лежащие на проекциях очерка поверхности, на проекциях осей поверхности, экстремальные точки, высшая, низшая, крайняя левая, крайняя правая, ближняя, дальняя, точки начала и конца линии.

Среди *характерных* точек выделяются *очевидные* точки, которые для своего нахождения не требуют дополнительных построений (не надо использовать каркасные линии), а определяются при помощи линий проекционной связи. В некоторых случаях одна и та же точка может относиться к разным категориям.

Промежуточные точки выделяются на заданной проекции линии для более точного графического построения искомой проекции линии.

Рассмотрим пример построения проекции линии  $a$  (гиперболы) на поверхности конуса (рис. 1.20).

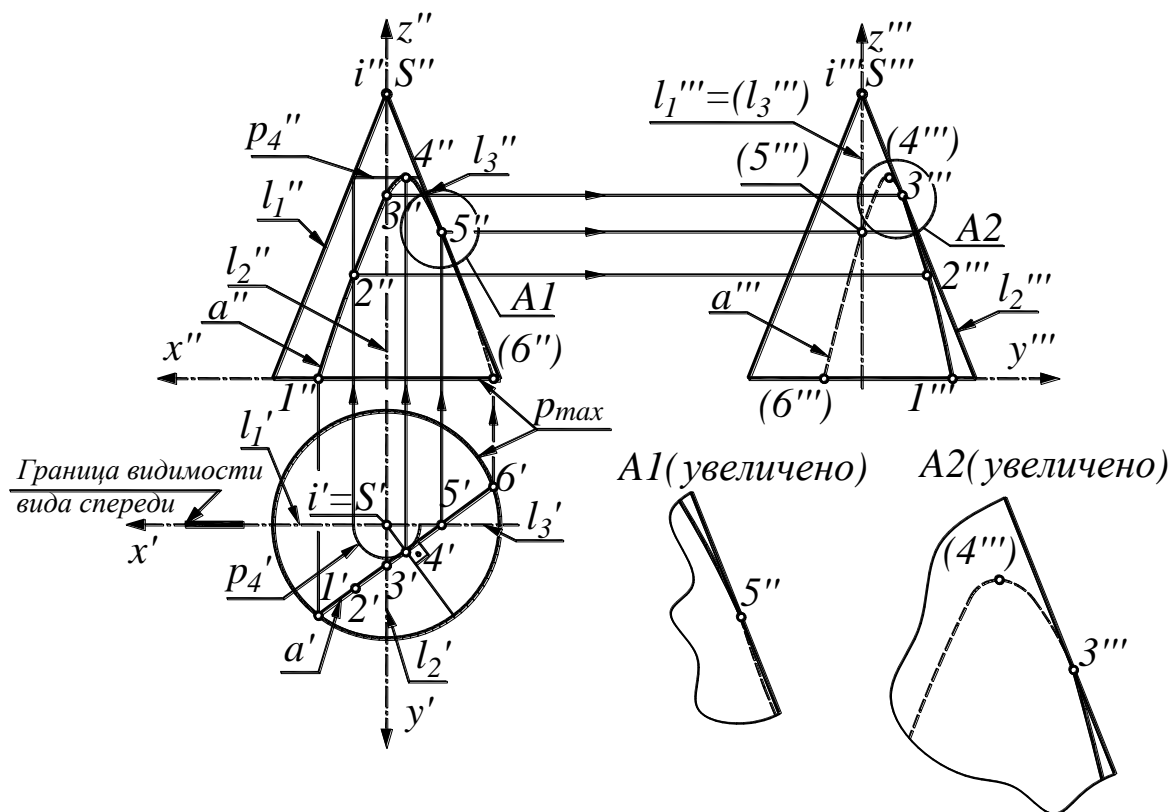


Рис. 1.20. Построение линии на поверхности конуса

Задана горизонтальная проекция линии  $a(a')$ . Построим фронтальную проекцию линии  $a''$  и профильную проекцию ( $a'''$ ).

На заданной проекции  $a'$  выделяем:

1) *характерные точки*:  $1'$ ,  $6'$  – начало и конец линии,  $3'$ ,  $5'$  – точки, лежащие на проекциях образующих  $l_1$  и  $l_2$ ,  $4'$  – экстремальная (самая высокая, т.к. лежит на параллели минимального радиуса, равного длине перпендикуляра, опущенного из центра на проекцию линии  $a'$ ). Среди характерных точек выделяем *очевидные*: это точки  $1'$  и  $6'$ , принадлежащие проекции  $p'_{\max}$ , точка  $5'$ , принадлежащая проекции очерковой образующей  $l_1'$ . Точка  $3'$  будет принадлежать очерковой образующей  $l_1'''$  на виде слева. На виде спереди характерные точки  $3''$ ,  $4''$ , а также промежуточная точка  $2''$  строятся при помощи линий каркаса (параллелей или образующих).

На виде слева все точки, кроме очевидных, строятся по координатам относительной системы координат.

2) *промежуточную точку* –  $2'$ .

Затем решаются вопросы видимости линии. Часть линии  $\{1...5\}$  будет видима на виде спереди, а часть линии  $\{1...3\}$  – на виде слева.



### Алгоритм построения недостающей проекции линии

1. Выделяем на заданной проекции линии характерные и промежуточные точки. Среди характерных выделяем очевидные.
2. Строим проекции очевидных точек.
3. При помощи линий каркаса строим недостающие проекции выделенных точек.
4. Определяем видимость линии на всех изображениях.
5. Соединяем полученные проекции точек в логической последовательности (так, как они соединены на заданном виде). Третья проекция линии строится по координатам относительной системы координат (ОСК).

## 2. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В практике часто приходится иметь дело с геометрическими телами, усеченными плоскостями.

Рассмотрим геометрические тела, ограниченные боковой поверхностью и плоскостями (основаниями), занимающими частное положение – проецирующее и уровня.

### 2.1. Построение сечений гранных поверхностей

Грани поверхностей являются плоскими многоугольниками, поэтому они будут пересекаться с заданной плоскостью по прямым. В этом случае линией пересечения является ломаная линия.

Различают два способа построения сечения гранных поверхностей плоскостью: *способ граней* – строятся линии пересечения каждой грани с секущей плоскостью, т.е. определяются стороны многоугольника сечения, *способ ребер* – строятся точки пересечения ребер гранной поверхности с секущей плоскостью, т.е. определяются вершины многоугольника сечения.

а) *Сечение призмы*. Рассмотрим случай сечения прямой трехгранной призмы фронтально проецирующей плоскостью  $Q(Q \perp F)$ . Призма, изображённая на рис. 2.1, занимает горизонтально-проецирующее положение.

Линией сечения является ломаная линия – треугольник. Фронтальная проекция линии сечения совпадает с проекцией плоскости  $Q(Q'')$ , горизонтальная проекция – с горизонтальной проекцией призмы. Выделим характерные точки линии пересечения  $\{1'', 2'', 3''\}$ .

Затем определим истинную величину верхнего основания призмы способом замены плоскостей проекций.

б) *Сечение пирамиды.* Рассмотрим случай сечения трехгранной пирамиды фронтально проецирующей плоскостью  $R(R \perp F)$  (рис. 2.2).

Фронтальная проекция линии пересечения совпадает с проекцией плоскости  $R(R'')$ . Горизонтальную проекцию линии пересечения (точки  $1', 2', 3'$ ) строим по линиям проекционной связи из условия принадлежности этих точек ребрам пирамиды.

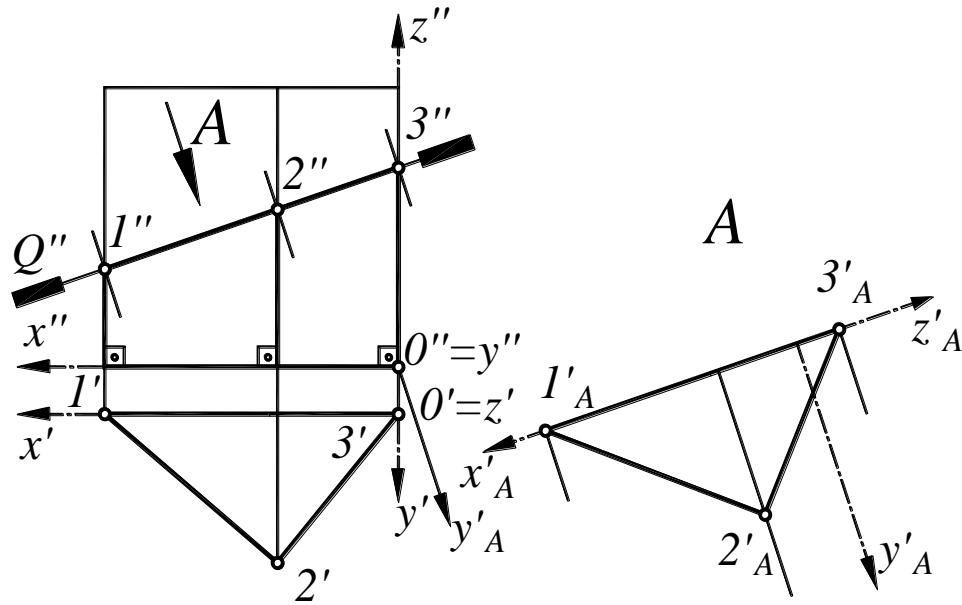


Рис. 2.1. Сечение призмы

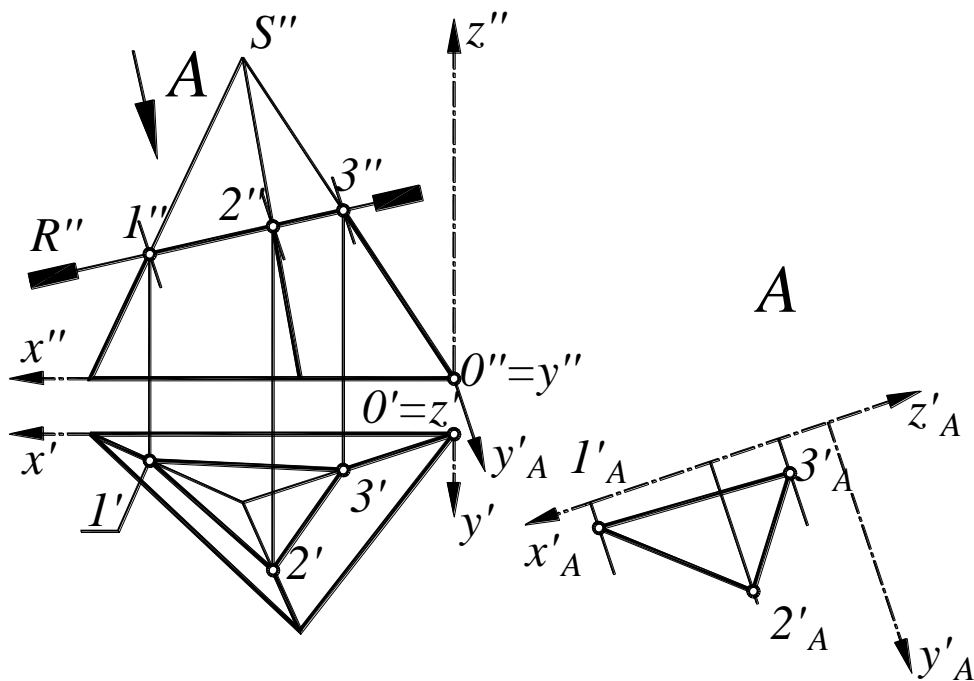


Рис. 2.2. Сечение пирамиды

## 2.2. Построение сечений поверхностей вращения

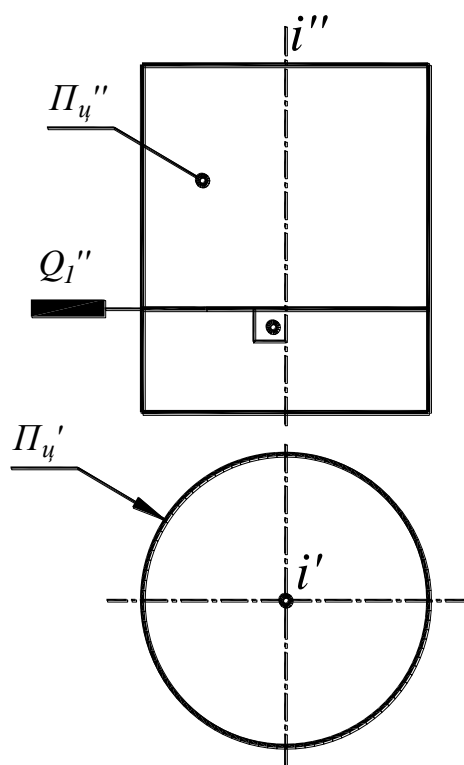


Рис. 2.3. Сечение цилиндра – окружность

цилиндра [3, 4] (рис. 2.4).

а) *Сечения цилиндрической поверхности.* При пересечении цилиндрической поверхности плоскостями могут быть получены следующие линии:

1) *Окружность*, если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения  $Q_1 \perp i$  (на чертеже  $Q_1'' \perp i''$ ),  $Q_1$  – горизонтальная плоскость уровня (рис. 2.3).

2) *Эллипс*, если секущая плоскость не параллельна и не перпендикулярна к оси вращения.  $Q_2$  – фронтально проецирующая плоскость, поэтому фронтальная проекция линии пересечения  $Q_2$  с поверхностью цилиндра совпадает с фронтальной проекцией плоскости  $Q_2''$  и проецируется в отрезок прямой  $[1'', 2'']$ , а на горизонтальную плоскость проекций проецируется в окружность, совпадающую с проекцией цилиндрической поверхности. Определяем истинную величину эллипса способом замены плоскостей проекций. Малая ось эллипса равна диаметру

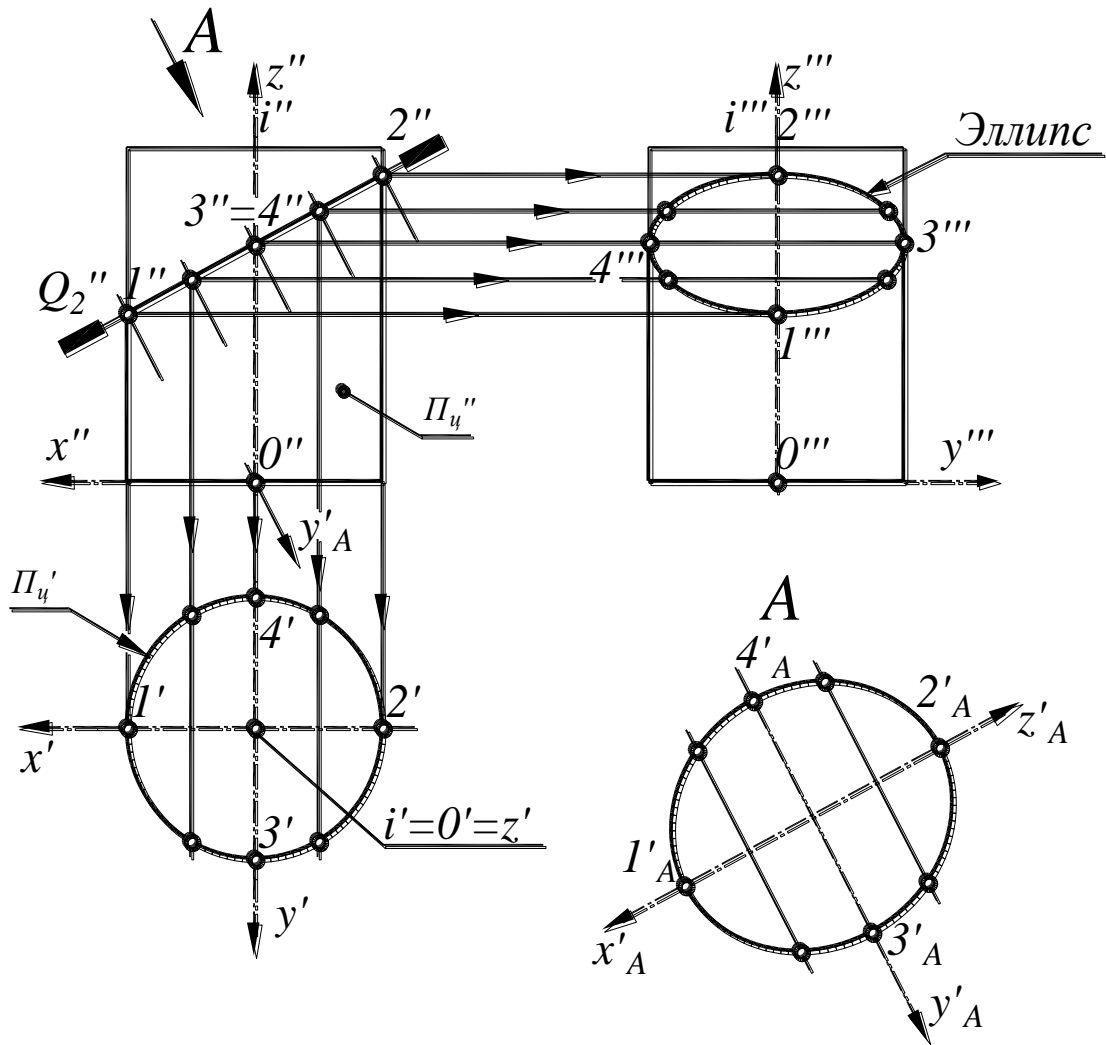


Рис. 2.4. Сечение цилиндра – эллипс

3) Две образующие (прямые), если секущая плоскость параллельна оси вращения  $Q_3 \parallel i$ ,  $Q_3 \parallel F$ ,  $Q_3 \cap \Pi_{\text{ц}} = l_1, l_2$  (рис. 2.5).

б) Сечения конуса. При пересечении конуса плоскостью могут быть получены следующие линии:

1) Окружность (параллель), если секущая плоскость перпендикулярна к оси вращения конуса:  $R_1 \perp i$ ,  $R_1 \parallel H$  (рис. 2.6).

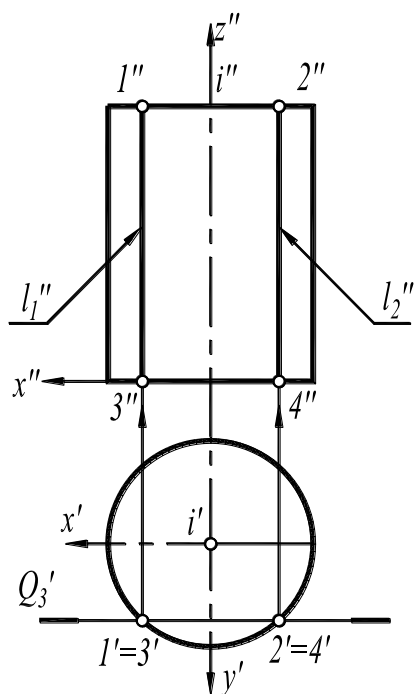


Рис. 2.5. Сечение цилиндра –  
прямоугольник

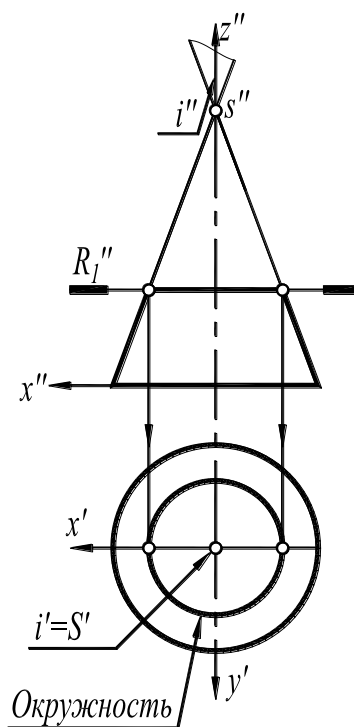


Рис. 2.6. Сечение конуса–  
окружность

2) *Эллипс*, если секущая плоскость не параллельна и не перпендикулярна оси конуса, а также не параллельна ни одной из образующих поверхности конуса, т. е. пересекает все образующие. Плоскость  $R_2''$  – фронтально проецирующая, линия  $[1'', 2'']$  – большая ось эллипса, линия  $[3', 4']$  – малая ось эллипса (рис. 2.7). На этом же рисунке показана истинная величина сечения на дополнительном виде А.

3) *Парабола*, если секущая плоскость параллельна только одной образующей поверхности конуса,  $R_3 \parallel l_i$ , или, иными словами, плоскость пересекает эту образующую в бесконечно удаленной (несобственной) точке. Когда секущая плоскость пройдет через вершину  $S$ , парабола выродится в прямую (рис. 2.8).

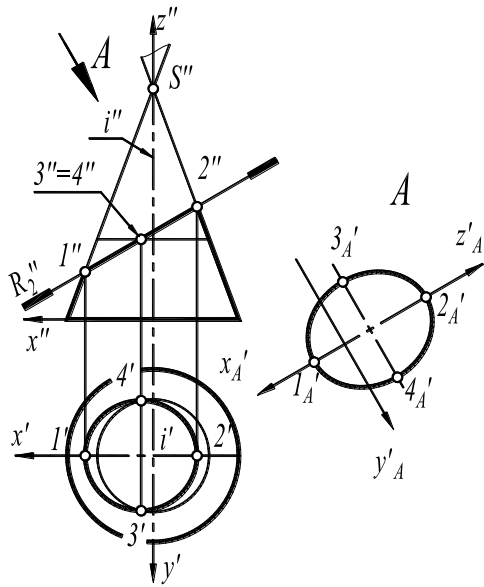


Рис. 2.7. Сечение конуса – эллипс

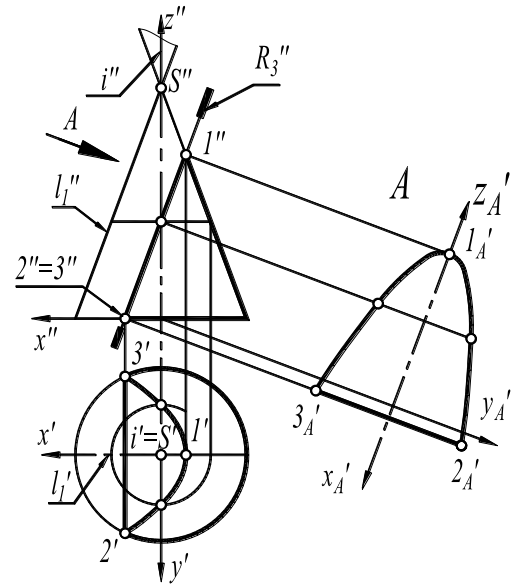


Рис. 2.8. Сечение конуса – парабола

4) *Гипербола*, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса,  $R_4 \parallel \{l_1, l_2\}$ . В частном случае секущая плоскость может быть параллельна оси конуса, тогда гипербола имеет две бесконечно удаленные точки пересечения образующих  $l_1$  и  $l_2$  с плоскостью  $R_4$  (рис. 2.9).

5) В предельном случае, когда секущая плоскость пройдет через вершину  $S$  конуса, гипербола вырождается в две прямые (образующие конуса  $l_1$  и  $l_2$ ) (рис. 2.10).

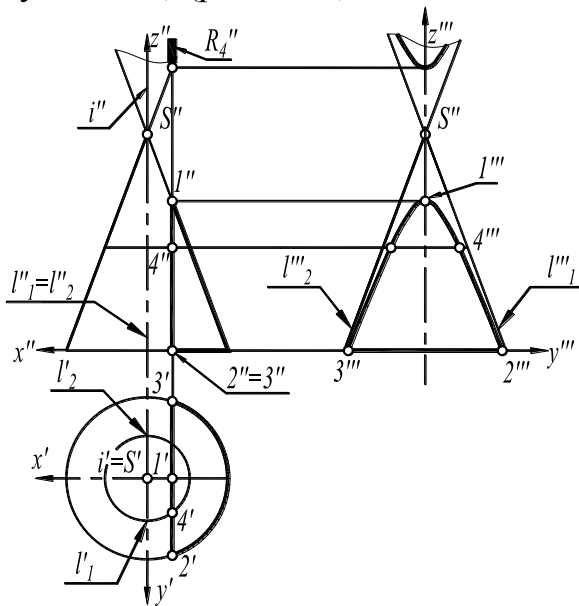


Рис. 2.9. Сечение конуса – гипербола

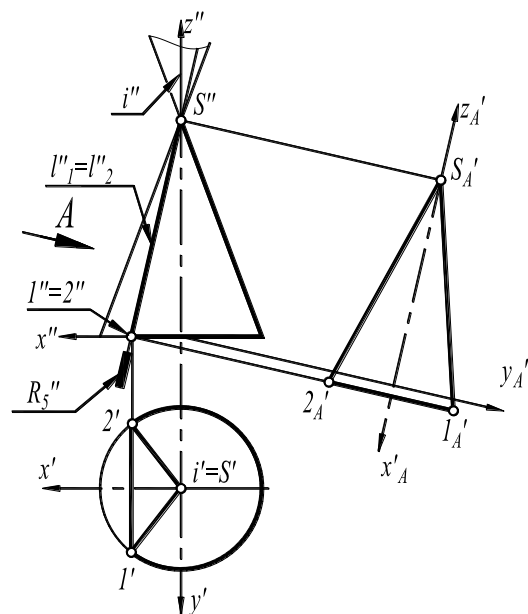


Рис. 2.10. Сечение конуса – прямые образующие линии



в) *Сечения сферы.* В пространстве линией пересечения сферы с плоскостью всегда будет окружность. Если секущая плоскость занимает положение плоскости уровня, то на параллельную ей плоскость проекций эта окружность сечения будет проецироваться без искажения, а на перпендикулярную ей плоскость проекций – в отрезок прямой, равный по длине диаметру окружности. На рисунке 2.11, а показана горизонтальная плоскость уровня  $T_1$ . Линия пересечения проецируется на горизонтальную плоскость проекций  $H$  без искажения – в окружность (параллель)  $p'$ , а на фронтальную плоскость проекций  $F$  – в отрезок прямой  $[1'', 2'']$ , равный диаметру окружности  $p$ .

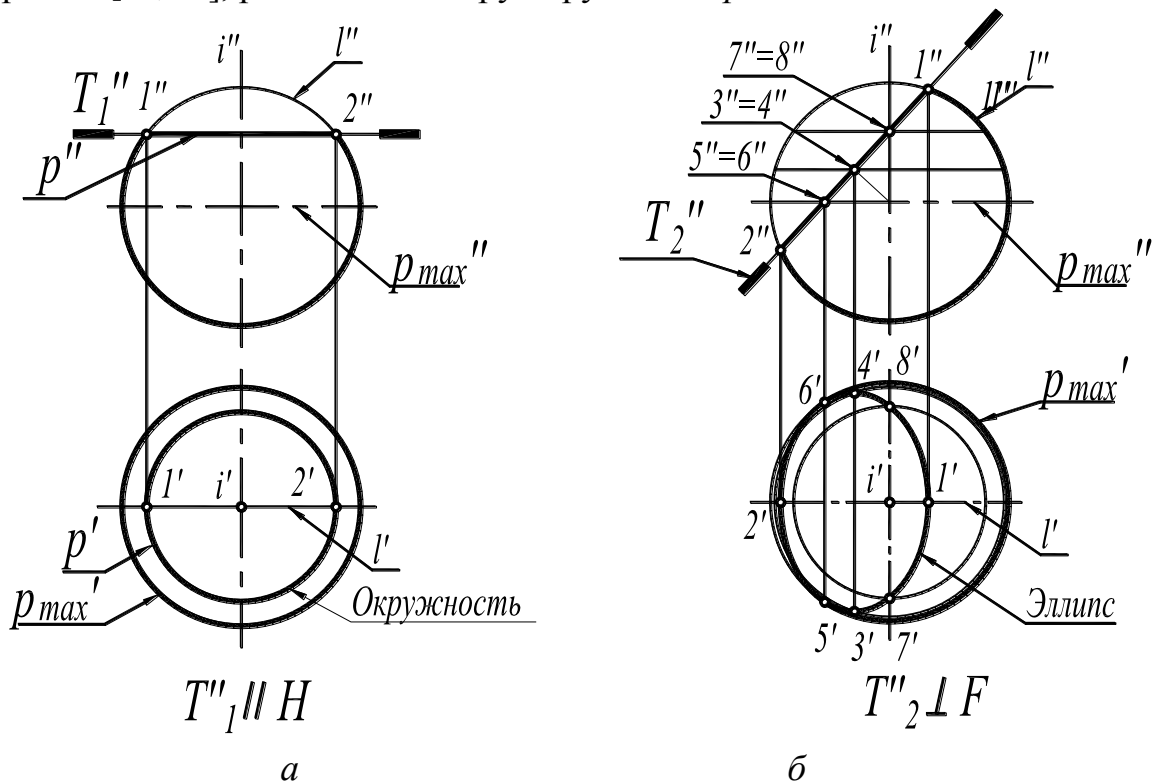


Рис. 2.11. Сечения сферы:  
а –  $T_1 \parallel H$ ; б –  $T_2 \perp F$

Если секущая плоскость  $T_2$  занимает фронтально-проецирующее положение, то на фронтальную плоскость проекций  $F$  линия сечения (окружность) будет проецироваться в отрезок прямой  $[1'', 2'']$ , равный по длине диаметру окружности, а на горизонтальную плоскость проекций – в эллипс, большая ось которого равна диаметру окружности сечения (рис. 2.11, б).

г) *Сечения открытого тора.* В зависимости от положения секущей плоскости на поверхности открытого тора получаются разные линии, которые объединены общим названием «Кривые Персея» (рис. 2.12).

Если секущая плоскость  $R_1$  проходит через ось вращения тора, то в сечении получаются две окружности. Если секущая плоскость  $R_2$  касается горла тора ( $P_{\min}$ ), то в сечении получается лемниската Бернулли (от

латинского слова *lemniskata* – «лента»). Когда секущая плоскость касается криволинейной оси тора, то получается в сечении овал Кассини. При снижении секущей плоскости вдоль координатной оси получают овалы.

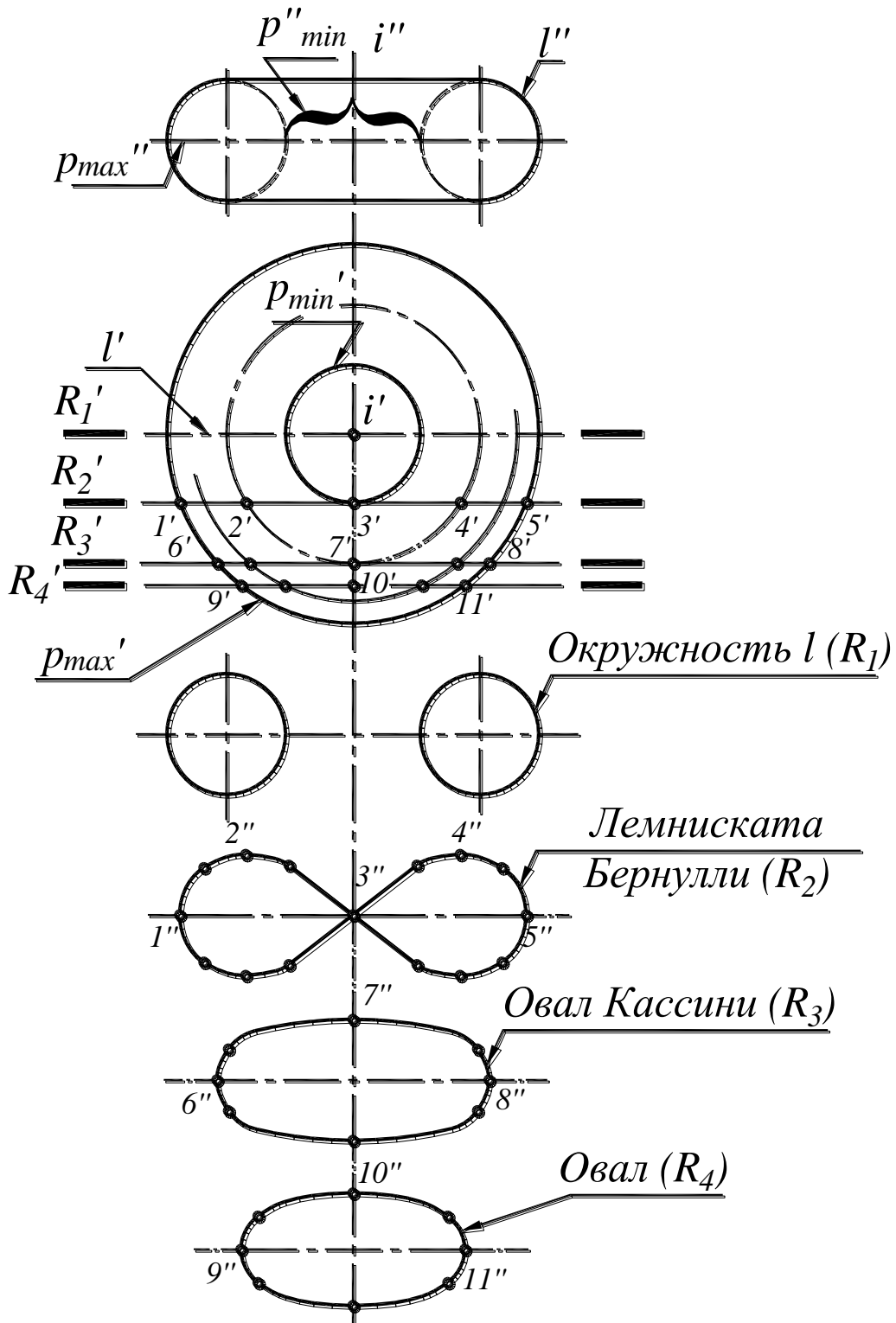


Рис. 2.12. Сечения открытого тора

### 3. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Развертка поверхности* представляет собой плоскую фигуру, которая получается путем совмещения данной поверхности с плоскостью. Каждой точке на поверхности соответствует вполне определенная и единственная точка на развертке и наоборот. Теоретическая развертка не учитывает толщины поверхности.

На чертежах приходится выполнять построение разверток поверхностей деталей, усеченных плоскостями. Это необходимо для раскроя листового материала, из которого изготавливаются детали. К таким деталям относятся части водоводов, вентиляционных устройств и т.д.

Поверхности, которые могут быть совмещены с плоскостью без разрывов и складок называются *развертываемыми*. Поверхности, которые не могут быть совмещены с плоскостью, относятся к *неразвертываемым*.

К группе *развертываемых* поверхностей относятся только *линейчатые* поверхности.

Для неразвертываемых поверхностей строят приближенные развертки, аппроксимируя их (заменяя) несколькими развертываемыми поверхностями (цилиндрическими или коническими) (рис. 3.1). Точность выполнения приближенной развертки зависит от количества развертываемых поверхностей, которыми заменяют неразвертываемую поверхность.

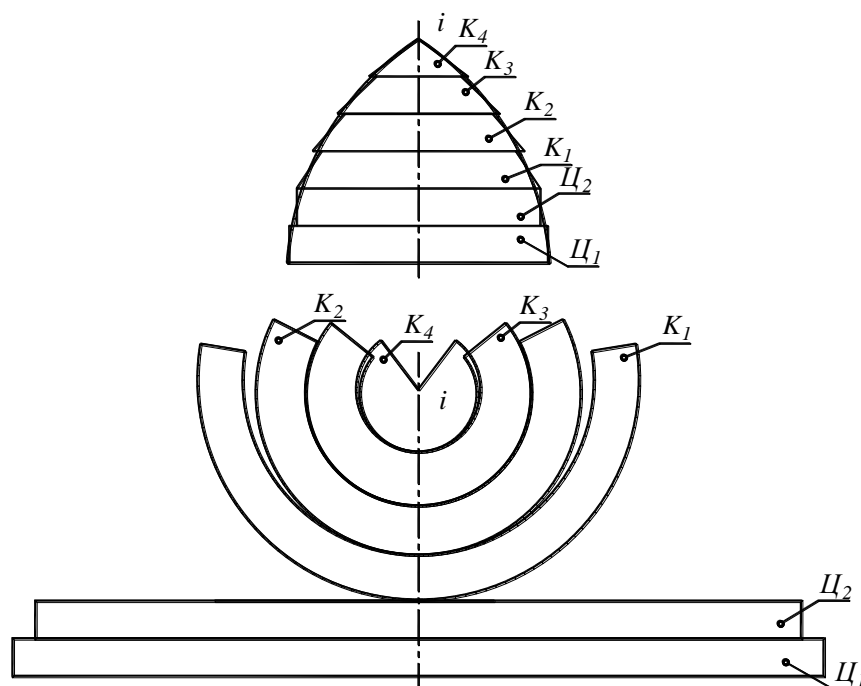


Рис. 3.1. Развертка поверхности самопересекающегося тора

### 3.1. Построение развертки поверхности призмы

Призма ограничивается боковой поверхностью (боковыми гранями) и плоскостями верхнего и нижнего основания (рис.3.2). Боковые грани являются горизонтально проецирующими плоскостями, плоскость верхнего основания – фронтально проецирующая, нижнего – горизонтальная плоскость уровня. Развертка поверхности состоит из развертки боковой поверхности и оснований призмы.

Для построения развертки боковой поверхности призмы необходимо:

1) совместить все грани призмы с плоскостью чертежа. Для этого мысленно разрежем боковую поверхность призмы по ребру  $[1_1, 1]$ , и будем последовательно совмещать с плоскостью развертки боковые грани призмы (рис. 3.2, а);

2) определить истинную величину верхнего основания призмы  $\{1, 2, 3\}$  (построить дополнительный вид по направлению  $A$  перпендикулярному верхнему основанию).

3) к развертке боковой поверхности призмы пристроить её верхнее основание, взятое с дополнительного вида  $A$  и нижнее основание (рис. 3.2, б).

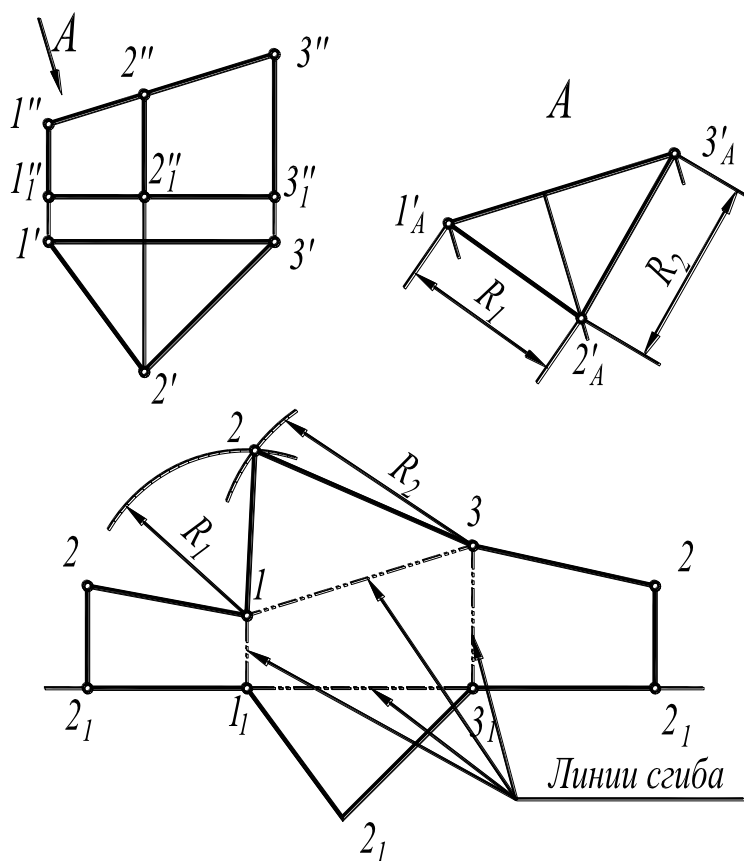


Рис 3.2. Развертка усеченной призмы

### 3.2. Построение развертки поверхности пирамиды

Полная развертка поверхности пирамиды состоит из развертки боковой поверхности и многоугольника основания. Если пирамида усеченная, то добавляется еще многоугольник верхнего основания. Построение развертки сводится к определению истинных величин граней и оснований пирамиды. Рассмотрим построение развертки усеченной трехгранной пирамиды (рис. 3.3).

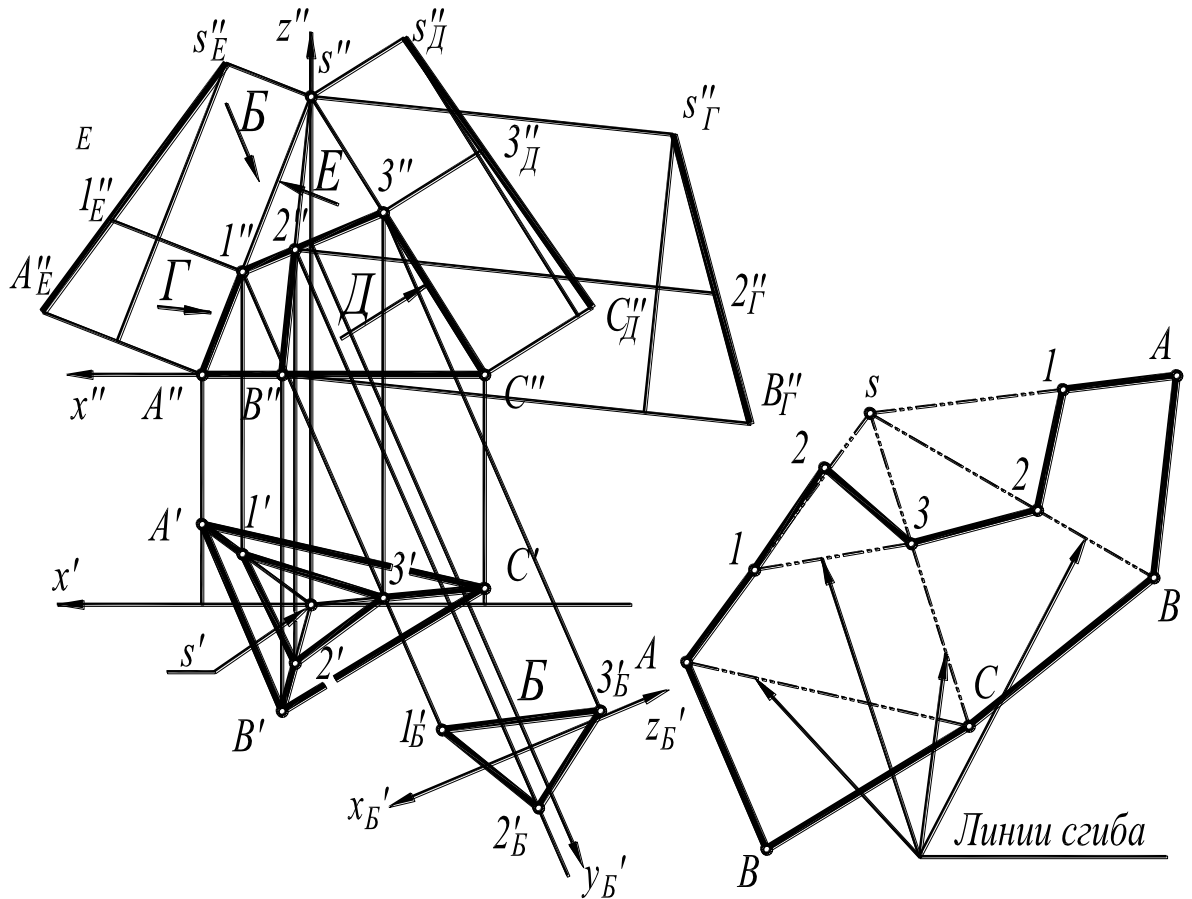


Рис. 3.3. Построение развертки усеченной пирамиды

Сначала построим развертку неусеченной пирамиды, все грани которой имеют форму треугольников. Основание пирамиды на горизонтальную плоскость проекций проецируется в истинную величину. Для построения развертки необходимо найти истинную величину боковых граней. Для этого нужно определить истинную величину ребер пирамиды. Это можно сделать уже известными способами (вращения, замены плоскостей проекций). В данном примере истинная величина ребер определяется способом замены плоскостей проекций. Аналогично определяется истинная величина ребер усеченной пирамиды.

Плоскость верхнего основания – фронтально проецирующая, поэтому необходимо определить ее истинную величину (построим дополнительный вид по направлению  $B$ , перпендикулярному верхнему основанию).

Для построения развертки выбираем на чертеже произвольную точку  $S$  (вершину пирамиды) и по трем определённым сторонам методом засечек строим треугольники боковых граней не усечённой пирамиды. Последовательность расположения граней на развертке может быть различной. Методом засечек к одной из граней пристраиваем нижнее основание.

Затем на соответствующих ребрах откладываем истинные величины ребер усеченной пирамиды и получаем линию развернутого верхнего основания. После чего пристраиваем верхнее основание с дополнительного вида  $B$ .

Между поверхностью пирамиды и ее разверткой устанавливается взаимно однозначное соответствие, т. е. каждая точка поверхности пирамиды соответствует строго определенной точке развертки. Это утверждение не относится к точкам, лежащим на ребрах, по которым поверхность разрезана: на развертке их две, а на поверхности – одна.

Если в основании пирамиды лежит многоугольник с числом сторон более четырёх, то для его построения на развертке недостаточно знать истинную величину его сторон, чтобы выполнить требование сохранения площадей. Еще необходимо определить истинную величину угла между сторонами или же разделить его на несколько треугольников. Этот последний способ называется способом *триангуляции* и сводится к определению истинных величин сторон треугольников.

### 3.3. Построение развертки поверхности усеченного цилиндра

Цилиндр вращения, у которого два параллельных основания перпендикулярны оси вращения, развертывается на плоскость в виде прямоугольника, длина которого равна длине окружности  $2\pi R$ , а высота – высоте цилиндра.

#### Последовательность построения развертки усечённого цилиндра

1. Разделяем окружность основания на  $n$  равных частей, например, на 12 частей. Через отмеченные точки  $1, 2, 3 \dots 12$  проводим образующие на изображениях поверхности цилиндра и, соответственно, на развертке. Длина образующих определяется фронтальной проекцией цилиндра. Построение развёртки боковой поверхности удобно начинать с построения очерковых образующих  $[1, B]$  или  $[2, C]$ . Затем по соответствующим



линиям на развёртке откладываем длины отрезков образующих, равные их фронтальным проекциям. Полученные точки соединяем плавной кривой.

2. Определяем истинную величину верхнего основания цилиндра (строим дополнительный вид по направлению  $A$  перпендикулярному верхнему основанию).

3. К развёртке боковой поверхности цилиндра пристроим верхнее основание с дополнительного вида  $A$  и нижнее основание – круг (рис. 3.4,  $a$ ,  $б$ ).

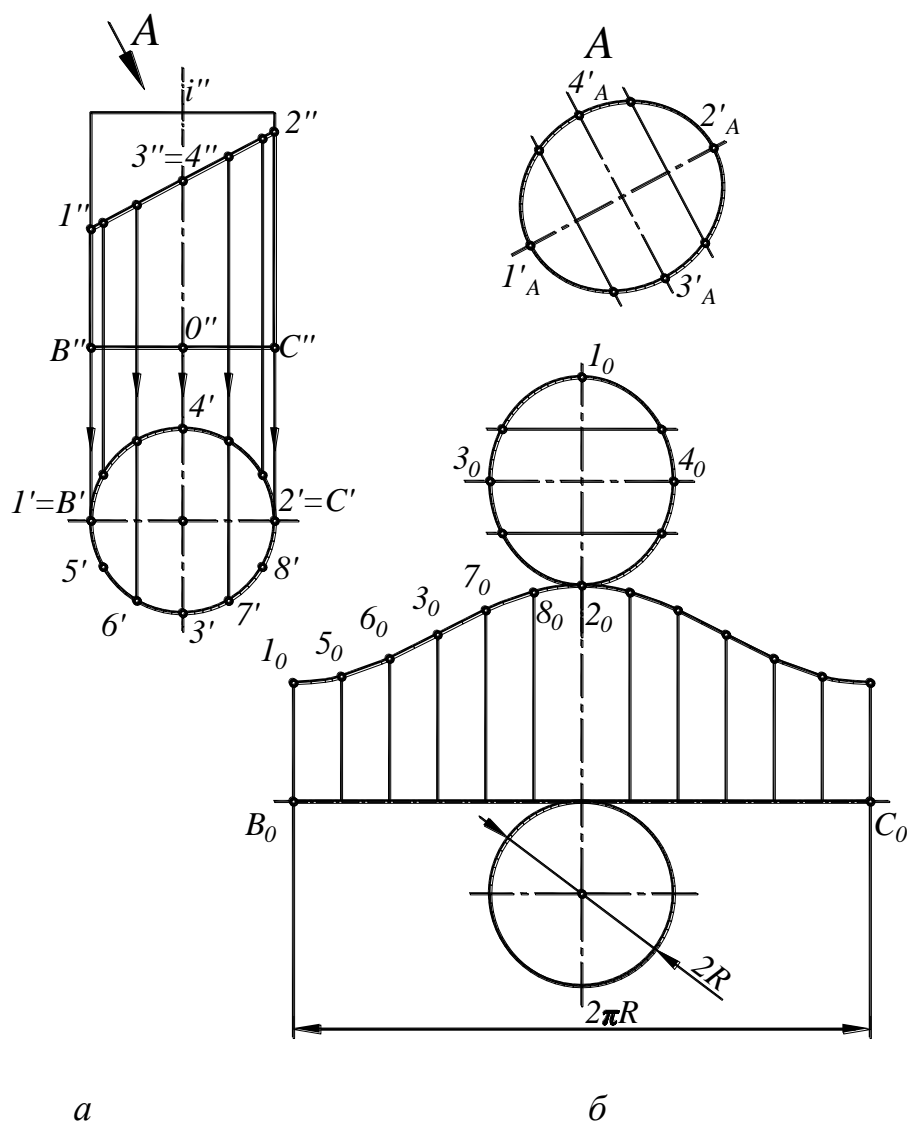


Рис. 3.4. Развертка усеченного цилиндра:

$a$  – основные виды цилиндра;  $б$  – развёртка цилиндра

### 3.4. Построение развёртки поверхности усеченного конуса

Поверхность конуса вращения разворачивается в круговой сектор  $\varphi = \frac{360^\circ \cdot r}{l}$ , где  $r$  – радиус окружности основания конуса,  $l$  – образующая конуса.

### Последовательность построения развертки усечённого конуса

1. Построение развертки поверхности усеченного конуса начинаем с построения кругового сектора радиусом  $[SA]$ , равным длине  $l$  образующей конуса (рис. 3.5). Далее разобьем основание конуса и дугу сектора на равные части, например, на 12 частей и проведем через точки деления образующие на изображении поверхности и на развертке. После этого определим истинные величины отрезков образующих между нижним и верхним основаниями.

Истинные величины отрезков образующих легко определить вращением образующих вокруг оси  $i$  конуса до положения, параллельного фронтальной плоскости проекций. Две очерковые образующие  $[SA]$  и  $[SB]$  на фронтальную плоскость проецируются без искажения. Для определения истинной величины произвольной образующей, например  $[SC]$ , повернем ее вокруг оси конуса до положения  $[SA]$ , тогда фронтальная проекция  $3''$  точки  $3$  переместится в положение  $\bar{3}''$  и истинная величина искомой образующей будет равна  $[A'', \bar{3}'']$ . Аналогичным построением определим длину отрезка любой образующей и отложим эту величину на соответствующей линии развертки. Соединив полученные точки плавной кривой, получим развертку конической поверхности.

2. Определим истинную величину верхнего основания конуса, построив дополнительный вид по направлению  $A$  перпендикулярному верхнему основанию.

3. К развертке боковой поверхности конуса пристроим верхнее и нижнее основания (рис. 3.5, а, б).

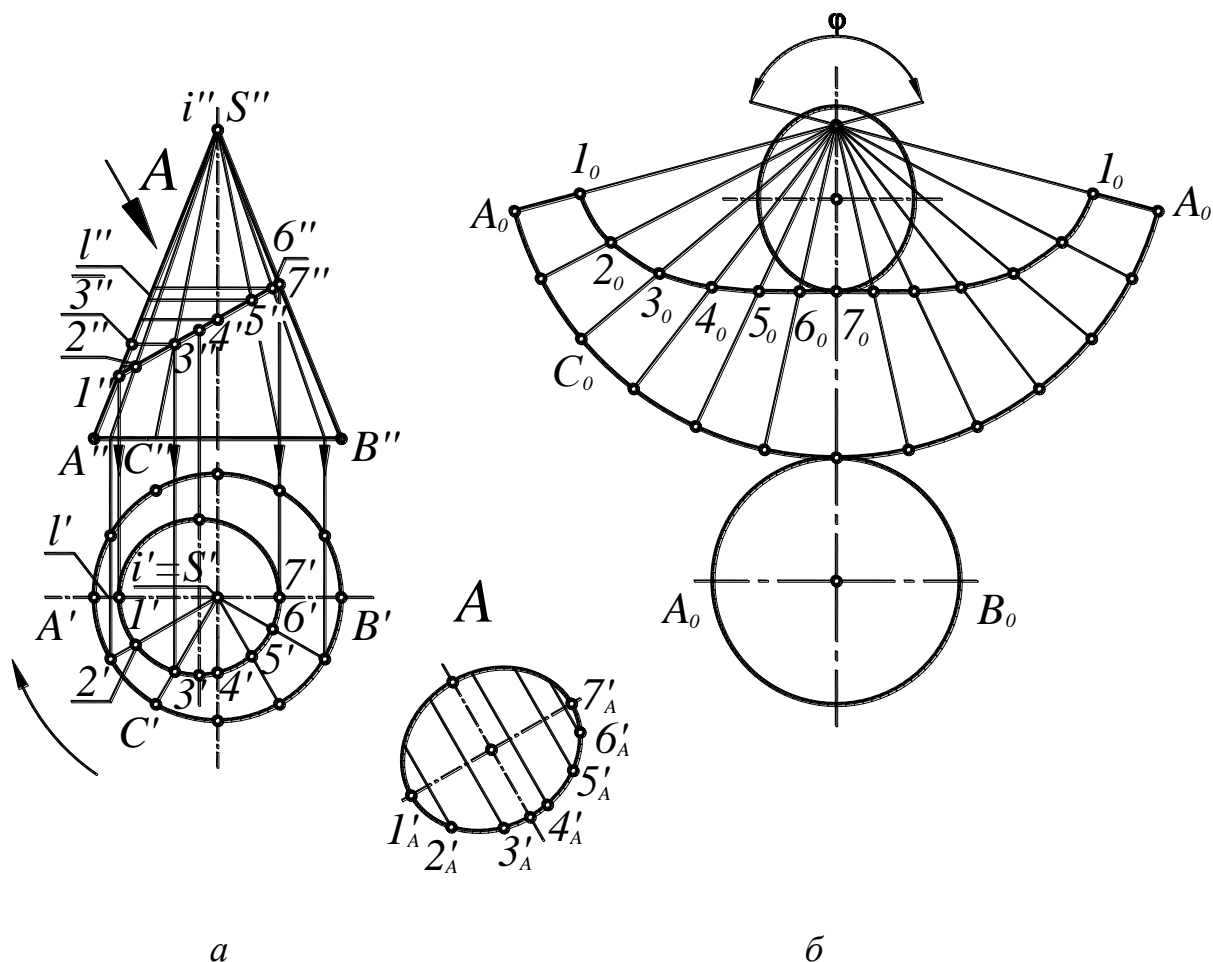


Рис. 3.5. Развертка поверхности усеченного конуса:  
 а – виды конуса; б – развёртка конуса

#### 4. ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «ПОВЕРХНОСТИ И РАЗВЕРТКИ»

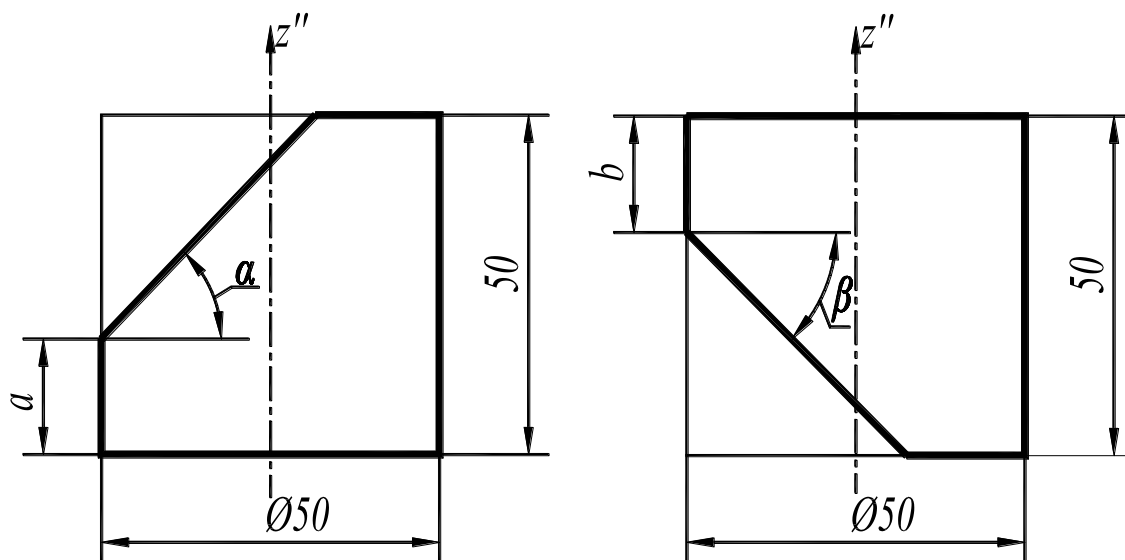
Практические занятия по теме «Поверхности и развертки» имеют целью:

1. Закрепление теоретического материала, излагаемого на лекциях, по темам: образование поверхностей; классификация поверхностей; задание поверхностей на чертеже; построение проекций точек и линий, принадлежащих поверхности, определение их видимости; построение сечений поверхностей плоскостями; определение истинных величин сечений.

2. Усвоение основных понятий: определитель поверхности, очерковые линии, каркасные линии (образующие, направляющие).

3. Ознакомление с основными способами построения разверток развертывающихся и неразвертывающихся поверхностей.

Ниже приводятся условия задач для самостоятельного решения на практических занятиях. На рис. 4.1 заданы варианты расположения секущей плоскости, усекающей горизонтально-проецирующий цилиндр.



№	$a$	$\alpha^0$
1	0	30
3	5	30
5	10	30
7	15	30
9	20	30
11	25	30
13	30	30
15	0	45
17	5	45
19	10	45
21	15	45
23	20	45
25	0	60

№	$b$	$\beta^0$
2	0	60
4	0	45
6	5	45
8	10	45
10	15	45
12	20	45
14	0	30
16	5	30
18	10	30
20	15	30
22	20	30
24	25	30
26	30	30

Рис. 4.1. Задания на построение сечения цилиндра и его развёртки

При выполнении задания строятся три вида усеченного цилиндра, определяется истинная величина сечения (строится дополнительный вид  $A$  по направлению, перпендикулярному плоскости сечения). После этого строится развёртка боковой поверхности усеченного цилиндра. Пример решения задачи показан на рис. 4.2.

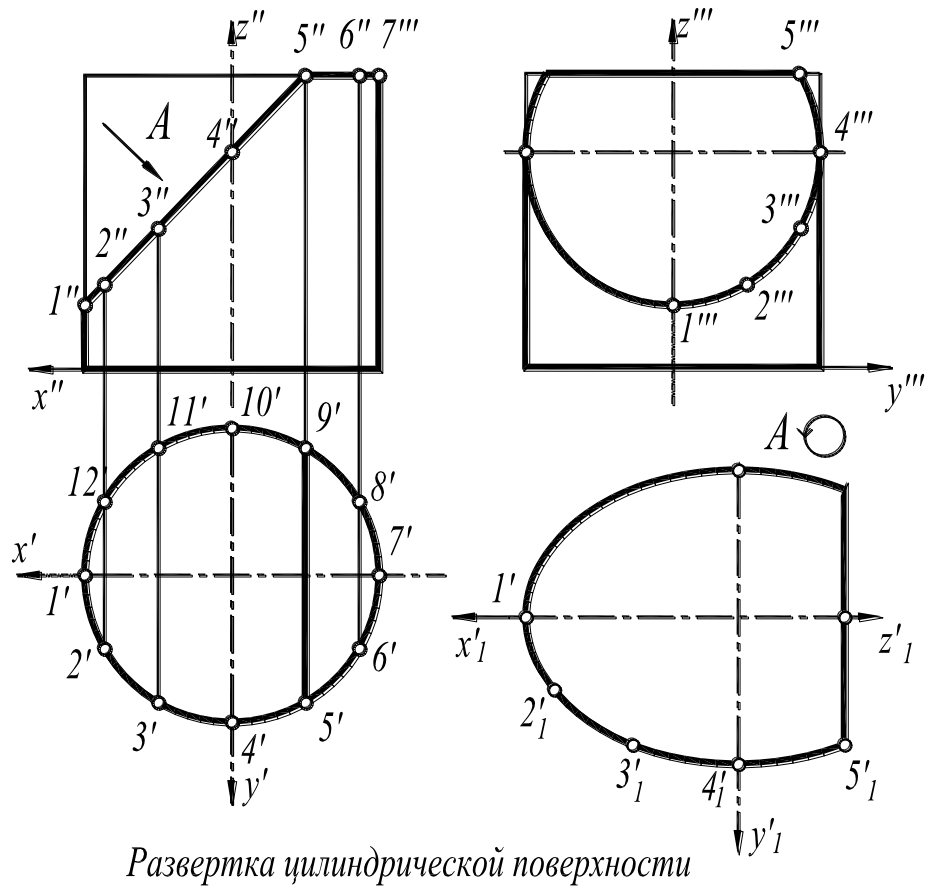
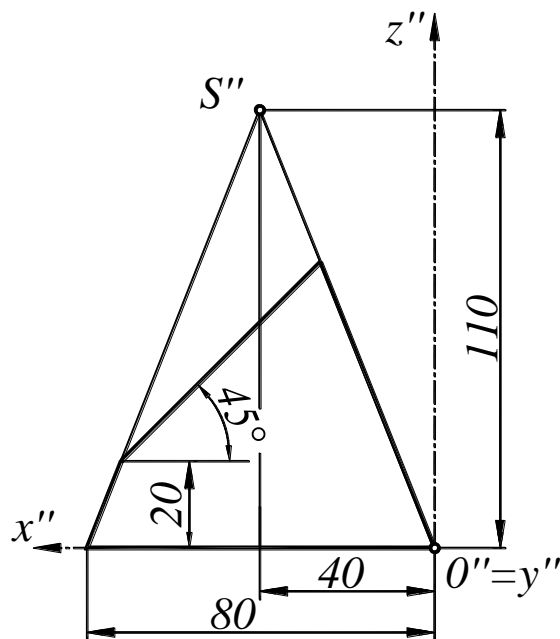


Рис. 4.2. Пример построения сечения цилиндра и его развертки

Кроме этого студенты должны построить три вида пирамиды, усеченной фронтально-проецирующей плоскостью, определить истинную величину сечения (построить дополнительный вид  $A$ ) и затем построить полную развертку поверхности пирамиды. Варианты заданий представлены на рис. 4.3. Для нечетных номеров заданий строятся изображения четырехгранной пирамиды, имеющей в основании квадрат. Для четных номеров заданий строятся изображения трехгранной пирамиды, в основании которой равносторонний треугольник. Вершина

пирамиды  $S$  имеет различные величины координаты  $y$  для каждого варианта. Координата  $y$  приведена в таблице на рис. 4.3.



Четырех- угольная	Треугольная	$y$
№ варианта		
1	2	5
3	4	10
5	6	15
7	8	20
9	10	25
11	12	30
13	14	35
15	16	45
17	18	50
19	20	55
21	22	60
23	24	65
25	26	70
27	28	75
29	30	80

Рис. 4.3. Задания на построение сечений пирамиды

Примеры решения задач представлены на рис. 3.3 и рис. 4.4.

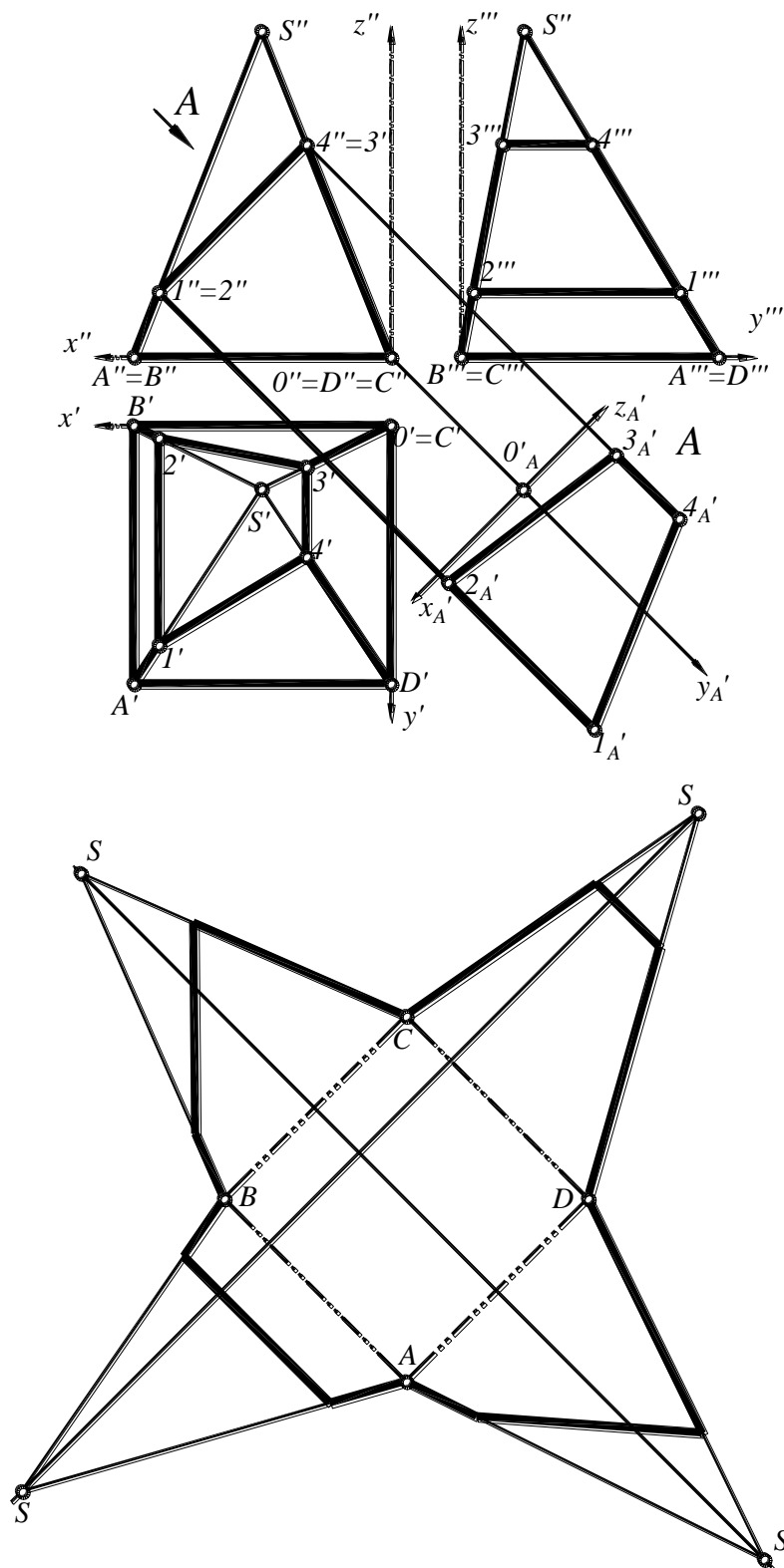


Рис. 4.4. Пример построения сечения четырёхгранной пирамиды и ее развёртки

### Контрольные вопросы по теме «Поверхности и развертки»

1. Что называется поверхностью?
2. Какие способы образования поверхностей Вы знаете?
3. Какие способы задания поверхностей Вам известны?
4. Что называется определителем поверхности? Из каких частей он состоит?
5. Что называется очерком поверхности?
6. Какие каркасные линии можно выделить на гранных поверхностях и на поверхностях вращения?
7. Какое условие является условием принадлежности точки поверхности?
8. Каков порядок построения проекций линий, принадлежащих поверхности?
9. Какие линии получаются на поверхности *цилиндра* при пересечении его с различными плоскостями?
10. Какие линии получаются на поверхности *конуса* при пересечении его с различными плоскостями?
11. Какие линии получаются на поверхности *тора* при пересечении его с различными плоскостями?
12. Какие линии получаются на поверхности *сферы* при пересечении её с различными плоскостями?
13. Что называется разверткой поверхности?
14. Какие способы построения разверток Вам известны?
15. Как строятся развертки неразвертывающихся поверхностей?

### 5. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ТЕМУ «ОБРАЗОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ»

1. Построить три проекции цилиндра вращения по заданному положению геометрических элементов определителя ( $l$  – образующая,  $i$  – ось):  $i \perp H$ ;  $l \perp H$ ;  $|R| = 25$  мм;  $l = 50$  мм.

Обозначить проекции линий очерка поверхности.

Построить проекции точек:  $A$  – видимой на видах спереди и слева на высоте 30 мм;  $B$  – не видимой на видах спереди и слева на высоте 15 мм.

2. Построить три проекции конуса вращения по заданному положению геометрических элементов определителя ( $l$  – образующая,  $i$  – ось):  $i \perp H$ ;  $l \parallel F$ ; угол наклона образующей  $l$  к оси конуса  $i$  равен  $30^\circ$ ;  $l = 60$  мм.

Обозначить проекции очерковых образующих поверхности.



Построить проекции точек:  $A$  – видимой на видах спереди и слева на высоте 25 мм с помощью параллели;  $B$  – не видимой на видах спереди и слева на высоте 30 мм с помощью образующей.

3. Построить три проекции сферы  $R = 25$  мм. Обозначить три проекции главного фронтального и главного профильного меридианов и экватора сферы.

Построить проекции точек:  $A$  – видимой на видах спереди, сверху, слева;  $B$  – не видимой на видах спереди и сверху, видимой на виде слева;  $C$  – не видимой на всех видах.

4. Построить три проекции самопересекающегося тора по заданному положению и величине геометрических элементов определителя ( $l$  – образующая,  $i$  – ось):  $i \perp P$ ;  $l$  – дуга окружности радиуса 60 мм; диаметр экватора – 60 мм.

Обозначить проекции очерковых образующих поверхности.

Построить проекции точек:  $A$  – видимой на всех видах;  $B$  – не видимой на всех видах;  $C$  – видимой на видах спереди и слева и не видимой на виде сверху.

5. Построить две проекции кольцевого тора по заданному положению и величине геометрических элементов определителя ( $l$  – образующая,  $i$  – ось):  $i \perp H$ ;  $l$  – окружность радиусом  $R = 25$  мм, плоскость которой параллельна  $F$ ; расстояние от оси вращения до центра образующей  $l$  равно 45 мм.

Обозначить проекции линий очерка поверхности.

Построить проекции точек, лежащих:

$A$  – на параллели диаметром 120 мм, видимой на видах спереди и сверху;

$B$  – на параллели диаметром 60 мм в передней части тора, не видимой на виде сверху;

$C$  – на параллели диаметром 90 мм в задней части тора, видимой на виде сверху.

## 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГРАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В результате пересечения гранных поверхностей получается многоугольник, а в результате пересечения гранных тел – многогранник. Линию пересечения гранных поверхностей можно построить двумя способами:

1. Построить линию пересечения граней одной поверхности с гранями другой, т.е. построить линию пересечения плоскостей. Этот метод называется *методом «граней»*.

2. Построить точки пересечения ребер одной поверхности с гранями другой, т.е. построить точки пересечения прямой линии с плоскостью. Этот метод называется *методом «рёбер»*.

В частном случае, когда одна из гранных поверхностей занимает *проецирующее* положение (это может быть прямая призма), в условиях задачи имеем *одну проекцию* линии пересечения. *Вторая проекция* линии пересечения строится по принадлежности не проецирующей поверхности, а *третья* – по координатам. Такой пример показан на рис. 6.1.

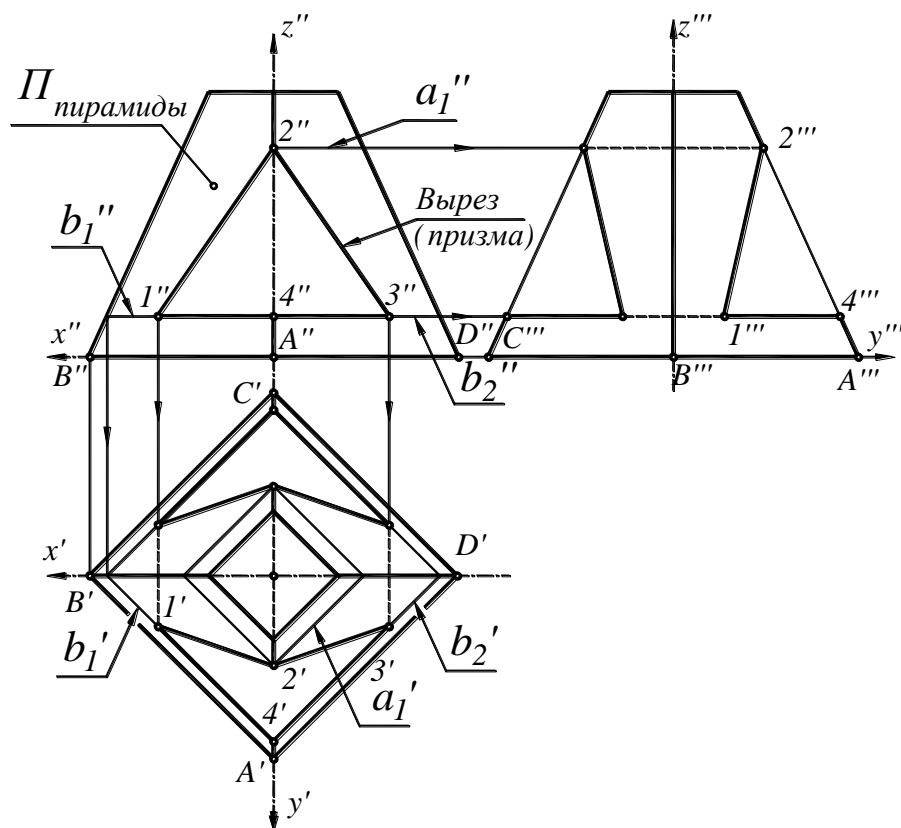


Рис. 6.1. Пересечение призмы и пирамиды

Четырехгранная правильная пирамида имеет трехгранный призматический вырез. Призма занимает фронтально проецирующее положение. Проекция призмы на фронтальную плоскость проекций будет являться проекцией линии пересечения призмы и пирамиды. Заключаем гранные тела в относительную систему координат  $\{x, y, z\}$  и выделяем на главном виде характерные точки  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Находим горизонтальные проекции этих точек, как точек, принадлежащих граням пирамиды. Для этого через выделенные точки проводим линии  $a_1, b_1, b_2$ , строим горизонтальные проекции этих линий и по линиям проекционной связи находим горизонтальные проекции характерных точек.

Профильные проекции точек строим по координатам. Соединив проекции точек, получаем проекции линий пересечения.

Если обе пересекающиеся гранные поверхности занимают *проецирующее* положение, т.е. пересекаются две прямые призмы, то в условиях задачи имеем *две проекции* линий пересечения, *третья* проекция строится по координатам. На рисунке 6.2 показан случай пересечения горизонтально-проецирующей четырехгранной призмы с профильно-проецирующей трехгранной призмой.

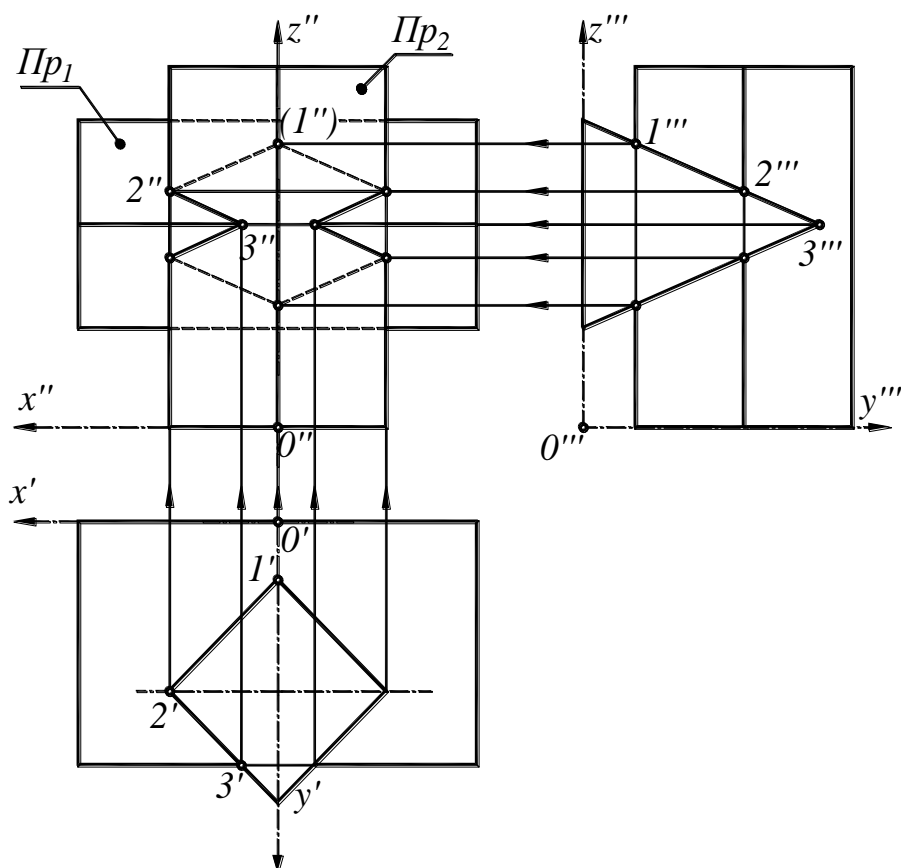


Рис. 6.2. Пересечение призматических поверхностей

Следовательно, имеем горизонтальную и профильную проекции линий пересечения. На виде сверху выделяем характерные точки  $\{1', 2', 3'\}$ . Так как изображение симметрично, то можно выделить характерные точки с одной стороны. Находим проекции выделенных точек на виде слева –  $\{1'', 2'', 3''\}$ .

Через характерные точки проводим линии проекционной связи в направлении строящейся проекции линии пересечения на главном виде. На пересечении соответствующих линий проекционной связи находим недостающие проекции характерных точек. Соединяем их между собой в соответствии с конфигурацией призмы и с учетом видимости характерных точек (на главном виде будет виден участок  $[2, 3]$ , а участок  $[2, 1]$  – не виден). Определяем также видимость ребер. Ребра четырехгранной

призмы от характерной точки  $I$  до симметричной ей точки и от точки  $2$  до симметричной ей точки попадают внутрь трехгранной призмы и изображаются условной тонкой линией на виде спереди и виде слева. Аналогично, ребро трехгранной призмы от точки  $3$  до симметричной ей точки попадает внутрь четырехгранной призмы и также изображается условной тонкой линией на виде спереди и виде сверху.

## 7. РАЗЛИЧНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 7.1. Общий случай пересечения поверхностей

В результате пересечения поверхностей в общем случае получается пространственная кривая. Порядок этой кривой определяется произведением порядков уравнений, описывающих пересекающиеся поверхности, и не может быть больше их произведения.

Пусть две произвольные поверхности  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис.7.1) пересекаются по кривой  $J$ , которую можно представить как множество точек  $A_i$ :

$$J = \{A_i\}; \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Это множество одновременно принадлежит обоим пересекающимся поверхностям:

$$\{A_i\} \subset \Pi_1; \quad \{A_i\} \subset \Pi_2.$$

Таким образом, построение линии пересечения двух поверхностей сводится к определению множества точек пересечения линий, принадлежащих этим поверхностям.

Каждую точку множества  $\{A_i\}$  можно рассматривать как результат пересечения трёх поверхностей. Следовательно, для нахождения точек пересечения помимо двух заданных поверхностей необходима третья *вспомогательная поверхность*, часто называемая «*поверхность-посредник*»  $Q_1$ .

Если ввести вспомогательную поверхность  $Q_1$ , то она пересечёт заданные поверхности по линиям  $a_1$  и  $b_1$ :

$$\Pi_1 \cap Q_1 = a_1;$$

$$\Pi_2 \cap Q_1 = b_1.$$

Прямые  $a_1$  и  $b_1$  пересекаются между собой в точке  $A_1$ , которая принадлежит линии пересечения  $J$ :

$$a_1 \cap b_1 = A_1;$$

$$A_1 \in J.$$

При введении вспомогательных поверхностей  $Q_i$  реализуется приведенный ниже алгоритм построения линии пересечения поверхностей:

- 1) строим проекции вспомогательных поверхностей  $Q_i$ ;
- 2) строим линии  $a_i$  и  $b_i$  пересечения заданных поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с вспомогательной поверхностью  $Q_i$ :

$$a_i = \Pi_1 \cap Q_i;$$

$$b_i = \Pi_2 \cap Q_i;$$

- 3) находим точку пересечения этих линий  $A_i$ :

$$a_i \cap b_i = A_i.$$

Так как точка пересечения  $A_i$  принадлежит одновременно обеим поверхностям, то она принадлежит линии пересечения  $J$ :

$$A_i \in J;$$

- 4) используя достаточное количество вспомогательных поверхностей (поверхностей – посредников) строим ряд проекций точек, принадлежащих линии пересечения.

Следовательно, при введении третьей поверхности задача о пересечении двух поверхностей сводится к более простой задаче пересечения двух линий, принадлежащих заданным поверхностям.

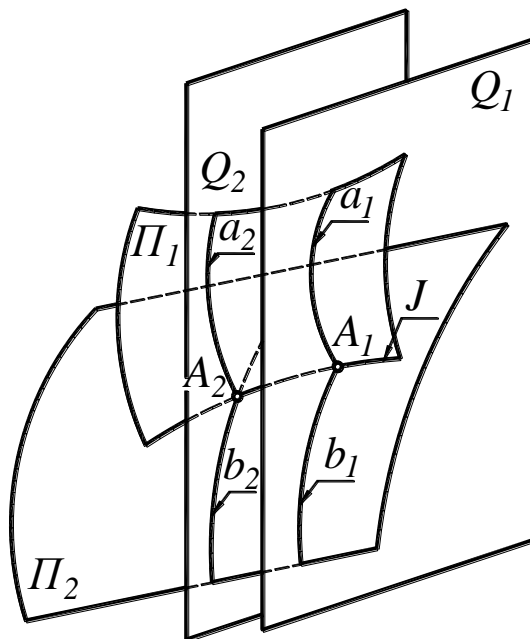


Рис. 7.1. Общий случай пересечения поверхностей

К посреднику предъявляется одно требование: с обеими заданными поверхностями он должен пересекаться по простым линиям – прямым или окружностям. В качестве поверхности-посредника могут использоваться плоскости, сферические, цилиндрические, конические и другие поверхности. Выбор поверхности-посредника зависит от вида пересекающихся поверхностей, от их взаимного положения и положения относительно плоскостей-проекций.

Взаимное положение поверхностей вращения определяется взаимным положением их осей. Оси пересекающихся поверхностей вращения могут быть:

- 1) параллельными –  $i_1 \parallel i_2$ ;
- 2) пересекающимися –  $i_1 \cap i_2$ ;
- 3) совпадающими (соосные поверхности) –  $i_1 = i_2$ ;
- 4) скрещивающимися –  $i_1 \underline{\bullet} i_2$ .

Определив взаимное положение пересекающихся поверхностей вращения и выбрав поверхность-посредник, необходимо выделить и построить характерные и промежуточные точки линии пересечения и определить ее видимость. Затем определяем видимость очерков поверхностей.

*Метод поверхностей-посредников* является основным методом построения проекций линии пересечения поверхностей.

## 8. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ. СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

### 8.1. Построение линии пересечения

Если оси пересекающихся поверхностей параллельны, то для построения точек, принадлежащих их линии пересечения, выбирают *вспомогательные* секущие плоскости, перпендикулярные осям. Эти плоскости будут пересекать заданные поверхности по окружностям (параллелям  $p$ ).

Рассмотрим этот случай пересечения на конкретном примере (рис. 8.1). Поверхность прямого кругового конуса  $П_k$ , ось которого  $i_k$  перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций  $H(i_k \perp H)$ , пересекается с поверхностью сферы  $П_{сф}$ . Среди бесчисленного множества осей сферы выберем ось, параллельную оси конуса ( $i_{сф} \parallel i_k$ ), т.е.  $i_{сф}$  тоже будет перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций  $H$ . Выбираем вспомогательные секущие плоскости  $Q_i$ , перпендикулярные осям конуса и сферы ( $Q_i \perp i_k, i_{сф}$ ). Следовательно,  $Q_i$  будет пересекать  $П_k$  и  $П_{сф}$  по

параллелям  $p_k$  и  $p_{сф}$ . Так как эти параллели лежат в одной плоскости  $Q_i$ , то они, пересекаясь, дадут точки  $A_i$ , принадлежащие линии пересечения  $J$ .

$$\left. \begin{aligned} Q_i \cap \Pi_k &= p_k \\ Q_i \cap \Pi_{сф} &= p_{сф} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_k \cap p_{сф} = A_i \in J .$$

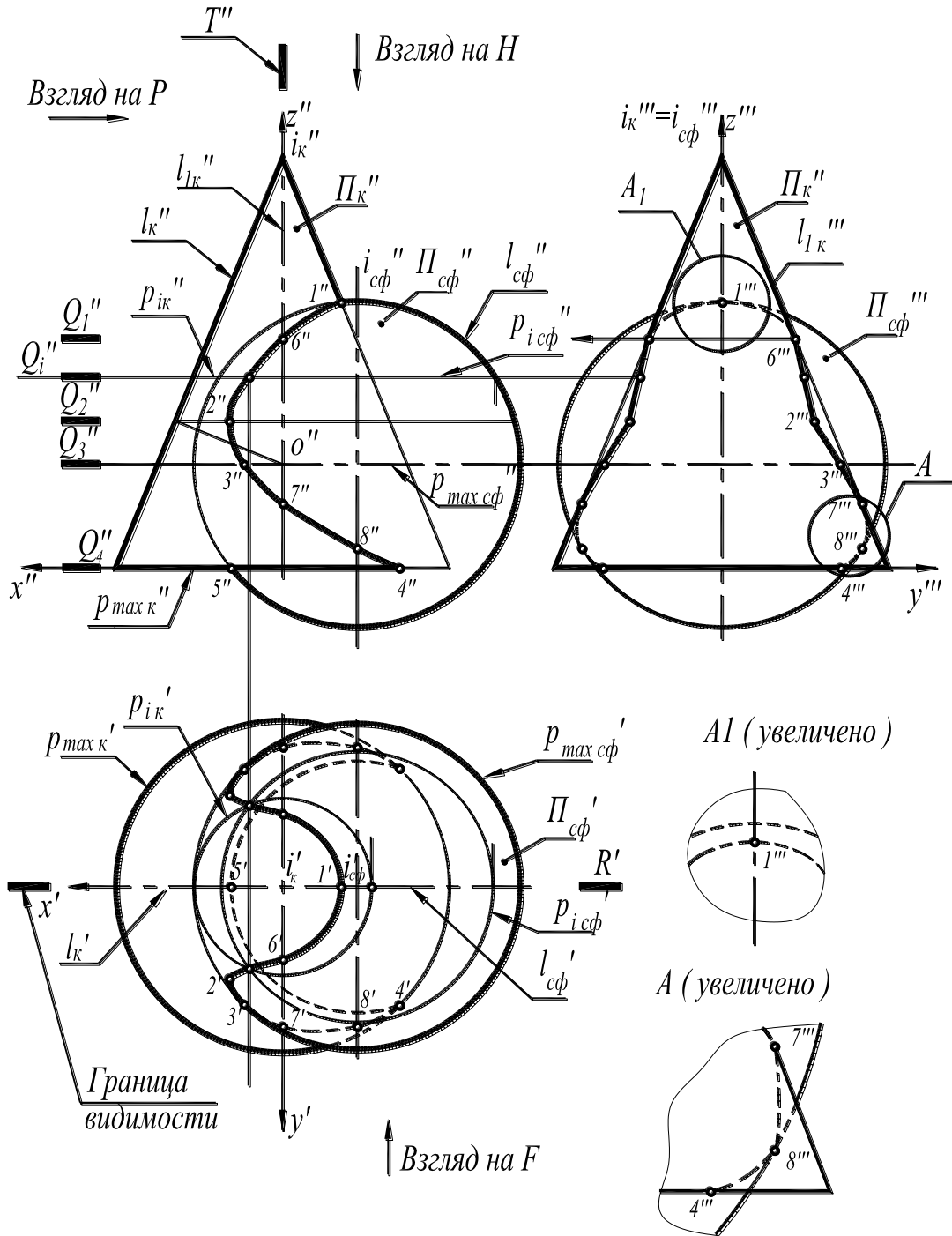


Рис. 8.1. Построение линии пересечения поверхностей с параллельными осями

Проекция линии пересечения поверхностей расположены в зоне наложения проекций поверхностей, которая заштрихована в клетку (рис.8.2).

В начале находим *характерные* точки линии пересечения (рис.8.1). Рассматриваемые пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии  $R \in i_k, i_{сф}$ , которая параллельна фронтальной плоскости проекций:  $R \parallel F$ . В этой плоскости лежат очерковые образующие конуса  $l_k$  и сферы  $l_{сф}$ . Пересекаясь, они дают характерную точку  $1$  (точка  $1$  – очевидная, т.к. определяется без дополнительных построений по линии проекционной связи).

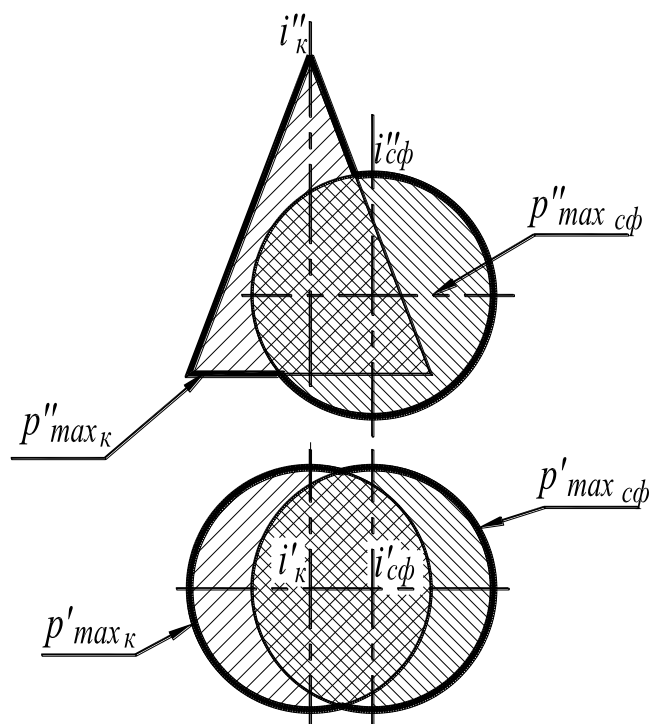


Рис. 8.2. Определение зоны расположения проекций линии пересечения

Так как пересекаются две поверхности второго порядка, то линия их пересечения  $J$  будет кривой четвертого порядка. При проецировании на фронтальную плоскость проекций  $F$  порядок линии пересечения  $J$  понизится вдвое, т.к. пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии  $R \parallel F$  (см. раздел 13). Следовательно, фронтальная проекция линии пересечения будет *параболой*, потому что в предельном случае, когда оси совпадут  $i_k \equiv i_{сф}$ , линия пересечения распадется на две параллельные прямые.

Парабола имеет экстремум. Для нахождения экстремальной точки выделим на сфере еще одну ось  $i_{1сф} \perp i_{сф}$  и найдем точку ее пересечения с осью конуса:  $O = i_k \cap i_{1сф}$ . Из точки  $O$  опустим перпендикуляр на образующую конуса. Величина перпендикуляра является радиусом



сферы, вписанной в конус. Эта сфера касается конуса по параллели. Проведем через эту параллель секущую плоскость  $Q_2$  и определим экстремальную точку 2.

Для нахождения точек, лежащих на горизонтальной проекции очерка сферы и делящих линию пересечения на видимую и невидимую части, проводим секущую плоскость  $Q_3$  через  $p_{\max \text{ сф}}$  (ее экватор). Находим точку  $3 \in p_{\max \text{ сф}}$ .

Для определения точек, лежащих на горизонтальной проекции очерка конуса  $p_{\max \text{ к}}$ , проведем секущую плоскость  $Q_4$  через плоскость основания конуса и найдем точку  $4 \in p_{\max \text{ к}}$ . Эта же плоскость определяет линию пересечения плоскости основания конуса со сферой (окружность).

Для более точного построения линий пересечения вводятся дополнительные секущие плоскости.

Профильная проекция линии пересечения строится по координатам относительной системы координат (ОСК), но точки, лежащие на профильном очерке конуса  $l_{1\text{к}}''$ , могут быть найдены как очевидные. Для этого введем еще одну секущую плоскость  $T$ , проходящую через ось конуса  $i_{\text{к}}$  параллельно профильной плоскости проекций  $P$  ( $T \supset i_{\text{к}}$ ,  $T \parallel P$ ).

Плоскость  $T$  пересекает конус по очерковым образующим  $l_{1\text{к}}$ , а сферу – по параллели (из семейства параллелей, перпендикулярных оси  $i_{1\text{сф}}$ ). Точки пересечения этой параллели с профильным очерком конуса  $l_{1\text{к}}$  дадут характерные точки 6 и 7, проекции которых на главном виде находятся на оси конуса. Точка 8, лежащая на фронтальной проекции профильного очерка  $p_{1\max \text{ сф}}$ , также является очевидной.

## 8.2. Определение видимости линии пересечения

После построения характерных и промежуточных точек линии пересечения необходимо определить *видимость линии пересечения и очерков поверхностей*. Переход от видимой части линии пересечения к невидимой может произойти на очерковых линиях поверхностей. Следовательно, максимальные параллели (экваторы), являющиеся очерками поверхностей, и очерковые образующие будут определять видимость линии пересечения. Видимость линии пересечения на одном из видов определяется при помощи другого вида: видимость *на виде спереди* – при помощи вида сверху (или вида слева), *на виде сверху* – при помощи вида спереди (или вида слева), *на виде слева* – при помощи вида спереди (или вида сверху).

На рисунке 8.3 показано определение видимости линии пересечения поверхностей конуса и сферы.

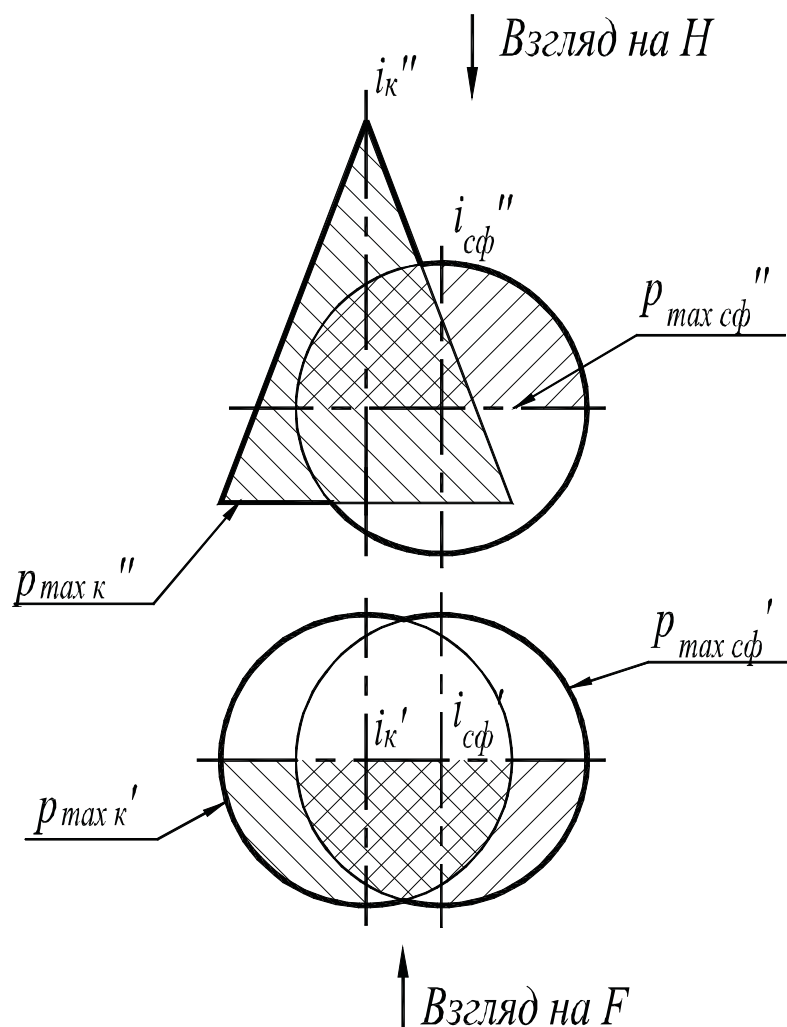


Рис. 8.3. Определение видимости линии пересечения поверхности

Для определения видимости линии пересечения поверхностей на *виде спереди* достаточно видимые на этом виде части поверхностей заштриховать в разные стороны на *виде сверху*. Часть линии пересечения, оказавшаяся в зоне, заштрихованной в клетку, будет видима на *виде спереди*.

Аналогично, для определения видимости линии пересечения поверхностей на *виде сверху* заштрихуем на *виде спереди* в разные стороны части поверхностей, видимые на *виде сверху*.

На рис. 8.1 на *виде спереди* видима вся проекция линии пересечения, т.к. по направлению взгляда, перпендикулярному фронтальной плоскости проекций  $F$ , границей видимости линии пересечения являются очерковые образующие  $l_k$  и  $l_{sf}$ , лежащие в плоскости общей симметрии конуса и сферы  $R$ . Плоскость  $R$  делит линию пересечения, как и всё геометрическое тело, на две симметричные части.

На виде сверху видимость линии пересечения определяется экватором сферы –  $p_{\max \text{ сф}}$ . По направлению взгляда, перпендикулярному горизонтальной плоскости проекций  $H$ , видима только часть линии пересечения  $\{1 \dots 3\}$ , где точка  $3 \in p_{\max \text{ сф}}$ .

На виде слева границей видимости линии пересечения является очерк конуса. По направлению взгляда, перпендикулярному профильной плоскости проекций  $P$ , видима часть линии пересечения  $\{6 \dots 7\}$ , где точки 6 и 7 принадлежат очерку конуса  $l_{1к}$ .

### 8.3. Определение видимости очерков поверхностей

При определении видимости очерков поверхностей необходимо учитывать взаимное положение поверхностей, а также то обстоятельство, что при пересечении взаимодействуют только сами поверхности, а внутренняя часть пространства, ограниченная поверхностями считается монолитной. Поэтому, если очерк одной поверхности оказывается *внутри* другой поверхности, то он изображается *условной тонкой линией* (вид спереди, вид сверху и вид слева на рис. 8.1). Так же, как и в случае определения видимости линии пересечения, видимость одной проекции определяем при помощи другой. С позиции наблюдателя определяем, очерк какой поверхности будет ближе к нему. Глядя на вид спереди по направлению, перпендикулярному горизонтальной плоскости проекций  $H$ , видим, что ближе к наблюдателю находится экватор сферы ( $p_{\max \text{ сф}}$ ), а основание конуса ( $p_{\max \text{ к}}$ ) – дальше от него. Следовательно, на виде сверху очерк сферы  $p'_{\max \text{ сф}}$  будет виден до точки 3, а далее он уходит внутрь конуса. Очерк конуса  $p'_{\max \text{ к}}$  будет частично загораживаться сферой, также как и линия пересечения плоскости основания конуса со сферой. На виде слева по направлению взгляда, перпендикулярному профильной плоскости проекций  $P$ , впереди (ближе к наблюдателю) находится очерк конуса. Причем часть его между точками 6 и 7 оказывается внутри сферы и изображается сплошной тонкой линией. Очерк сферы находится за очерком конуса, а его небольшая часть от точки 8 до основания конуса оказывается внутри конуса и будет изображаться условной тонкой линией (выносной элемент  $A$  на рис. 8.1). После этого все изображения обводятся с учетом ранее определенной видимости линии пересечения и очерков поверхностей.

## 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ. СПОСОБ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

### 9.1. Пересечение соосных поверхностей

Поверхности, имеющие общую ось вращения, называются *соосными* поверхностями вращения.

Если одна поверхность образуется вращением образующей линии  $l_T$ , а другая – образующей  $l_K$  (рис. 9.1) вокруг общей оси ( $i_K = i_T$ ), то общие точки образующих  $1, 2$  будут описывать параллели, общие для обеих поверхностей. Когда ось  $i$  параллельна фронтальной плоскости проекций  $F$ , параллели изображаются в виде отрезков прямых ( $p_1'', p_2''$ ). В случае, когда ось  $i$  перпендикулярна плоскости проекций  $H$  – параллели изображаются в виде концентрических окружностей ( $p_1', p_2'$ ).

Теорема: если две соосные поверхности вращения имеют хотя бы одну общую точку, то через неё можно провести общую параллель пересекающихся поверхностей.

Таким образом, *две соосные поверхности вращения пересекаются друг с другом по параллелям* (окружностям), причем число линий пересечения равно числу точек пересечения образующих линий поверхностей (меридианов).

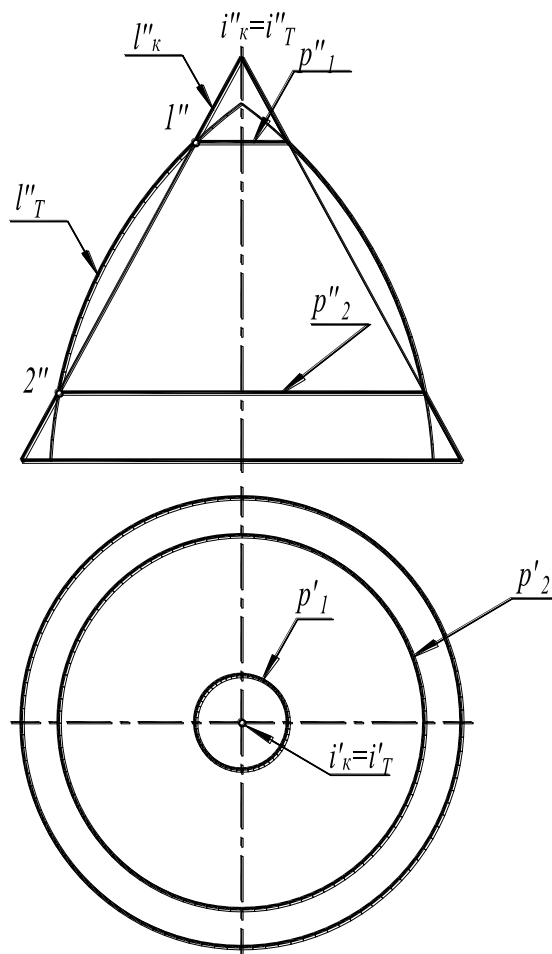


Рис. 9.1. Пересечение соосных поверхностей вращения

Сфера (рис. 9.2) имеет бесчисленное множество осей вращения, так как любая прямая, проходящая через центр сферы, может быть ее осью ( $i_1, i_2, i_3, i_4$  и т.д.). Когда центр сферы находится на оси какой-либо поверхности вращения, то сфера соосна с этой поверхностью, и линией их пересечения является параллель (окружность). Если оси  $i_1, i_2, i_3$  и  $i_4$  параллельны какой-либо плоскости проекций (на рис. 9.2 они параллельны фронтальной плоскости проекций  $F$ ), то линии пересечения сферы с цилиндрической поверхностью –  $p_{ц}$ , с конической поверхностью –  $p_{к}$ , с другой сферической поверхностью –  $p_{сф}$ , с торовой поверхностью –  $p_{т}$  и изображаются в виде отрезков прямых. Через две точки (центры двух сфер) всегда можно провести единственную прямую, поэтому две сферы всегда соосны.

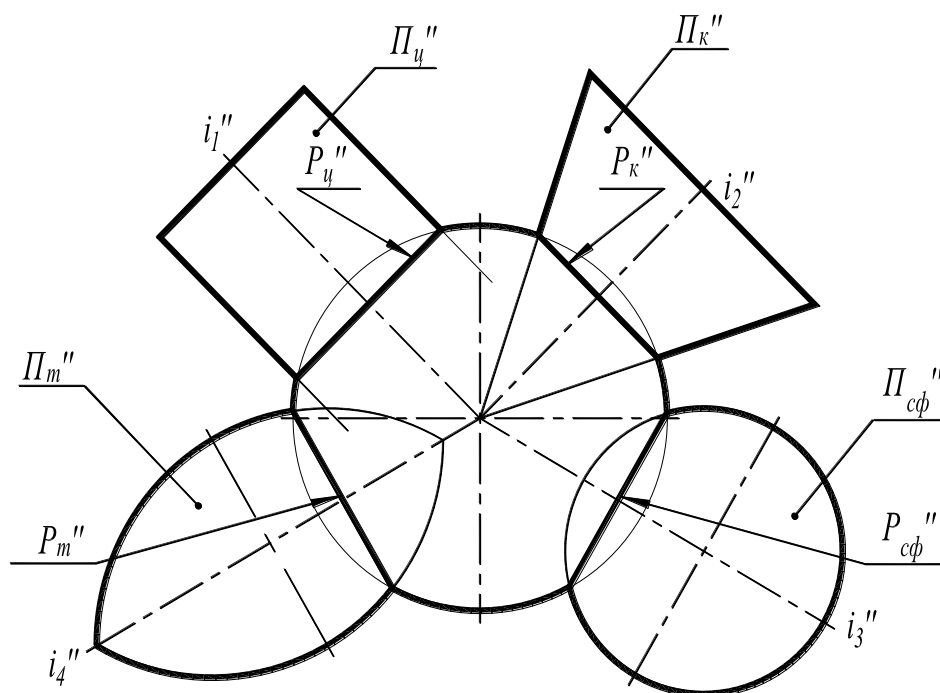


Рис. 9.2. Пересечение сферы с соосными поверхностями вращения

Свойство сферы пересекаться с любой соосной поверхностью вращения по параллелям (окружностям) делает ее удобной *поверхностью-посредником* для построения линии пересечения поверхностей с пересекающимися осями.

## 9.2. Пресечение поверхностей вращения с пересекающимися осями

Сферы с общим центром и разными радиусами называются *концентрическими*.

Сферы применяются в качестве *поверхности-посредника* при выполнении трёх условий:

1) *пересекающиеся поверхности должны быть поверхностями вращения;*

2) *оси поверхностей должны пересекаться;*

3) *общая плоскость симметрии, образованная пересекающимися осями, должна быть параллельна какой-либо плоскости проекций.*

Если по условию задачи общая плоскость симметрии не параллельна плоскости проекций, то дополнительным проецированием или вращением следует преобразовать условие задачи таким образом, чтобы она стала параллельна плоскости проекций.

Применение в качестве посредника сферы, соосной с пересекающимися поверхностями, рассмотрим на примере построения проекций линии пересечения  $J$  конической поверхности  $\Pi_k$  и цилиндрической поверхности  $\Pi_{ц}$ . Решение этой задачи показано на рисунке 9.3, а наглядное изображение геометрической модели, полученной в результате пересечения конуса и цилиндра – на рисунке 9.4. Оси заданных поверхностей пересекаются в точке  $O$  и расположены в общей плоскости симметрии  $T = i_k \cap i_{ц}$ , которая является фронтальной

плоскостью уровня ( $T \parallel F$ ), то есть все перечисленные выше условия применимости метода концентрических сфер выполняются.

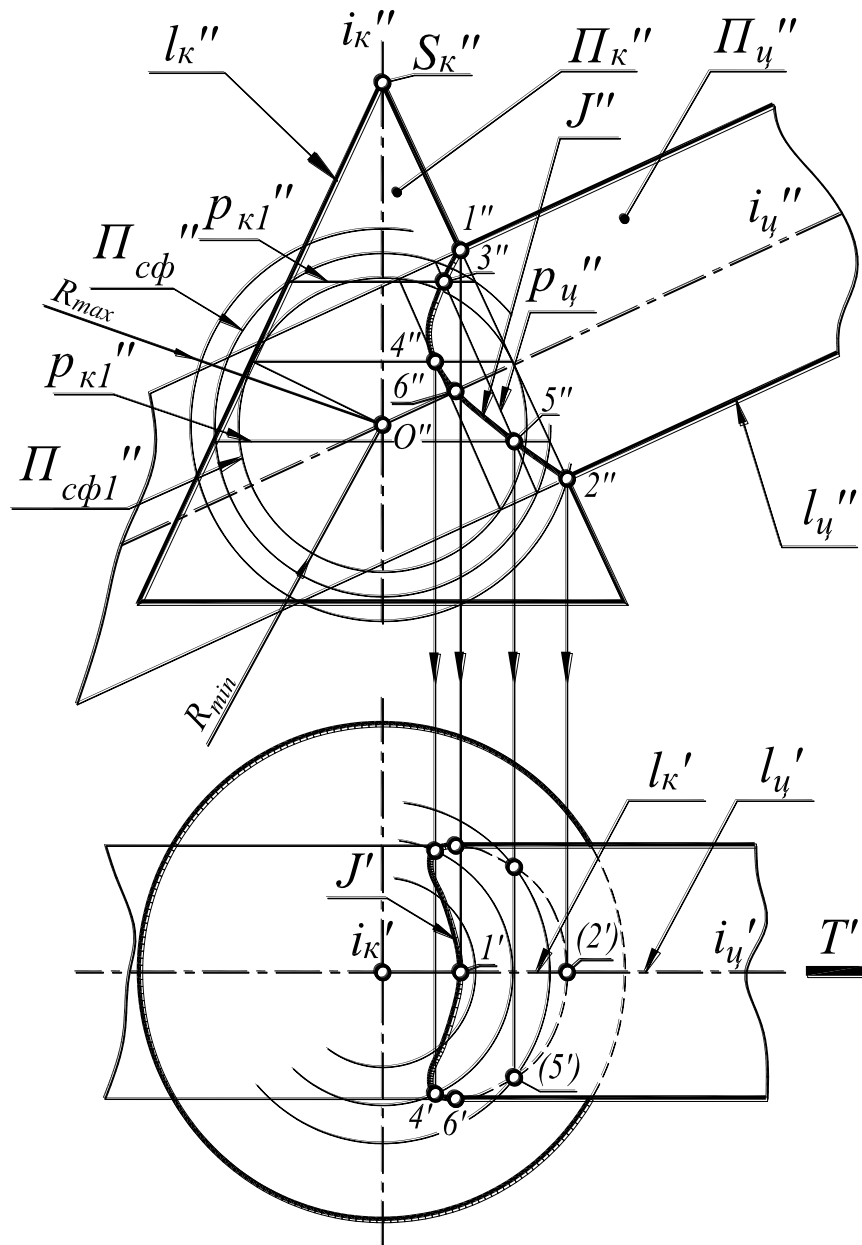


Рис. 9.3. Пересечение поверхностей вращения с пересекающимися осями

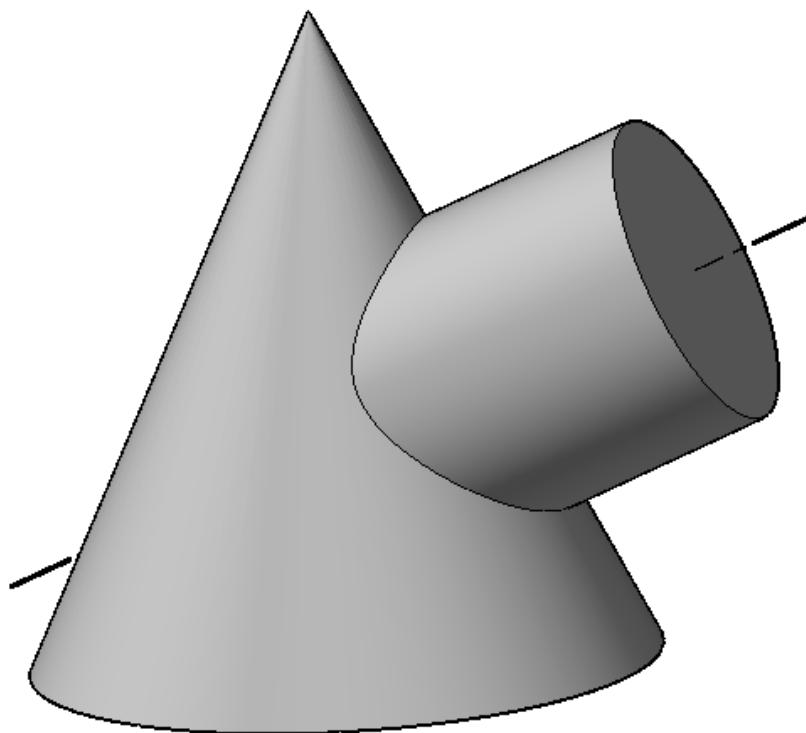


Рис. 9.4. Наглядное изображение объединённой геометрической модели

На первом этапе решения задачи необходимо выделить характерные точки  $1$  и  $2$ . Принадлежность этих точек линии пересечения определяется тем, что их фронтальные проекции  $1''$  и  $2''$  являются точками пересечения проекций очерковых образующих линий конуса  $l_k''$  и цилиндра  $l_c''$ , которые располагаются в общей плоскости симметрии  $T$ .

Общий алгоритм решения задачи остается прежним: заданные поверхности нужно пересечь семейством вспомогательных поверхностей-посредников и найти точки пересечения полученных при этом линий.

Если из точки пересечения осей  $O$  как из центра провести сферу  $\Pi_{сф}$ , пересекающую заданные поверхности, то эта сфера будет соосна и с конической поверхностью  $\Pi_k$ , и с цилиндрической  $\Pi_c$ , и поэтому пересечётся с каждой из них по параллелям (окружностям, то есть по графически простым линиям). В этом случае сфера пересечётся с конусом по двум параллелям.

Фронтальные проекции параллелей конуса  $p_{k1}''$  и  $p_{k2}''$  и параллель цилиндра  $p_c''$  представляют собой отрезки прямых, так как оси вращения данных поверхностей параллельны фронтальной плоскости проекций  $F$  (см. раздел 9.1). Пересечение отрезков  $p_{k1}''$  и  $p_c''$  определяет точку  $3''$ , а пересечение отрезков  $p_{k2}''$  и  $p_c''$  – точку  $5''$ . Эти точки принадлежат фронтальной проекции линии пересечения  $J''$ .

Для нахождения последующих точек необходимо воспользоваться другими сферами, концентричными со сферой  $\Pi_{сф}$ , т.е. сохраняя центр  $O$ ,



изменять радиусы сфер. Величины радиусов сфер-посредников должны находиться в интервале:  $R_{\min} \leq R \leq R_{\max}$ . Радиусы максимальной и минимальной сфер, необходимых для построения точек кривой  $J$ , определяются из условия задачи. Сфера  $R_{\min}$  вписана (то есть касается её) в одну из пересекающихся поверхностей (в данном примере – в коническую) и пересекает другую. Сфера  $R_{\max}$  – это предельная сфера, когда параллели, по которым она пересекает заданные поверхности, касаются друг друга в точке 2".

Согласно *требованиям к посреднику*, он должен пересекать обе заданные поверхности таким образом, чтобы полученные линии пересечения пересекались между собой. Таким образом, *радиус максимальной сферы*  $R_{\max}$  равен расстоянию от проекции центра  $O''$  до наиболее удаленной точки пересечения очерковых образующих линий  $l_k''$  и  $l_{ц}'' - 2''$ .

Чтобы определить *радиус наименьшей сферы*  $R_{\min}$ , необходимо провести через точку  $O''$  нормали к очерковым линиям заданных поверхностей. Большой из отрезков этих нормалей и определит  $R_{\min}$ , так как соответствующая сфера будет касаться поверхности конуса  $\Pi_k$  и пересекать цилиндрическую поверхность  $\Pi_{ц}$ . Если в качестве  $R_{\min}$  взять отрезок нормали к очерковой линии цилиндра, то такая сфера не пересечет поверхность конуса. В качестве минимальной выбирается сфера, радиус которой  $R_{\min}$  равен длине наибольшего из отрезков нормалей к очерковым линиям пересекающихся поверхностей. В рассматриваемой задаче сфера  $\Pi_{сф1}$  с радиусом  $R_{\min}$  касается конической поверхности по параллели  $p_{к1}$  и пересекает цилиндрическую поверхность по параллели  $p_{ц1}$ . Пересечение проекций этих линий  $p_{к1}''$  и  $p_{ц1}''$  определяет точку 4" кривой  $J''$ .

Горизонтальные проекции точек линии пересечения строятся по принадлежности одной из пересекающихся поверхностей. В данном случае они построены по принадлежности поверхности конуса при помощи его параллелей. Например, чтобы найти горизонтальную проекцию точки 3', следует сначала провести параллель  $p_k''$  через точку 3''. Затем построить горизонтальную проекцию параллели  $p_k'$  и по линии проекционной связи определить на ней положение точки 3'.

При построении горизонтальной проекции линии пересечения  $J'$  особое внимание следует обратить на очерковую точку  $b'$ . Фронтальная проекция  $b''$  есть точка пересечения проекции оси цилиндра  $i_{ц}''$  и кривой  $J''$ . В пространстве точка  $b$  соответствует точке входа внутрь конуса очерковой образующей цилиндра на виде сверху. Горизонтальная проекция точки  $b - b'$  лежит на очерке и отделяет проекцию видимой части линии пересечения  $J'$  от невидимой. При построении вида сверху будет также невидимой и часть окружности нижнего основания конуса, закрытая цилиндрической поверхностью  $\Pi_{ц}$ .

Проекция линии пересечения  $J''$  является гиперболой.

## 10. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ СО СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ. МЕТОД ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИХ СФЕР

Для построения линии пересечения поверхностей вращения, оси которых скрещиваются, используется метод *эксцентрических сфер*, то есть сфер с разными центрами. При этом скрещивающиеся оси должны быть взаимно перпендикулярны, а одна из пересекающихся поверхностей должна быть *открытым тором*. Пересекающиеся поверхности должны иметь общую плоскость симметрии, параллельную какой-либо плоскости проекций.

Рассмотрим открытый тор, ось которого перпендикулярна фронтальной плоскости проекций:  $i_T \perp F$  (рис. 10.1). При пересечении тора плоскостью  $Q$ , перпендикулярной фронтальной плоскости проекций ( $Q \perp F$ ) и проходящей через ось вращения тора  $i_T$ , получается окружность

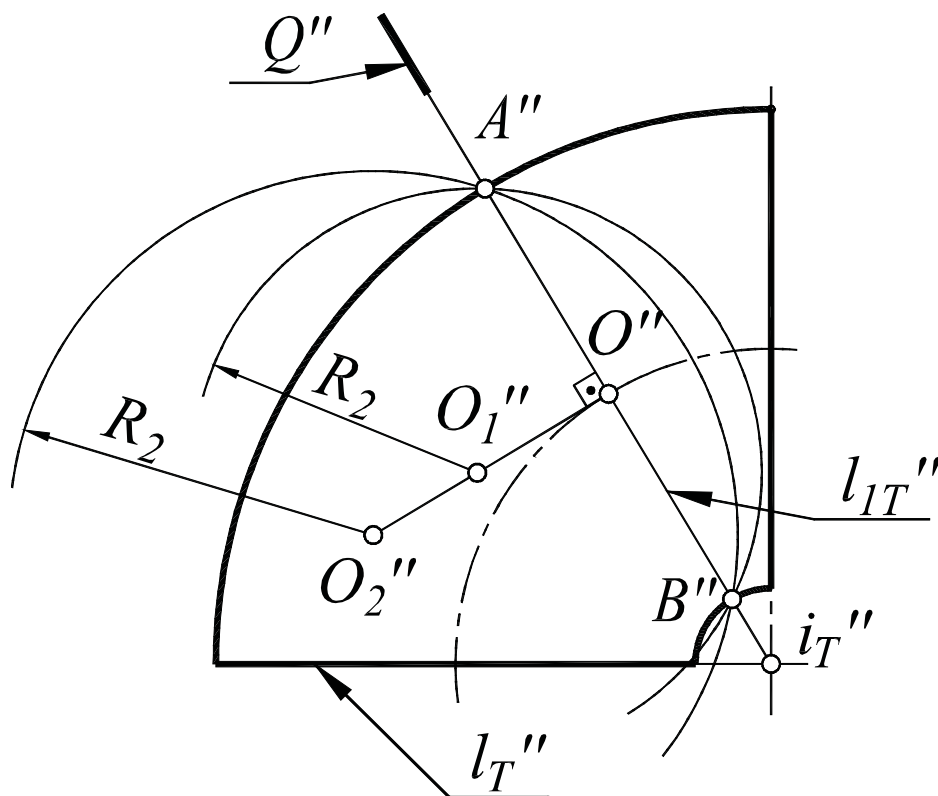


Рис. 10.1. Пересечение тора с плоскостью

(образующая тора  $l_{1T}$ ), центр которой  $O''$  лежит на криволинейной оси тора. Но любая окружность может рассматриваться как результат пересечения сферы с плоскостью. Следовательно, окружность  $l_{1T}$  может получиться при пересечении плоскости  $Q$  с рядом эксцентрических сфер с радиусами  $R_1, R_2$  и т.д. Центры  $O_1, O_2$  этих сфер (рис.10.1) расположены на

перпендикуляре к плоскости  $Q$ , проведенном через центр  $O$ . Этот перпендикуляр касается криволинейной оси тора и лежит в одной плоскости с ней. Величины радиусов  $R_1, R_2$  представляют собой расстояние от соответствующего центра  $O_1, O_2$  до точек  $A$  или  $B$  окружности  $l_{1T}$ .

Рассмотренная интерпретация линий пересечения тора с плоскостью, проведенной через его ось вращения, позволяет решать задачи на построение линий пересечения тора с поверхностями вращения, оси которых являются скрещивающимися с осью тора.

Рассмотрим пересечение тора с конусом (рис. 10.2). Ось тора перпендикулярна фронтальной плоскости проекций ( $i_T \perp F$ ), а ось конуса – перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций ( $i_K \perp H$ ). Оси поверхностей скрещиваются ( $i_T \cdot i_K$ ) и являются взаимно перпендикулярными ( $i_T \perp i_K$ ).

Эти поверхности имеют общую плоскость симметрии  $T$ , параллельную фронтальной плоскости проекций  $F$  ( $T \parallel F$ ). На основании этого можно сразу определить две характерные точки  $1$  и  $2$  как точки пересечения очерков поверхностей на виде спереди и виде сверху.

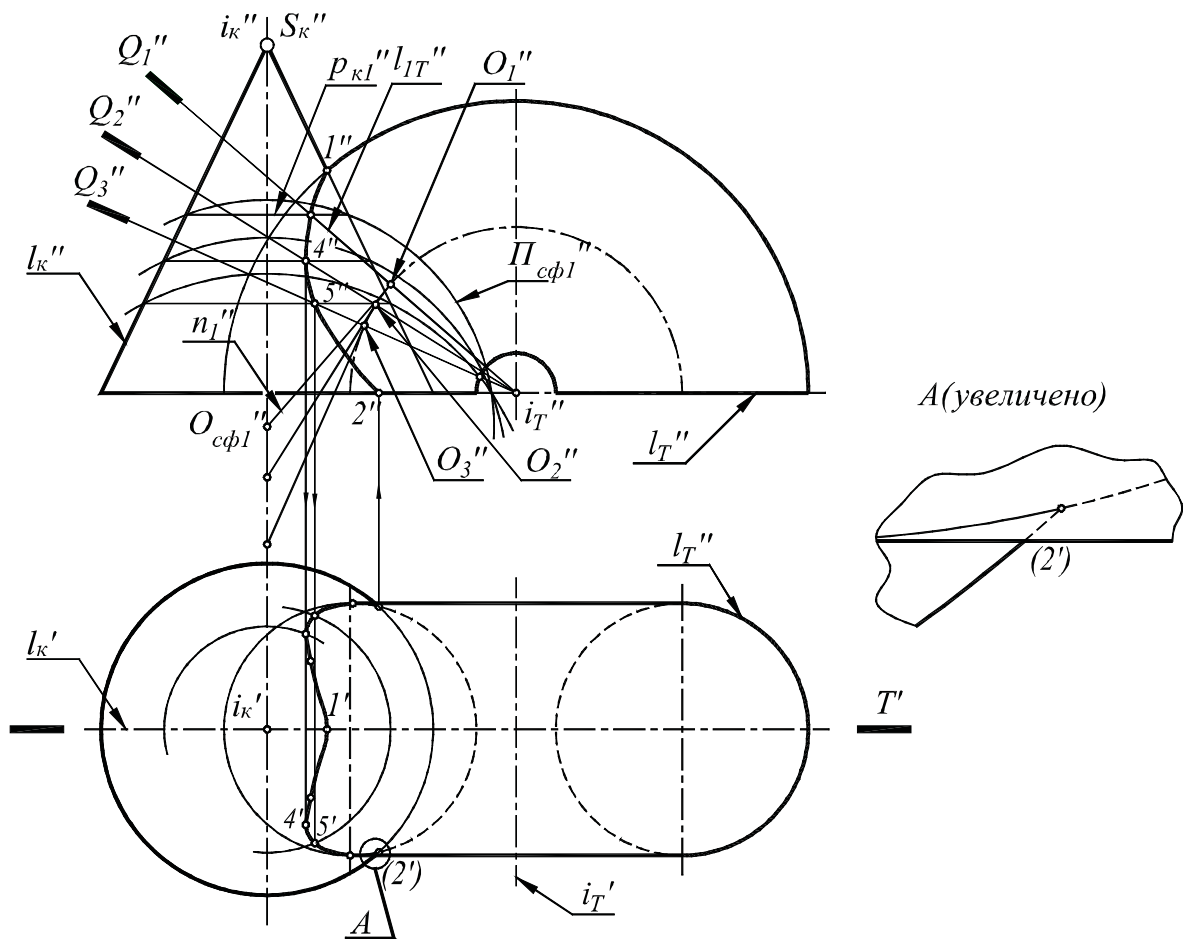


Рис. 10.2. Пересечение тора с конусом

Далее вводим ряд секущих плоскостей  $Q_1, Q_2, Q_3$ , которые проходят через ось тора и пересекают его по окружностям (образующим тора  $l_T$ ) с центрами  $O_1, O_2, O_3$ , лежащими на криволинейной оси тора. Эти же окружности могут быть получены как результат пересечения плоскостей с эксцентрическими сферами, центры которых лежат на перпендикулярах к плоскостям  $Q_1, Q_2, Q_3$ , восстановленных из центров  $O_1, O_2, O_3$ . Выбираем ту эксцентрическую сферу (например, сферу  $\Pi_{сф1}$ ), центр которой  $O_{сф1}$  получается при пересечении соответствующего перпендикуляра  $n_1$  с осью конуса  $i_k$ . Эта сфера пересекает конус по параллели конуса  $p_k$ , то есть тоже по окружности. Точка  $3$  пересечения окружностей тора  $l_{1T}$  и конуса  $p_k$  принадлежит линии пересечения тора и конуса. Повторив аналогичные построения для сфер с другими центрами, получим точки, принадлежащие линии пересечения. Соединив полученные точки, получим фронтальную проекцию линии пересечения. Горизонтальная проекция линии пересечения может быть построена по принадлежности одной из пересекающихся поверхностей (например, конусу) при помощи каркасных линий – параллелей или образующих. Обводим полученные проекции линии пересечения с учетом видимости.

## 11. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### 11.1. Одна из пересекающихся поверхностей является проецирующей

Если одна из поверхностей является проецирующей, то ее *вырожденная проекция* (вся поверхность спроецировалась в линию) включает проекцию линии пересечения. Вторая проекция этой линии строится из условия принадлежности ее точек непроецирующей поверхности (при помощи линий каркаса), а третья – по координатам относительной системы координат (ОСК).

Пусть требуется построить линию пересечения  $J$  конической поверхности  $\Pi_k$  с фронтально-проецирующей цилиндрической поверхностью  $\Pi_{ц}$  (рис. 11.1). Так как фронтальная проекция цилиндрической поверхности  $\Pi_{ц}''$  является вырожденной (спроецировалась в окружность), то она включает в себя проекцию линии пересечения  $J''$ . Таким образом, кривая  $J''$  определена на чертеже из анализа условия задачи без вспомогательных построений ( $\Pi_{ц}''=J''$ ). Горизонтальная проекция линии пересечения  $J'$  строится при помощи каркасных линий конической поверхности – параллелей или меридианов (образующих). Точки  $1, 2, 3, 4$  – характерные точки линии пересечения, а точки  $5$  и  $6$  – промежуточные.

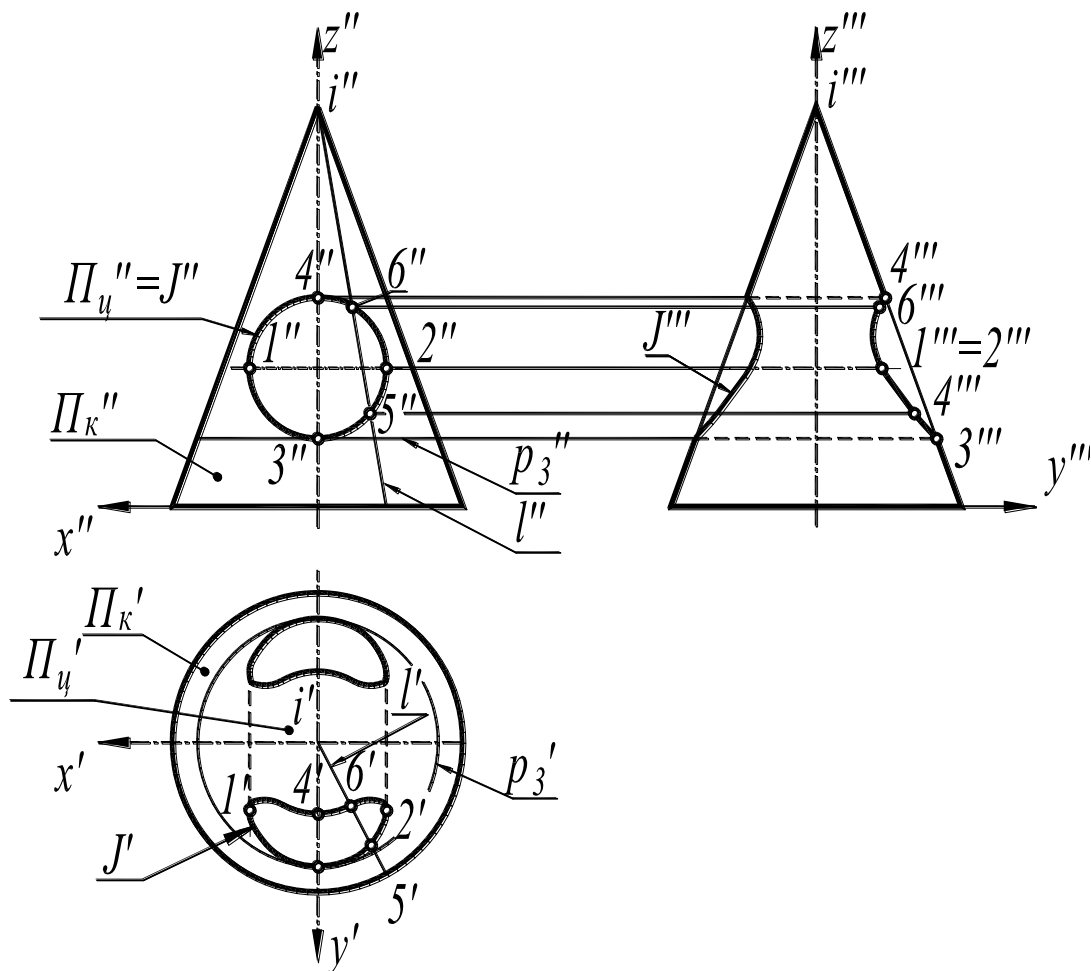


Рис. 11.1. Пересечение цилиндра с усеченным конусом

Профильная проекция линии пересечения  $J''$  построена по координатам ОСК. В данном случае построение проекций линии пересечения существенно упрощается, так как нет необходимости вводить поверхность-посредник. Для решения задачи достаточно использовать графически простые каркасные линии – параллели или меридианы – одной из пересекающихся поверхностей. В данном примере – по каркасным линиям конуса.

На рисунке 11.2 показано построение проекций линии пересечения конической поверхности  $\Pi_{\kappa}$  с поверхностью шестигранной призмы  $\Pi_{\text{пр}}$ . Поверхность призмы занимает профильно-проецирующее положение, то есть на виде слева вся поверхность призмы спроецировалась в шестиугольник. Каждая грань призмы параллельна оси вращения конуса, поэтому линии пересечения граней с поверхностью конуса являются гиперболами (за исключением вырожденных проекций).

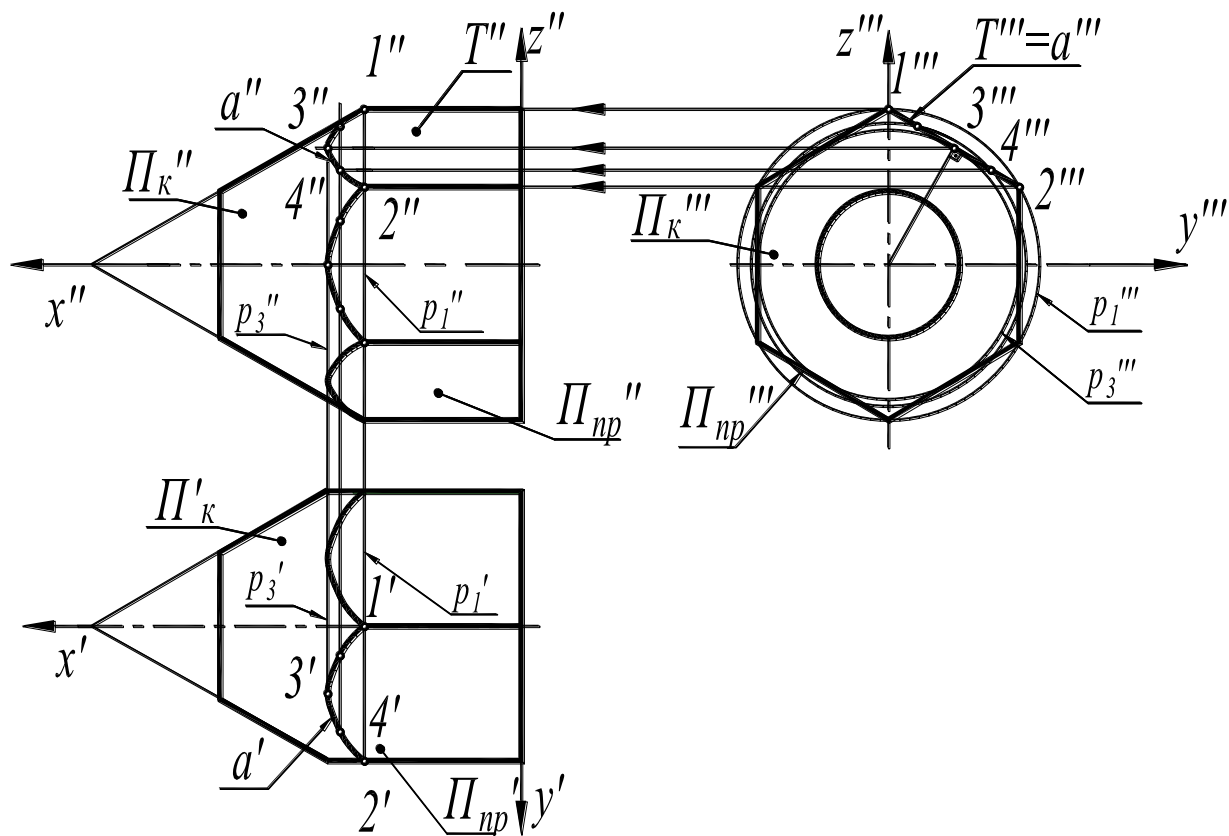


Рис. 11.2. Пересечение конуса с призмой

Рассмотрим грань призмы  $T$  – отсек профильно-проецирующей плоскости ( $T \subset \Pi_{пр}$ ). Вырожденная проекция  $T'''$  включает также и профильную проекцию линии пересечения  $J'''$ . Фронтальная проекция  $J''$  строится из условия принадлежности ее точек конической поверхности  $\Pi_k$  с помощью параллелей конуса. Выделим характерные точки гиперболы:

- $1'''$  и  $2'''$  – конечные точки, расположенные на параллели конуса  $p_1$ ;
- $3'''$  – экстремальная точка – проекция вершины гиперболы. Она лежит одновременно на перпендикуляре к грани  $T$  и на параллели минимального диаметра  $p_3$ , вписанной в шестиугольник;
- $4'''$  – промежуточная точка.

Фронтальные проекции всех этих точек –  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  и  $4''$  находятся на фронтальных проекциях соответствующих параллелей по линиям проекционной связи. Точно таким же образом строятся фронтальные проекции линий пересечения конуса с другими гранями шестигранника. Горизонтальные проекции кривых  $J'$  строятся по координатам ОСК.

## 11.2. Обе пересекающиеся поверхности – проецирующие

Если пересекаются две проецирующие поверхности, то вырожденные проекции этих поверхностей определяют две проекции линии пересечения. Третья проекция линии пересечения строится по координатам ОСК.

Пусть заданы проецирующие цилиндрические поверхности (рис. 11.3):  $\Pi_{ц1}$  – горизонтально-проецирующая цилиндрическая поверхность;  $\Pi_{ц2}$  – фронтально-проецирующая цилиндрическая поверхность.

Вырожденная горизонтальная проекция цилиндрической поверхности  $\Pi_{ц1}'$  включает горизонтальную проекцию линии пересечения  $J'$ , вырожденная фронтальная проекция цилиндрической поверхности  $\Pi_{ц2}''$  включает фронтальную проекцию линии пересечения  $J''$ . При выделении проекции линии пересечения необходимо помнить, что она находится в зоне наложения изображений обеих пересекающихся поверхностей.

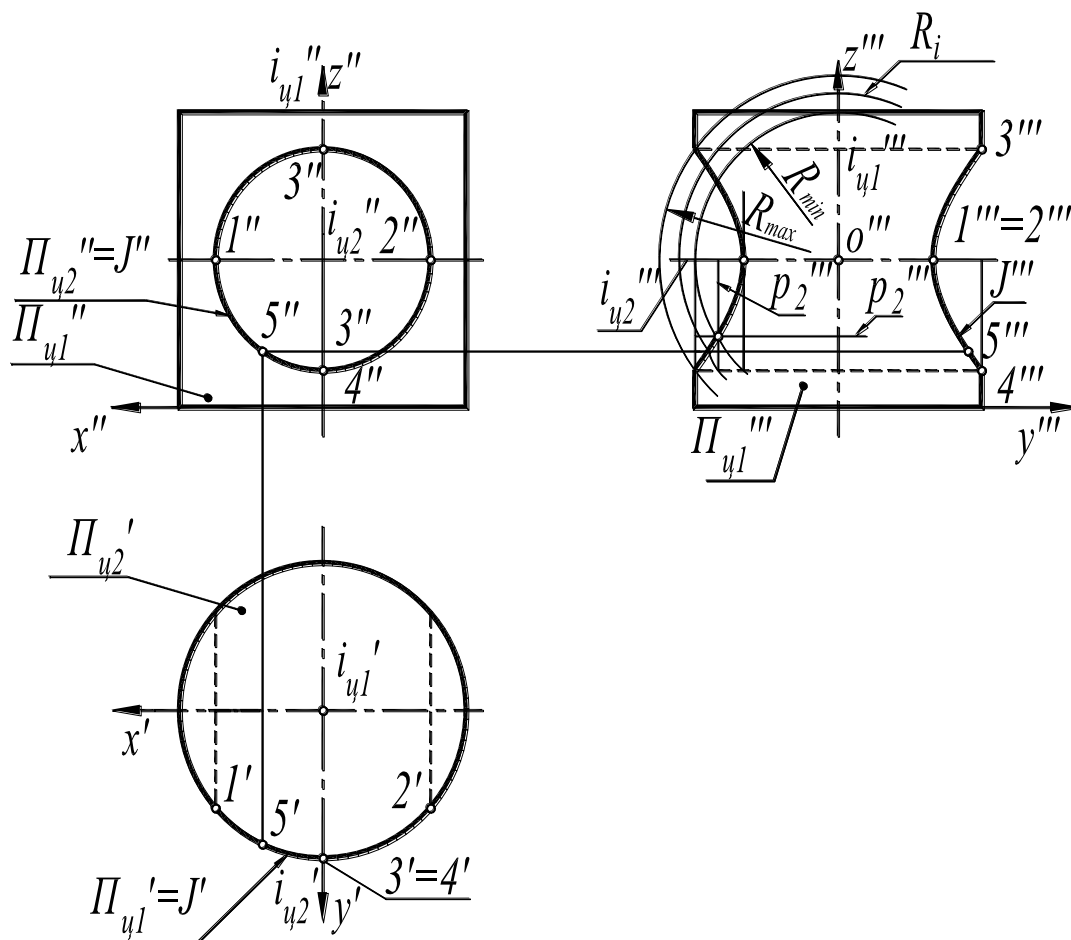


Рис. 11.3. Пересечение двух проецирующих цилиндров

В данной задаче характерными точками кривых  $J'$  и  $J''$  являются точки 1, 2, 3, 4, а точка 5 – промежуточная. Профильная проекция линии пересечения  $J'''$  строится по координатам ОСК.

Кривая  $J'''$  может быть также построена и с помощью концентрических сфер-посредников с центром в точке  $O''' = i_{y1} \cap i_{y2}$ . Согласно рис. 11.3, посредник-сфера  $\Pi_{сф}$  пересекает цилиндрическую поверхность  $\Pi_{ц1}$  по параллели  $p_1$ , поверхность  $\Pi_{ц2}$  – по параллели  $p_2$ . Точка пересечения 5 проекций этих параллелей принадлежит проекции линии пересечения – кривой  $J'''$ . Изменяя радиус сферы в пределах от  $R_{\min}$  до  $R_{\max}$ , можно построить проекции остальных точек.

## 12. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ. ТЕОРЕМА МОНЖА

Порядок линии пересечения равен произведению порядков пересекающихся поверхностей. В общем случае две поверхности второго порядка пересекаются по пространственной кривой четвертого порядка. В некоторых особых случаях взаимного расположения поверхностей кривая четвертого порядка может распадаться на более простые линии низших порядков. В пределах ограниченного круга рассматриваемых поверхностей особый интерес представляет случай распада линии пересечения четвёртого порядка на две плоские кривые второго порядка.

**Теорема Монжа.** *Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую линию, соединяющую точки пересечения линий касания.*

Пусть пересекающиеся конусы  $\Pi_{к1}$  и  $\Pi_{к2}$  описаны около сферы  $\Pi_{сф}$  (рис. 12.1). Поверхность  $\Pi_{к1}$  касается поверхности  $\Pi_{сф}$  по окружности, фронтальной проекцией которой является отрезок  $p_{к1}''$ , окружность касания поверхности  $\Pi_{к2}$  и поверхности  $\Pi_{сф}$  проецируется отрезком  $p_{к2}''$ . Точки  $M$  и  $N$  пересечения проекций  $p_{к1}''$  и  $p_{к2}''$  являются точками касания поверхностей  $\Pi_{к1}$  и  $\Pi_{к2}$  с поверхностью  $\Pi_{сф}$  и принадлежат линиям пересечения. Общие очерковые точки конусов 1, 2, 3, 4 также принадлежат линиям пересечения.



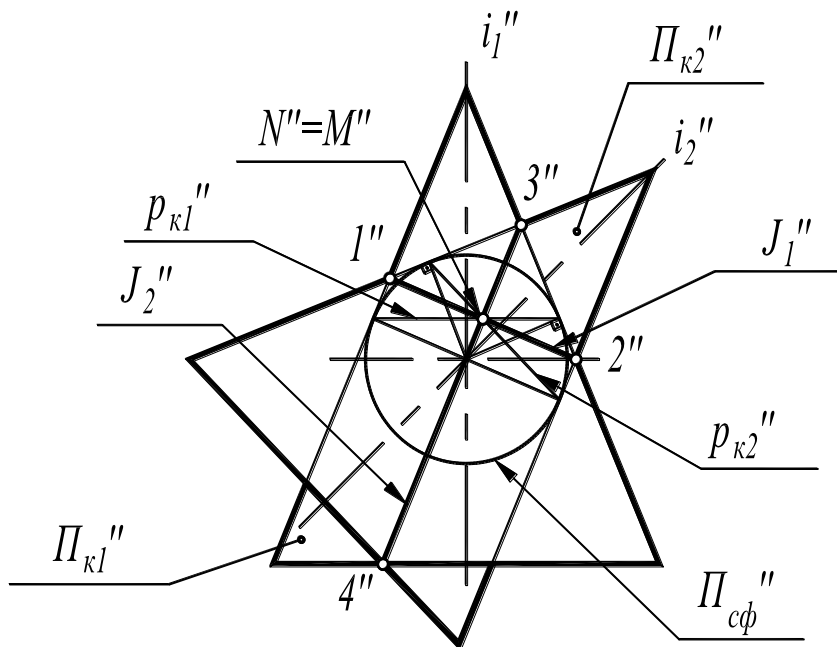


Рис. 12.1. Пересечение конусов по теореме Монжа

Согласно теореме, плоскости искомых кривых второго порядка проходят через фронтально-проецирующую прямую ( $MN$ ), то есть также являются фронтально-проецирующими. Следовательно, кривые будут иметь вырожденные проекции в виде отрезков прямых  $[1'', 2'']$  и  $[3'', 4'']$  на фронтальной плоскости проекций.

В рассматриваемом случае линия пересечения двух конических поверхностей, описанных около общей сферы, распадается на эллипс (линия  $J_1''$ ) и параболу (линия  $J_2''$ ). Горизонтальные проекции этих линий строятся по принадлежности конической поверхности  $\Pi_{к1}$ , то есть с помощью каркасных линий этой поверхности. Третья проекция этих линий строится по координатам ОСК.

Теорема Монжа позволяет строить проекции кривых второго порядка по точкам пересечения очерковых линий заданных поверхностей в том случае, когда общая плоскость симметрии параллельна плоскости чертежа (рис. 12.2). В представленном случае результатом пересечения конических поверхностей являются два эллипса.

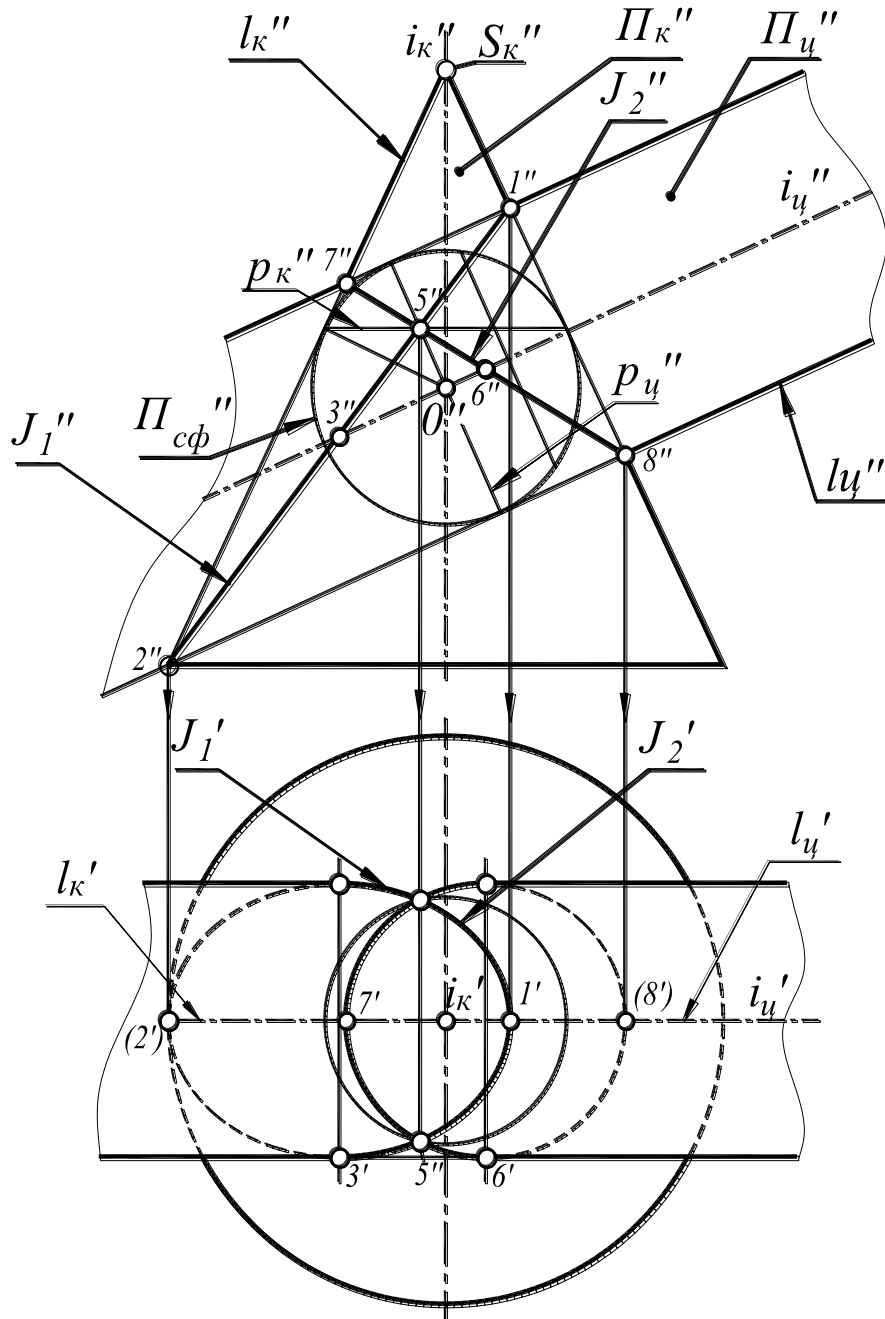


Рис.12.2. Пример пересечения поверхностей по теореме Монжа

Плоские кривые пересечения поверхностей второго порядка часто встречаются в технике при конструировании переходов цилиндрических и конических труб с пересекающимися осями. Различные примеры таких переходов представлены на рис. 12.3 а, б, в, г, д.

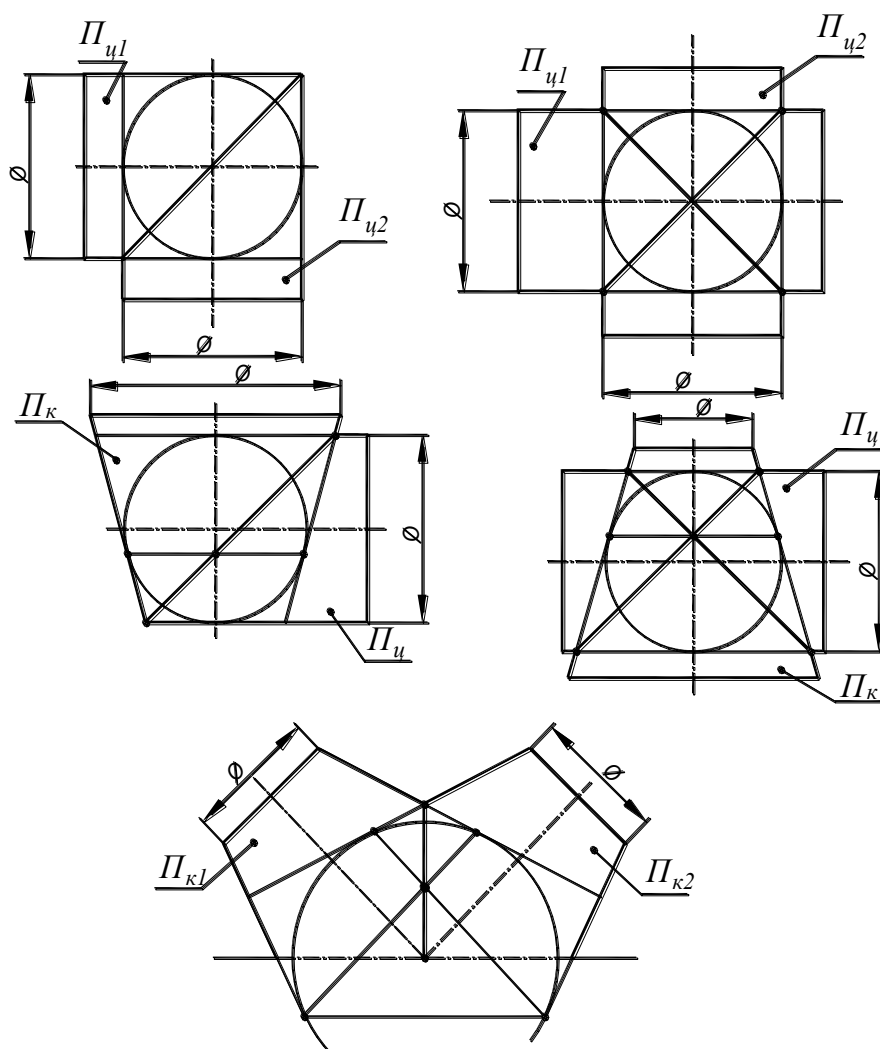


Рис. 12.3. Различные случаи пересечения поверхностей по теореме Монжа

### 13. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ФОРМЫ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Для контроля точности построения линии пересечения поверхностей второго порядка можно использовать следующую теорему.

**Теорема.** Если пересекающиеся поверхности имеют общую плоскость симметрии, то при проецировании на плоскость проекций, параллельную плоскости симметрии, порядок линии пересечения понижается в два раза.

Так как порядок линии пересечения определяется произведением порядков поверхностей, то это будет пространственная кривая четвертого порядка, а ее проекция на плоскость проекций, параллельную плоскости симметрии – кривая второго порядка.

Теоретические исследования показывают, что линия пересечения двух поверхностей *вращения второго порядка* проецируется на плоскость, параллельную плоскости симметрии различными кривыми второго порядка:

1) в виде *гиперболы* при пересечении цилиндрической и конической поверхностей с пересекающимися осями. Если асимптоты гиперболы пересекаются под прямым углом, то при пересечении двух цилиндров или двух конусов с равными углами при вершинах гипербола является *равносторонней*.

Центр гиперболы находится в точке пересечения линий касания концентрических сфер, вписанных в заданные поверхности. Центром концентрических сфер является точка пересечения осей поверхностей.

Аналитически доказывается, что *гипербола в предельном случае (случай пересечения по теореме Монжа) распадается на две пересекающиеся прямые*.

Направление асимптот гиперболы не меняется при изменении диаметров цилиндрической поверхности и при перемещении конической поверхности вдоль её оси;

2) в виде *параболы* при пересечении сферы с цилиндром и конусом (за исключением случая, когда сфера является сосной с этими поверхностями), а также при пересечении цилиндра и конуса с параллельными осями.

*Парабола в предельном случае* распадается на две параллельные прямые, если оси пересекающихся поверхностей совпадают.

Определение вида строящейся на чертеже линии пересечения (гипербола, парабола) и ее характерных параметров (центр, асимптоты и вершины гиперболы, вершина параболы) позволяет строить ее точки, используя осевую и центральную симметрию кривой.

Прогнозирование формы линии пересечения позволяет более точно строить ее.

Рассмотрим конкретные примеры.

*Пример 1.* Определим форму линии пересечения цилиндра и конуса с *пересекающимися* осями. В предельном случае, когда обе поверхности описаны относительно одной сферы, линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка (теорема Монжа) (рис. 13.1). Поэтому во всех остальных случаях изображение линии пересечения на плоскость, параллельную их общей плоскости симметрии, имеет вид *гиперболы*.

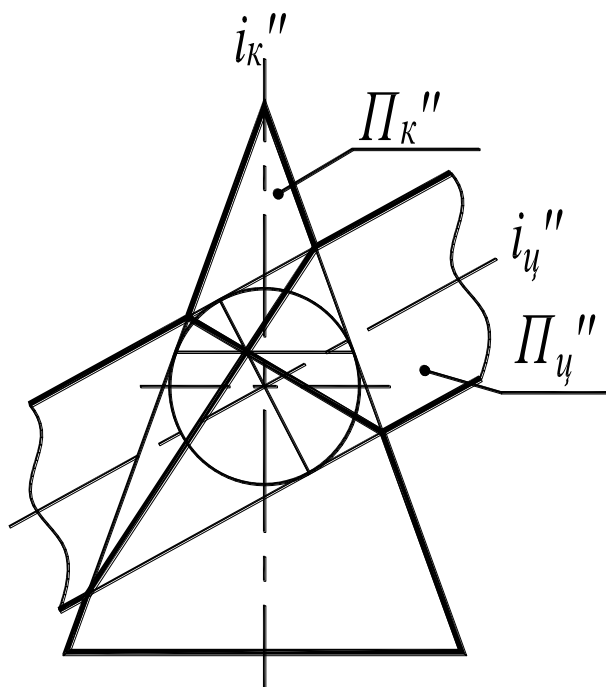


Рис. 13.1. Пересечение конуса и цилиндра с пересекающимися осями по теореме Монжа

В зависимости от соотношения радиусов  $R_1$  и  $R_2$  сфер, вписанных с поверхности конуса и цилиндра ( $R_1$  – сфера, вписанная в конус,  $R_2$  – сфера, вписанная в цилиндр), линии пересечения будут иметь вид, показанный на рисунке 13.2, а, б. Вершины гипербол направлены в сторону оси

поверхности с большим радиусом сферы, вписанной в нее. На рисунке 13.2, а – это ось цилиндра, а на рисунке 13.2, б – ось конуса. Линии пересечения строятся при помощи концентрических сфер – посредников.

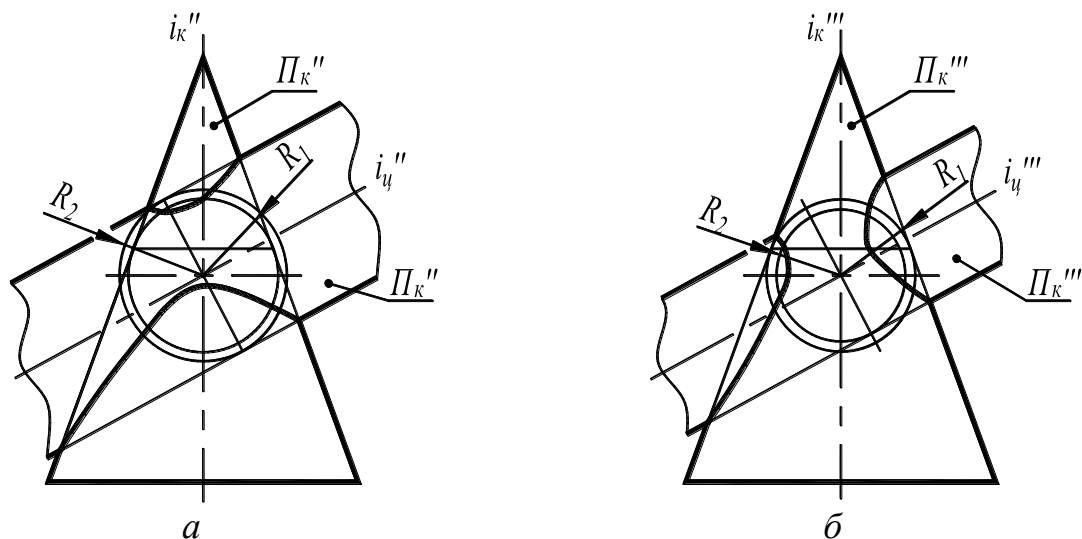


Рис. 13.2. Различные случаи пересечения конуса и цилиндра с пересекающимися осями:

а –  $R_1 < R_2$ ;

б –  $R_1 > R_2$

*Пример 2.* На рисунке 13.3 представлены две конические поверхности с пересекающимися осями. Их оси взаимно перпендикулярны. В предельном случае, когда обе поверхности будут описаны относительно одной сферы по теореме Монжа, линия их пересечения распадется на две плоские кривые. В этом случае это будут

эллипсы. На рисунке 13.3 случай пересечения по теореме Монжа показан штрих-пунктирной линией. Фронтальными проекциями двух эллипсов являются прямые  $[A''B'']$  и  $[C''D'']$ . Следовательно, согласно первому пункту теоретических исследований в данном случае линиями пересечения будут гиперболы, асимптоты которых параллельны плоскостям, в которых лежат эллипсы, полученные в предельном случае пересечения. Точка пересечения асимптот гипербол является точкой пересечения параллелей, по которым поверхности конусов касаются вписанных в них сфер.

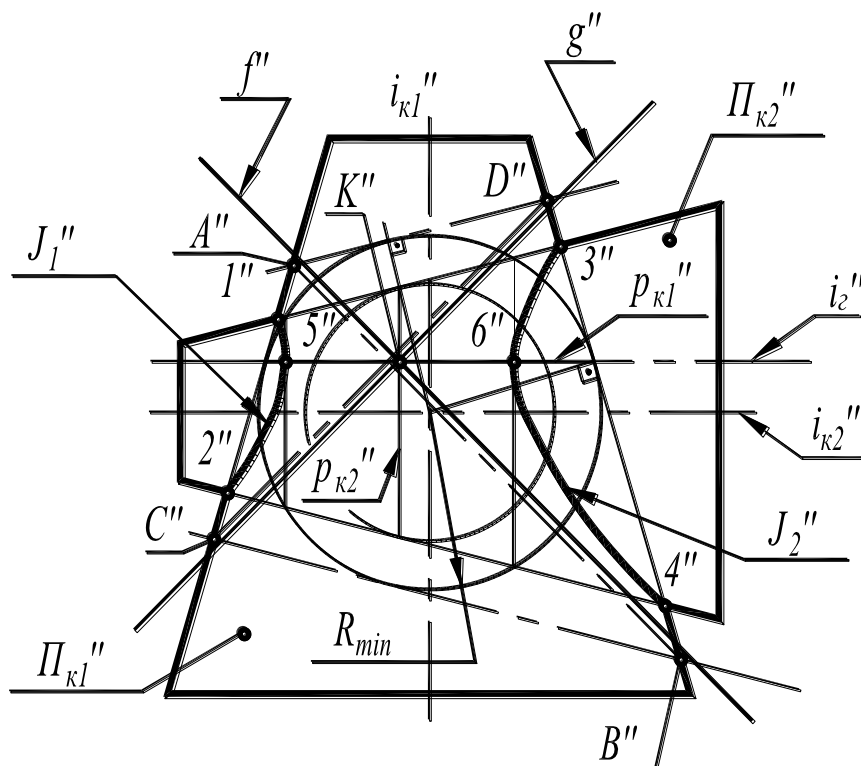


Рис. 13.3. Пересечение поверхностей конусов с взаимно перпендикулярными осями

Причем вершины гипербол направлены в сторону оси поверхности конуса  $\Pi_{k1}$ , так как в него вписана сфера большего радиуса.

*Пример 3.* Рассмотрим построение линии пересечения двух цилиндрических поверхностей с пересекающимися осями (рис. 13.4). В предельном случае, когда цилиндры будут одинакового диаметра (увеличенный цилиндр показан штрих-пунктирной линией), линия их пересечения распадется на две плоские кривые. В предельном случае это будут эллипсы, фронтальные проекции которых изображаются отрезками прямых линий  $[A''B'']$  и  $[C''D'']$ . Линии пересечения двух цилиндрических поверхностей с пересекающимися осями) проецируются гиперболами  $J_1''$  и  $J_2''$  (рис.13.4). В данном примере асимптоты гипербол совпадают с

проекциями эллипсов. Гиперболы могут быть построены способом концентрических сфер-посредников. Характерными будут точки пересечения очерковых линий  $1''$ ,  $2''$ ,  $3''$  и  $4''$ . Так как диаметр вертикального цилиндра больше диаметра наклонного цилиндра, то вершины гипербол будут направлены в сторону оси вертикального цилиндра.

Центр гипербол  $K$  в данном случае находится в точке пересечения проекций осей цилиндров  $O''$ . Ось гипербол  $i$  является биссектрисой угла между асимптотами и расположена под углом  $45^\circ$  к ним, так как *при пересечении цилиндрических поверхностей асимптоты всегда взаимно ортогональны*. Вершины гипербол – точки  $5''$  и  $6''$  находятся на оси  $i$ . В данной задаче они определяются последовательным построением ряда промежуточных точек кривых  $J_1''$  и  $J_2''$  вблизи оси  $i$ . Как видно из рисунка 13.4, в случае пересечения цилиндров, один из которых имеет наклонную ось (угол между осями не равен  $90^\circ$ ), точки  $7''$  и  $8''$ , построенные с помощью сферы-посредника радиусом  $R_{\min}$ , не являются ни вершинами гипербол, ни экстремальными точками.

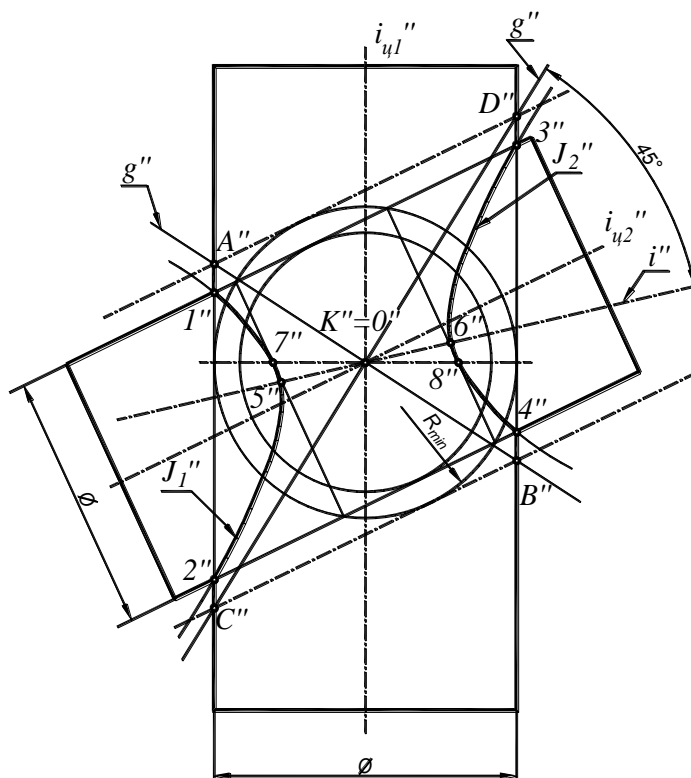


Рис. 13.4. Пересечение цилиндров с пересекающимися осями

*Пример 4.* На рисунке 13.5 представлены два пересекающихся цилиндра, оси которых пересекаются под прямым углом. В предельном случае пересечения по теореме Монжа (на рис. 13.5 очерковые линии одного из цилиндров показаны штрих-пунктирной линией), линия

пересечения распалась на две плоские кривые (эллипсы), фронтальные проекции которых  $[A''B'']$  и  $[C''D'']$  изображены прямыми линиями. Эти прямые линии также будут являться асимптотами гипербол  $f$  и  $g$ , вершины которых направлены в сторону оси вертикального цилиндра, так как он имеет больший диаметр. Точка пересечения асимптот  $K''$  совпадает с точкой пересечения осей цилиндров  $O''$ . Экстремальные точки линии пересечения лежат на оси цилиндра с меньшим радиусом. Эти точки находятся с помощью сферы-посредника минимального радиуса  $R_{\min}$ .

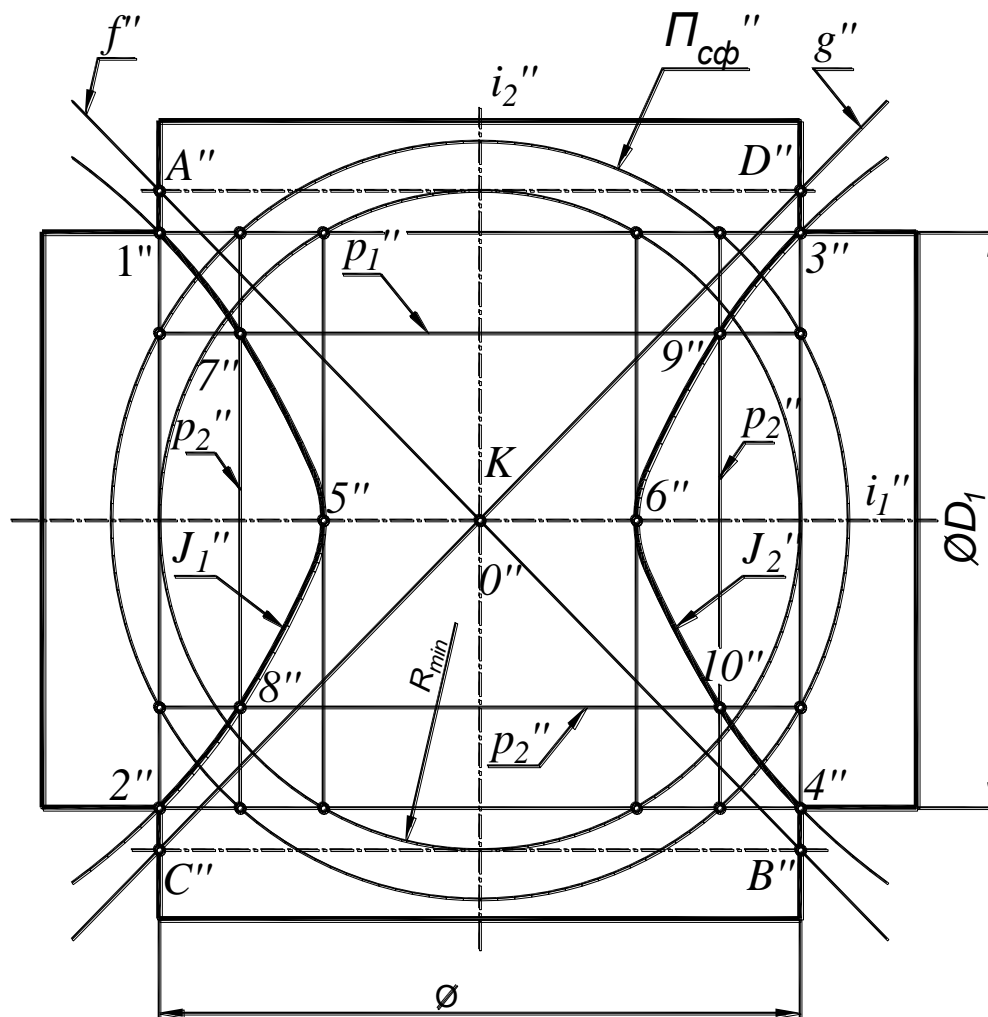


Рис. 13.5. Пересечение цилиндров с перпендикулярными осями

*Пример 5.* Определим форму линии пересечения конуса и цилиндра с параллельными осями (рис. 13.6).

В предельном случае, когда оси цилиндра и конуса совпадают (рис. 13.7), линиями их пересечения являются параллели  $p_1$  и  $p_2$  (теорема о пересечении соосных поверхностей, раздел 9.1). На фронтальной проекции эти параллели проецируются в прямые линии.



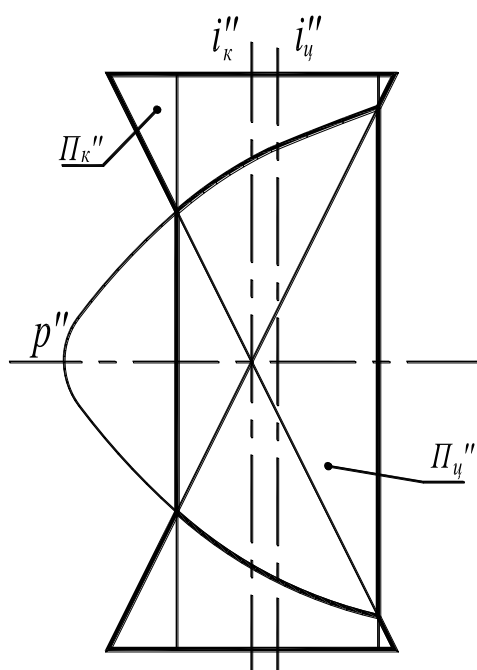


Рис. 13.6. Пересечение конуса и цилиндра с параллельными осями

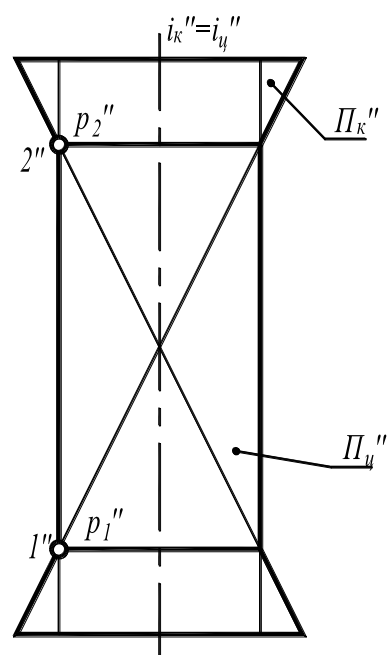


Рис. 13.7. Пересечение соосных цилиндра и конуса

Во всех остальных случаях линия пересечения проецируется в виде параболы, которая своей выпуклой стороной направлена к основанию конуса. Вершина параболы  $P$  находится на уровне вершины конуса – точки пересечения образующих конуса  $S$  (рис. 13.6).

Так как кривизна параболы на этом участке незначительна, то она может быть не выявлена построением. Поэтому желательно сделать такое предварительное прогнозирование и определить теоретическую вершину параболы.

*Пример 6.* На рисунке 13.8 представлен случай пересечения сферы и цилиндра. Из множества осей сферы всегда можно выделить ось вращения, параллельную оси цилиндра. В предельном случае, когда оси поверхностей совпадают, то есть поверхности являются соосными, линия их пересечения распадается на две параллели  $p_1$  и  $p_2$ . Согласно вышеизложенным теоретическим исследованиям линия пересечения данных поверхностей должна быть параболой.

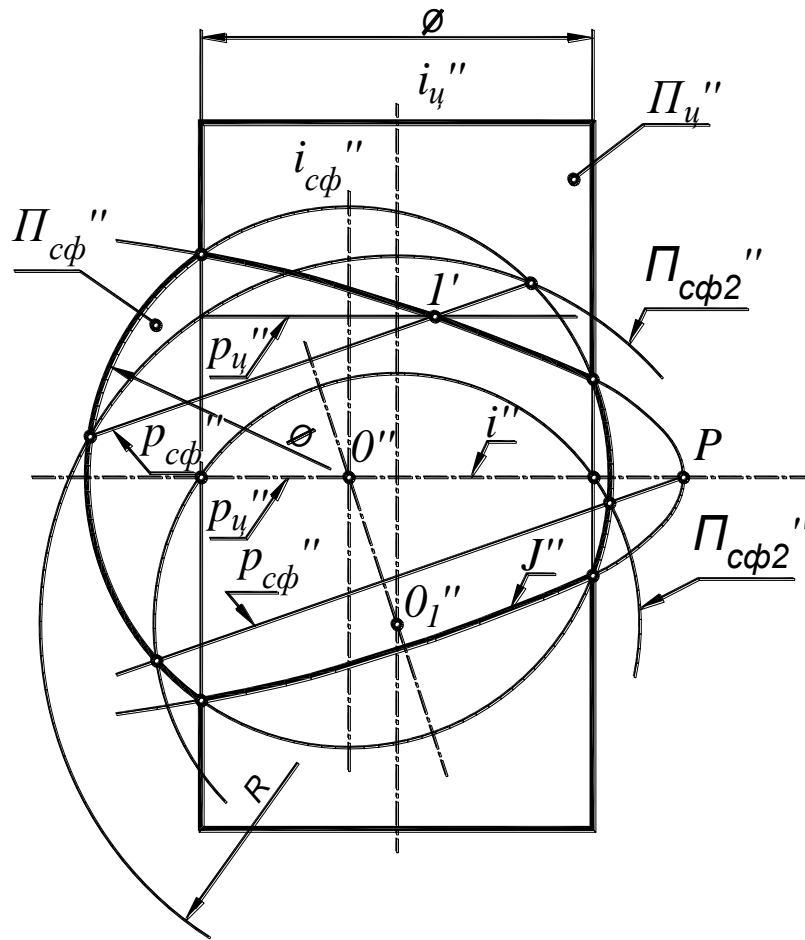


Рис. 13.8. Пересечение сферы и цилиндра

Если пересекающиеся сферическая и цилиндрическая поверхности заданы только одним изображением и их оси лежат в плоскости параллельной плоскости проекций (в данном случае оси  $i_{ц}$  и  $i_{сф}$  лежат в плоскости параллельной фронтально плоскости проекций  $F$ ), то проекцию линии пересечения удобно строить способом концентрических сфер-посредников. Центр сфер-посредников может быть расположен в любой точке на оси цилиндра. Так как сфера имеет бесчисленное множество осей, то прямая, проходящая через центр заданной сферы и произвольную точку  $O_1$  на оси цилиндра также может быть ее осью.

Посредник-сфера  $\Pi_{сф1}$  с центром в точке  $O_1$  пересекает заданную сферу по параллели  $p_c$ , а цилиндр по параллели  $p_{ц}$ . Проекция точки пересечения этих параллелей (точка  $I''$ ) принадлежит проекции линии

пересечения  $J''(I'' \in J'')$ . Изменяя величину радиуса сферы-посредника,

можно построить необходимое количество точек кривой  $J''$ , которая, согласно теории, должна быть параболой. В данной задаче вершина параболы  $P$  расположена за пределами изображения пересекающихся

поверхностей, поэтому проекциями линий пересечения будут симметрично расположенные дуги ветвей параболы. Ось параболы  $i$  совпадает с горизонтальной осью заданной сферы, а вершина  $P$  находится на этой оси. Чтобы найти вершину  $P$  нужно воспользоваться посредником  $\Pi_{сф2}$ , который пересекает цилиндр по параллели  $p_{ц2}$ . Проекция параллели  $p_{ц2}$  лежит на оси параболы  $i$ . Заданная сфера  $\Pi_{сф}$  пересекается с посредником  $\Pi_{сф2}$  по параллели  $p_{с2}$ . Точка пересечения параллели  $p_{с2}$  и оси  $i$  определит вершину параболы  $P$  ( $P=p_{с2} \cap i$ ).

#### 14. ОБЩИЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Разные типы задач на взаимное пересечение поверхностей имеют много общего. Все они решаются поэтапно. При их решении целесообразно придерживаться следующей последовательности выполняемых действий.

1. Анализ условий задачи.

Вначале необходимо определить:

- а) какие поверхности пересекаются;
- б) какое положение они занимают относительно плоскостей проекций (проецирующее или непроецирующее);
- в) какое положение они занимают друг относительно друга (например, оси поверхностей вращения параллельны, совпадают, пересекаются, скрещиваются);
- г) к какому случаю пересечения относится задача (общему, частному или особому);
- д) каким способом строить проекции линии пересечения.

2. Исследование заданных поверхностей с целью выявления на них графически простых линий – *прямых* и *окружностей*. Например, на цилиндре и конусе – параллели и образующие, на торе и сфере – только параллели.

3. Определение возможного числа решений и выбор наиболее рационального. В случае необходимости – выбор поверхностей-посредников.

4. Прогнозирование формы линии пересечения поверхностей.

5. Определение зоны расположения проекции линии пересечения поверхностей (зоны наложения проекций поверхностей на каждом изображении).

6. Выделение и построение характерных точек линии пересечения (очерковых и экстремальных).

7. Построение промежуточных точек для более точного построения линии пересечения.

8. Определение видимости линии пересечения. Видимость определяется отдельно для каждого вида по какому-либо другому виду (см. раздел 8.2).

9. Определяем видимость очерков поверхностей (см. раздел 8.3).

10. Обводим полученные изображения с учетом видимости очерков поверхностей и линии пересечения.

### ***Вопросы для самоконтроля знаний по теме «Пересечение поверхностей»***

1. В чём отличие общих и частных случаев пересечения поверхностей?
2. Что называется поверхностью-посредником?
3. Когда применяется посредник?
4. Какие требования предъявляются к посреднику?
5. Каков общий порядок построения проекций линии пересечения с помощью посредника?
6. Какие поверхности применяются в качестве посредника?
7. Когда применяется посредник-плоскость?
8. Какие поверхности называются соосными?
9. Как пересекаются соосные поверхности?
10. Когда применяется посредник-сфера?
11. Как определяются пределы изменения радиуса сферы-посредника?
12. Какие преимущества имеет способ сфер-посредников?
13. В каком случае для построения проекции линии пересечения достаточно воспользоваться каркасными линиями поверхностей?
14. Когда проекция линии пересечения может быть построена координатным способом?
15. Как определяется видимость линии пересечения?
16. Как определяется видимость очерков пересекающихся поверхностей?
17. Когда проекция линии пересечения может быть построена по теореме Монжа?
18. Какими кривыми могут быть проекции линий пересечения поверхностей второго порядка с общей плоскостью симметрии, параллельной плоскости чертежа?

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов С.А. Начертательная геометрия: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2009. – 285 с. – (Высшее образование).
2. Бубенников А. В., Громов М. Я. Начертательная геометрия. М.: Высш. шк., 1973. С. 222 – 265.
3. Глазунов Е. А. О проекции линии пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии. В сб. «Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике». М.: «Советская наука», 1958. С. 35 – 64.
4. Павлова А.А. Начертательная геометрия: учебник для вузов. – 3 изд., М.: КНОРУС, 2016. – 302 с.
4. Поверхности и развертки. Гордеева И.В., Миронова Н.Г., Полтавцева Т.А. и др. / Под ред. К.К. Александрова. – М.: Моск. энерг. ин-т, 1986. – 44 с.
5. Пересечение поверхностей. Головина Л.Г., Касаткина Е.П., Новодережкина Т.В. и др. / Под ред. К.К. Александрова. – М.: Моск. энерг. ин-т, 1986. – 32 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

	С.
1. Поверхности.....	3
1.1. Способы образования поверхностей. Каркас поверхности.....	3
1.2. Способы задания поверхностей.....	5
1.3. Классификация поверхностей.....	7
1.4. Определители геометрических поверхностей.....	8
1.4.1. Определители гранных поверхностей.....	8
1.4.2. Построение проекций точек, принадлежащих поверхности гранного тела.....	10
1.4.3. Поверхности вращения общего вида.....	10
1.4.4. Определители элементарных поверхностей вращения.....	11
1.4.5. Построение проекций точек, принадлежащих поверхностям вращения.....	17
1.5. Построение проекций линии принадлежащей поверхности вращения.....	19
2. Построение сечений поверхностей плоскостью.....	21
2.1. Построение сечений гранных поверхностей.....	21
2.2. Построение сечений поверхностей вращения.....	23
3. Развертки поверхностей.....	29
3.1. Построение развертки поверхности призмы.....	30
3.2. Построение развертки поверхности пирамиды.....	31
3.3. Построение развертки поверхности усеченного цилиндра.....	32
3.4. Построение развертки поверхности усеченного конуса.....	34
4. Проведение практических занятий по теме «Поверхности и развертки».....	35
5. Текстовые задачи на тему «Образование поверхностей».....	40
6. Пересечение гранных поверхностей.....	41
7. Различные случаи пересечения поверхностей.....	44
7.1. Общий случай пересечения поверхностей.....	44
8. Пересечение поверхностей вращения с параллельными осями. Способ вспомогательных секущих плоскостей.....	46
8.1. Построение линии пересечения.....	46
8.2. Определение видимости линии пересечения.....	49
8.3. Определение видимости очерков поверхностей.....	51
9. Пересечение поверхностей вращения с пересекающимися осями. Способ концентрических сфер.....	51
9.1. Пересечение соосных поверхностей.....	51
9.2. Пересечение поверхностей вращения с пересекающимися осями.....	53
10. Пересечение поверхностей вращения со скрещивающимися осями. Метод эксцентрических сфер.....	57
11. Частные случаи пересечения поверхностей.....	59

11.1. Одна из пересекающихся поверхностей является проецирующей..	59
11.2. Обе пересекающиеся поверхности – проецирующие.....	62
12. Особые случаи пересечения поверхностей вращения. Теорема Монжа.....	63
13. Прогнозирование формы линии пересечения поверхностей вращения.....	65
14. Общий алгоритм решения задач на взаимное пересечение поверхностей.....	73
Вопросы для самоконтроля знаний по теме «Пересечение поверхностей».....	75
Рекомендуемая литература.....	76