УДК
514
Р 47

РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

СБОРНИК ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ И УПРАЖНЕНИЙ

Москва Издательство МЭИ 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Коллектив авторов

РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Сборник графических заданий и упражнений

Учебное пособие
по курсу "Начертательная геометрия" для студентов 1-го курса
всех специальностей МЭИ

Под редакцией Гордеевой И.В.

Москва Издательство МЭИ 2001

УДК
514
Р-47
УДК: 514.18(075.8) (076.2)

Утверждено учебным управлением МЭИ
в качестве учебного пособия для студентов
Подготовлено на кафедре инженерной графики
Рецензент: д-р пед. наук, проф. А.А. Павлова

Авторы: *Бурдунина* Н.А., *Гордеева* И.В., *Горнов* А.О., *Давыдкина* Т.В., *Иванова* А.М., *Исаева* О.И., *Касаткина* Е.П., *Кауркин* В.Н., *Мачуева* Л.А., *Миронова* Н.Г., *Нетунаева* В.Н., *Патрунова* М.С., *Полтавцева* Т.А., *Степанов* Ю.В., *Фролова* Г.М., *Янина* Е.В.
РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ. Сборник графических заданий и упражнений: Учебное пособие по курсу "Начертательная геометрия" / Под ред. *И.В. Гордеевой*. – М.: Издательство МЭИ, 2001 г. – 52 с.
ISBN 5-7046-0618-0

Содержит условия задач и тестов, предлагаемых для решения в курсе начертательной геометрии. Кроме того, приведены краткие теоретические положения по каждому разделу и примеры решения задач с алгоритмами. Сборник снабжен списком условных обозначений и символов, используемых в курсе.

Предназначено для студентов 1–го курса всех специальностей МЭИ, изучающих начертательную геометрию и инженерную графику.

ISBN 5-7046-0618-0

ВВЕДЕНИЕ

Сборник содержит тесты и задачи для решения на практических занятиях по начертательной геометрии (проекционному черчению) и для домашней подготовки к занятиям. В процессах выполнения задач осваиваются методы анализа геометрических тел (их форма, положение в системе координат) и их отношений в пространстве. Предлагаются различные методы начертательной геометрии для их решения.

Задачи сборника полезны в разделах проекционного и предметно-ориентированного черчения для закрепления полученных знаний и анализа геометрических форм, их взаимного соотношения на чертежах. Графические условия выполнены на масштабной сетке, что позволяет масштабировать основные размеры изображений.

Сборник содержит основные теоретические положения и определения начертательной геометрии, связанные с каждой темой. По каждому разделу приведены примеры решения задач с алгоритмами.

Задачи, предлагаемые для решения графическим путем с применением теории начертательной геометрии, можно разделить на три группы: *позиционные* (в них дается качественная оценка взаимного положения геометрических объектов: принадлежность, параллельность, перпендикулярность, пересечение), *метрические* (в них дается количественная оценка взаимного положения геометрических объектов: расстояние между параллельными прямыми и плоскостями, углы между пересекающимися прямыми, прямой и плоскостью, расстояние от точки до прямой и поверхности, кроме того, они позволяют определить форму и размеры отдельных элементов) и задачи *комплексные*, включающие вопросы, относящиеся и к позиционным, и к метрическим задачам.

Решение каждой задачи должно быть разбито на несколько этапов: *анализ* условий задачи, составление *плана* решения, *построения* на чертеже. Цель *анализа*: по данным проекциям геометрических объектов представить их форму и расположение в пространстве как по отношению друг к другу, так и относительно плоскостей проекций. Затем надо наметить *план* решения задачи, устанавливающей порядок действий. В зависимости от типа задачи план может иметь в основе общее правило (алгоритм) или содержать "пространственный" путь решения, устанавливающий последовательность выполнения геометрических операций. При выполнении этих этапов желательно установить возможное число решений и оценить их рациональность. После этого можно приступать к геометрическим построениям в проекциях, записывая алгоритм решения в символической форме.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. Обозначение геометрических элементов и величин

1.1. Геометрические элементы пространства (объекты проецирования)

1. Точки: A, B, C, ... – прописные буквы латинского алфавита, 1, 2, 3,...– арабские цифры, I, II, III, ... – римские цифры
   Начало системы координат – 0
2. Линии (в том числе прямые): a, b, c, ... – строчные буквы латинского алфавита, причем буквой h – обозначается горизонталь, буквой f – фронталь, p – профильная прямая; h_{OQ} – горизонтальный след плоскости Q; f_{OQ} – фронтальный след плоскости Q; p_{OQ} – профильный след плоскости Q.
   Оси системы координат: X, Y, Z
3. Поверхности (в том числе плоскости): Q, T, N, M, S, ... – прописные буквы латинского алфавита; П – поверхность, Ф – фигура, Т – геометрическое тело. Плоскости проекций: F – фронтальная, H – горизонтальная , P – профильная
4. Углы α, β, γ, ... – строчные буквы греческого алфавита
5. Обозначение проекций геометрических элементов: на H – h', S', на F – h'', S'', на P – h''', S'''

1.2. Геометрические элементы на чертеже

1. (AB); $a(AB)$– прямая, проходящая через точки A и B
2. $[AB)$; $a[AB)$ – луч, с началом в точке A и проходящий через точку B
3. $[AB]$; $a[AB]$ – отрезок прямой, ограниченный точками A и B
4. $\angle ABC$ – угол с вершиной в точке B
   $(a\hat{\ }b)$; $\varphi(a\hat{\ }b)$ – угол между прямыми a и b
5. ΔABC – треугольник ABC
6. $[A\breve{\ }B]$; $k[A\breve{\ }B]$ – Дуга кривой, ограниченная точками A и B
7. $[Q\hat{\ }T]$ – двугранный угол между плоскостями Q и T
8. Проекции преобразованных геометрических элементов (повернутых, перемещенных): $\overline{A}', \overline{B}', ..., \overline{a}', \overline{b}', ...$

1.3. Натуральные величины, длины, расстояния

1. $|AB|$ – длина отрезка $[AB]$, натуральная величина отрезка $[AB]$, расстояние от точки A до точки B
2. $|Aa|$ – расстояние от точки A до прямой a
3. $|a||b|$ – расстояние между параллельными прямыми a и b

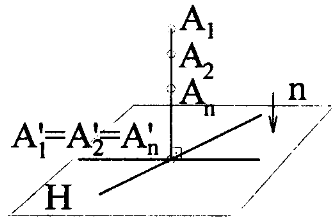
4. $|a||Q|$ – расстояние между прямой a и параллельной ей плоскостью Q
5. $|\varphi|$; $|\angle ABD|$ – натуральная величина угла
6. $|\Delta ABD|$ – натуральная величина треугольника ABD

2. Зависимости, преобразования и операции

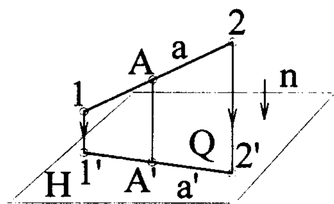
1. $\equiv$ – тождественно совпадают
   Пример: $A'_1 \equiv a'_1$; $a'_2 \equiv Q'_2$
2. $=$ – равны: $|AB|=|DE|$; результат действия: $A=a \cap b$
3. $\backsim$ – подобны
4. $\|$ – параллельны
5. $\perp$ – перпендикулярны
6. ∐ – проецирующие
7. $\dot{-}$ – скрещивающиеся прямые
8. $\supset$ – включает в себя, $Q \supset a$ – плоскость Q включает прямую a
9. $\in$ – принадлежит, $a \in Q$ – прямая a принадлежит плоскости Q
10. $\cap$ – пересечение, $a \cap Q = M$ – прямая a пересекает плоскость Q в точке M
11. $\cup$ – объединение
12. ⊔ – касание: t ⊔ k – линия t касается линии k
13. $/$ – отрицание высказывания;
    $\nparallel$ – не параллельны;
    $\neq$ – не равны;
    ∐̸ – не являются проецирующими;
    $\not\perp$ – не перпендикулярны
14. $\Rightarrow$ – логическое следствие: "следовательно", $a \| b \Rightarrow a' \| b'$ – если прямые параллельны, следовательно их проекции тоже параллельны
15. $\wedge$ – "и"
16. $\vee$ – "или"
17. $\forall$ – если, то
18. $\rightarrow$ – отображение, проецирование
19. ⥱ – отображение вращением, поворотом (без указания оси вращения): A ⥱ $\overline{A}$ – точка A вращением (поворотом) отображается в точку $\overline{A}$
20. ⥀ – вращение вокруг указанной оси
21. Γ – построить;
    $\Gamma M \in \Pi$ – построить точку M, принадлежащую поверхности Π

1. МЕТОД ПРОЕКЦИЙ

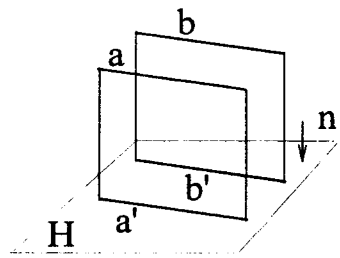
Основной метод построения технических изображений – *метод параллельного прямоугольного проецирования*. Он обладает инвариантными свойствами, которые делают его универсальным.



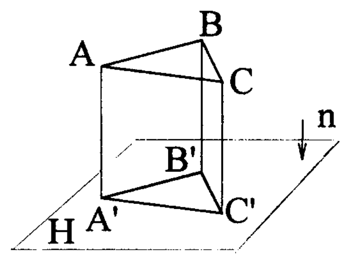
1. Проекция точки есть единственная точка, но каждой проекции соответствует множество точек, лежащих на проецирующем луче и называемых конкурирующими: $A_1'=H\cap n_A\supset A_1, A_2, \ldots A_n$.
2. Проекция прямой в общем случае есть прямая (свойство сохранения прямолинейности): $a'=H\cap Q\supset a$.



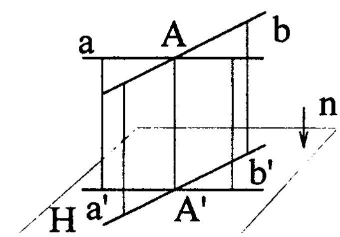
3. Проекция точки, принадлежащей линии, принадлежит проекции этой линии (свойство сохранения принадлежности): $A\in a\Rightarrow A'\in a'$.
4. Отношение, в котором точка делит отрезок, одинаково для оригинала и его проекции. Следствие: середина отрезка проецируется в середину его проекции: $\dfrac{|[1A]|}{|[A2]|}=\dfrac{|[1'A']|}{|[A'2']|}$.



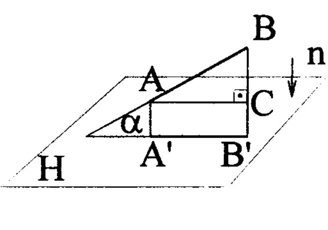
5. Проекции параллельных прямых параллельны: $a\,||\,b\Rightarrow a'\,||\,b'$.



6. Плоские фигуры, параллельные плоскости проекций, проецируются на нее в натуральную величину: $\{ABC\}\,||\,H\Rightarrow|\{ABC\}|=|\{A'B'C'\}|$.

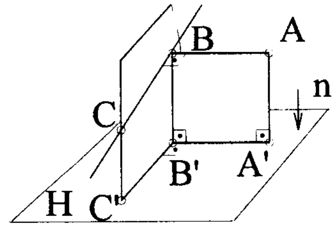


7. Точка пересечения прямых проецируется в точку пересечения их проекций: $a\cap b=A\Rightarrow a'\cap b'=A'$.



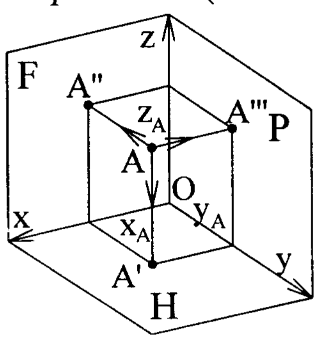
8. Длина проекции отрезка прямой равна длине отрезка, умноженного на $\cos\alpha$, где α – угол наклона прямой к плоскости проекций. Следствие: если отрезок параллелен плоскости проекций ($\alpha=0$, $\cos\alpha=1$), то длина его проекции равна длине самого отрезка: $[AC]\,||\,[A'B']\Rightarrow|[AC]|=|[A'B']|=|[AB]|\cdot\cos\alpha$.

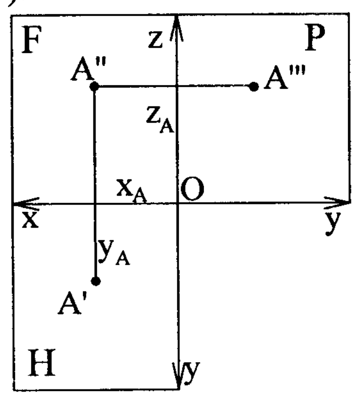
9. Прямой угол, одна сторона которого параллельна плоскости проекций, а другая к ней не перпендикулярна, проецируется на эту плоскость в натуральную величину (*теорема о проецировании прямого угла*). Эта теорема справедлива и для скрещивающихся прямых.



$\angle CBA=90° \Rightarrow \angle C'B'A'=90°$

Проецирование производится на две (или три) взаимно перпендикулярные плоскости. Проецируемый объект закрепляется в декартовой системе координат. Каждая точка объекта определяется тремя координатами. Две или более проекции, соединенные линиями проекционной связи, называются *комплексным чертежом* (или эпюром Монжа).



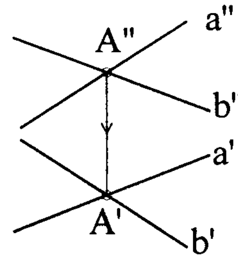


Геометрические объекты: точки, прямые и плоскости могут занимать различное положение друг относительно друга и плоскостей проекций: могут принадлежать, быть параллельными, пересекающимися (частный случай – перпендикулярными). Прямые также могут быть скрещивающимися.

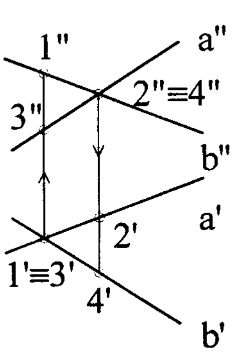
Точка *принадлежит* плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в плоскости.

Прямая *принадлежит* плоскости, если она имеет с плоскостью а) две общие точки; б) одну общую точку и является параллельной какой-либо прямой, принадлежащей плоскости.

Прямая *параллельна* плоскости, если в плоскости найдется хотя бы одна прямая, параллельная заданной.

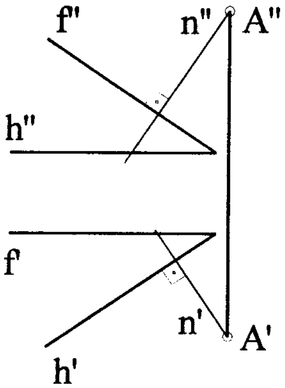


Плоскости *параллельны*, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.



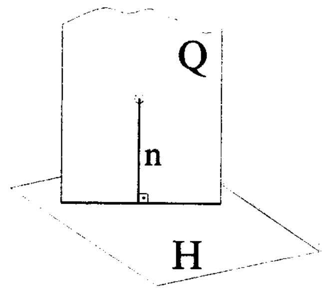
Если проекции прямых пересекаются и точка пересечения лежит на одной линии проекционной связи, то прямые *пересекаются*.

Если точки пересечения проекций прямых не лежат на одной линии проекционной связи, то такие прямые *скрещиваются*.



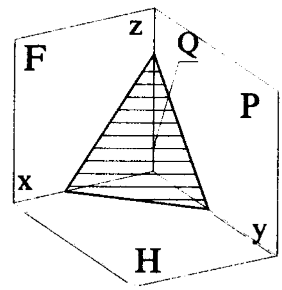
Прямая *перпендикулярна* плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (в начертательной геометрии она перпендикулярна фронтали и горизонтали этой плоскости).

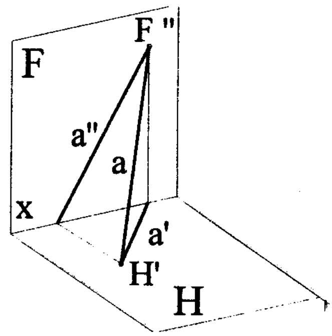
Прямые *перпендикулярны* между собой, если одна прямая лежит в плоскости, перпендикулярной другой прямой.



Плоскости *перпендикулярны* между собой, если одна из них содержит перпендикуляр к другой: $Q \perp H \Rightarrow (n \in Q) \perp H$.

Прямая и плоскость *общего* положения не параллельны и не перпендикулярны ни к одной плоскости проекций.

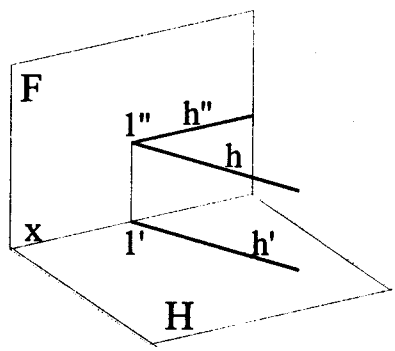




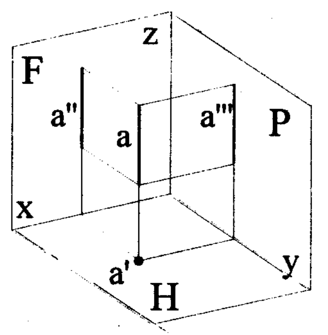
Прямые частного положения:

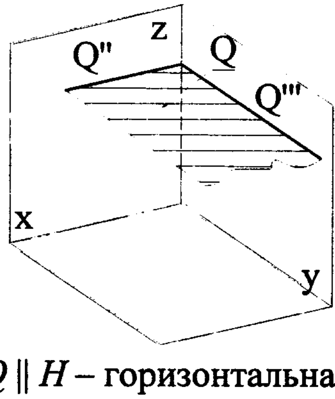
прямая, параллельная одной плоскости проекций, называется прямой *уровня* (горизонталь *h*, фронталь *f*, профильная *p*);

прямая параллельная двум плоскостям проекций (перпендикулярная к третьей) называется *проецирующей* (горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая, профильно-проецирующая).

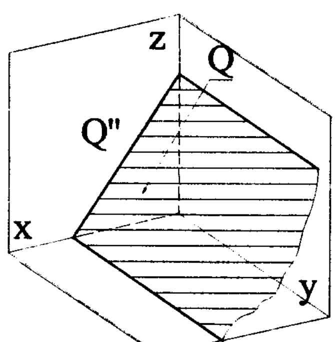


Плоскость частного положения хотя бы на одну плоскость проекций проецируется в линию. Если эта линия не параллельна ни одной из осей проекций, то плоскость называется *проецирующей*, если параллельна, то – плоскостью *уровня*.



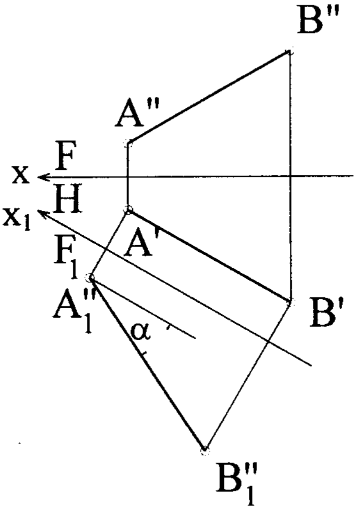


$Q \parallel H$ – горизонтальная плоскость уровня



$Q \perp F$ – фронтально-проецирующая плоскость

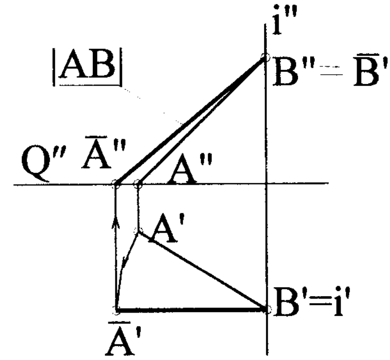
Можно преобразовать прямые и плоскости *общего* положения в *частное* положение. Если выбрать дополнительную плоскость, параллельную прямой, то относительно нее прямая займет положение уровня и спроецируется в истинную величину.



$[A_1''B_1'']=|AB|$

α – угол наклона $[AB]$ к H

Можно не вводить дополнительную плоскость проекций, а отрезок *общего* положения повернуть относительно проецирующей оси до положения *уровня*. При этом вращающийся конец будет перемещаться в плоскости *уровня Q*.

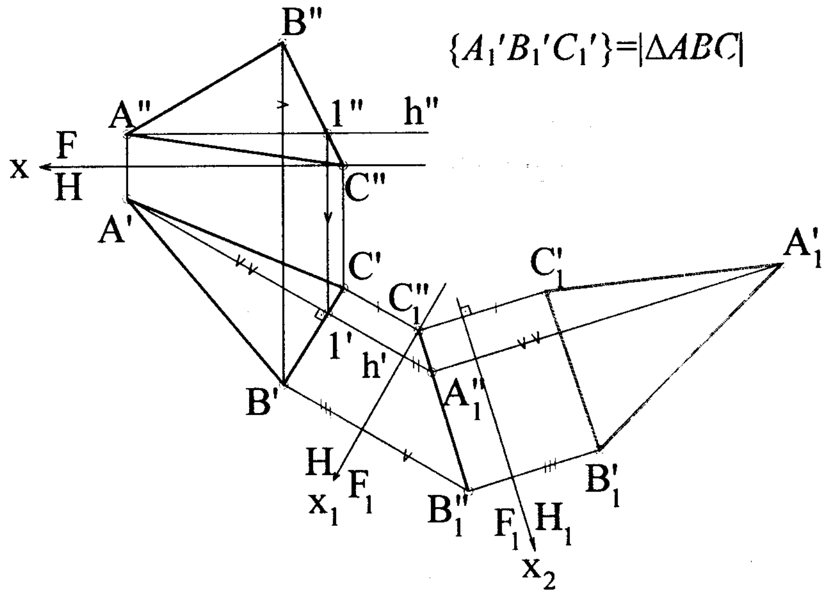


$Q \perp i$

$Q \parallel H$

$[\bar{A}''\bar{B}'']=|AB|$

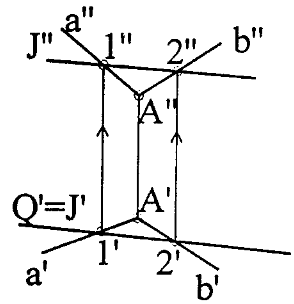
При преобразовании плоскости *общего* положения в проецирующую необходимо ввести дополнительную плоскость проекций, перпендикулярную к ней. Но плоскости перпендикулярны, если одна из них содержит прямую перпендикулярную к другой. В качестве таких прямых используют линии уровня, т.е. *горизонталь* и *фронталь*, лежащие в плоскости. Если ввести еще одну дополнительную плоскость проекций, *параллельную* заданной плоскости, то относительно нее плоскость займет положение *уровня* и спроецируется на нее в истинную величину.



Важнейшими позиционными задачами, когда рассматривается только положение геометрических фигур относительно друг друга и плоскостей проекций, являются задачи на *пересечение поверхностей* и *пересечение линии с поверхностью.* Простейшей поверхностью является плоскость.

Линия пересечения плоскостей есть прямая, общая для них. Она может быть собственной и несобственной. Для ее построения достаточно найти две точки, ей принадлежащие. Дважды вводятся вспомогательные плоскости (лучше частного положения: проецирующие или уровня), пересекающие заданные плоскости по двум прямым, точка пересечения которых принадлежит линии пересечения J.

Если одна пересекающаяся плоскость проецирующая ($Q\perp H$), то одну проекцию линии пересечения J' имеем в условиях (она совпадает с проекцией проецирующей плоскости), а вторую проекцию J'' строим по принадлежности непроецирующей плоскости.

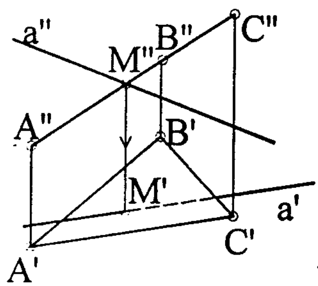


Прямая и плоскость пересекаются в точке, но в точке пересекаются и две прямые. Следовательно, пересечение прямой с плоскостью может быть сведено к более простой задаче: к пересечению заданной прямой с некоторой прямой, лежащей в плоскости. Для получения этой прямой необходимо: заключить данную прямую во вспомогательную проецирующую плоскость; построить линию пересечения заданной плоскости с вспомогательной; найти точку пересечения построенной линии с заданной прямой; определить видимость линий *методом конкурирующих точек*.

Если прямая или плоскость занимают частное положение, то вспомогательная плоскость не требуется.

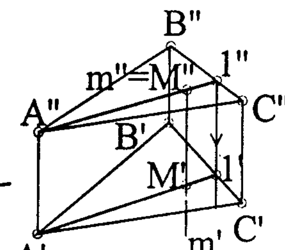
$\Delta ABC\perp F$

$\Delta ABC\cap a=M$



$m\perp F$

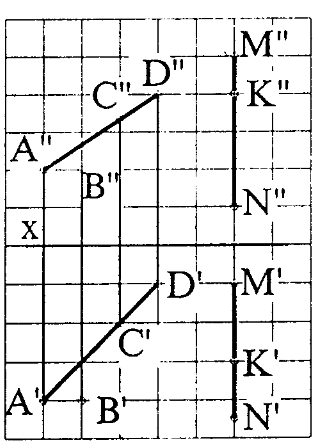
$\Delta ABC\cap m=M$



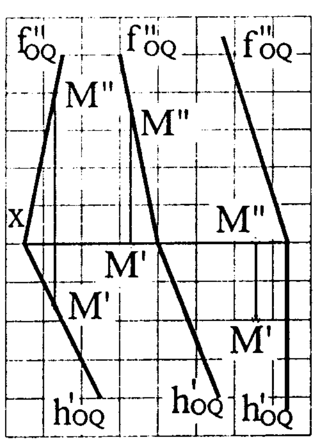
1.1. ТОЧКА, ПРЯМАЯ, ПЛОСКОСТЬ. ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ ПЛОСКОСТИ

Тестовые задачи

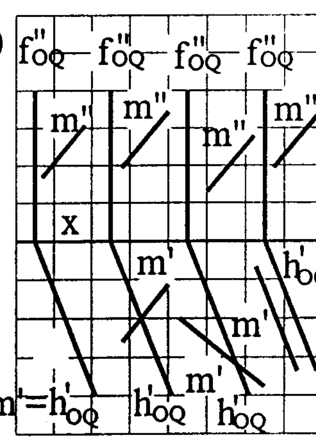
1)



2)



3)



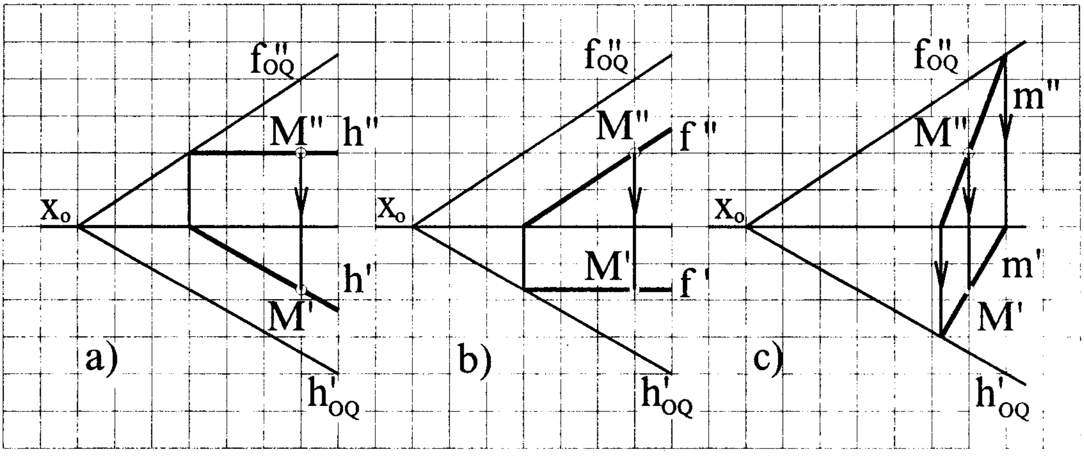
1) Определить, лежат ли точки B и C на прямой AD и точка K на прямой MN?

2) Как расположена точка M по отношению к плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$?

3) Как расположена прямая m по отношению к плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$?

Пример решения задачи

(№) В плоскости, заданной следами, построить несколькими способами горизонтальную проекцию точки M, лежащей в этой плоскости.



Дано: $Q(f_{OQ}'',h_{OQ}'')$, $M(M'')$, $Q \supset M$

Построить: M'

Решение: Точка, принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой этой плоскости. Можно использовать прямые частного (a, b) и общего (c) положений.

a) $M \in h$, $h'' \to h'$, $M'' \to M'$; b) $M \in f$, $f'' \to f'$, $M'' \to M'$; c) $M \in m$, $m'' \to m'$, $M'' \to M'$

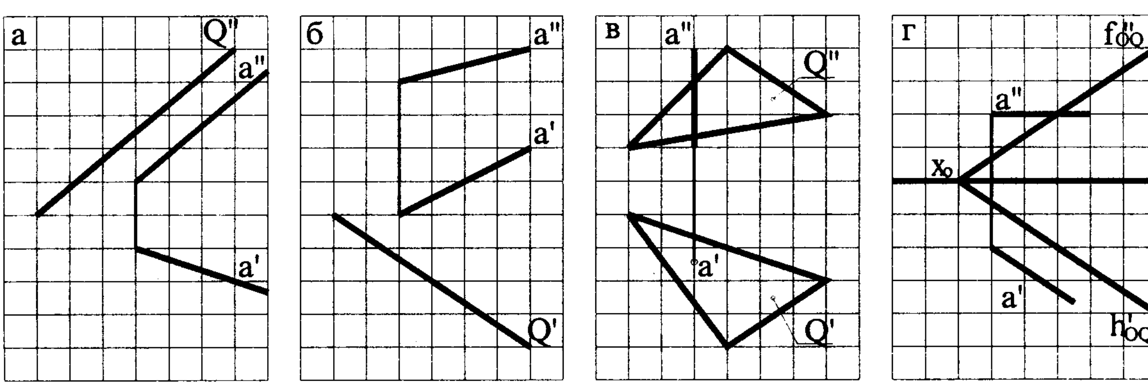
Условия задач

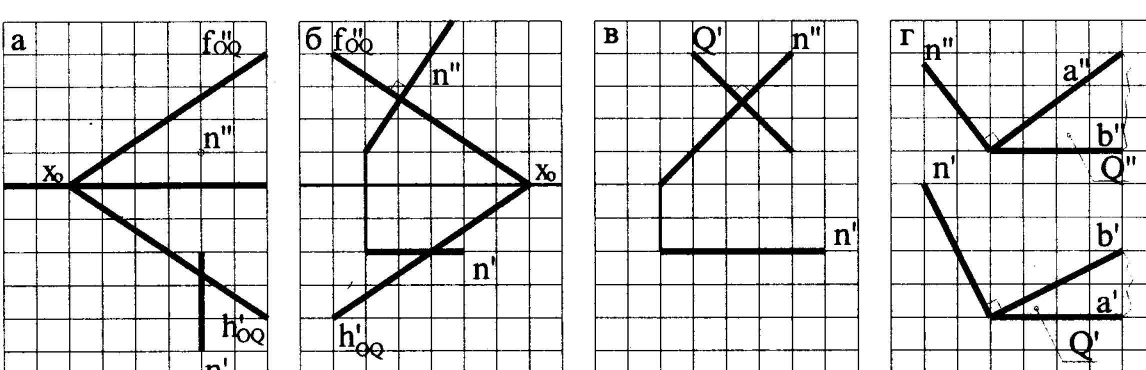
1. Достроить недостающую проекцию точки D, если известно, что она лежит в плоскости Q $\{ABC\}$. (см. графическое условие 1)
2. Построить горизонтальную проекцию точки K, принадлежащей плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$ (профильной плоскостью проекции не пользоваться). (2)
3. Построить фронтальную проекцию точки K, принадлежащей плоскости $Q(a, M)$. (3)
4. В плоскости $Q(a \cap b)$ провести через точку K горизонталь и построить ее проекции. (4)
5. Построить горизонтальную проекцию прямой a, лежащей в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (5)
6. Построить фронтальную проекцию отрезка AB, лежащего в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$(6)
7. Построить фронтальную проекцию прямой m, лежащей в плоскости $Q(a \cap b)$. (7)
8. Построить фронтальную проекцию фронтали f, лежащей в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (8)
9. Построить следы плоскости, заданной параллельными прямыми a и b. (9)

10. Построить следы плоскости, заданной пересекающимися прямыми *AB* и *BC*. (10)
11. Построить в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$ проекции отрезка *MN*, разноименные проекции концов *M* и *N* которого заданы. (11)
12. Построить в плоскости $Q(a \cap b)$ проекции отрезка *MN*, разноименные проекции концов *M* и *N* которого заданы. (12)
13. Построить в плоскости $Q(f \cap h)$ отрезок *MN*, разноименные проекции концов *M* и *N* которого заданы. (13)
14. Построить проекции прямой, проходящей через точку *K* и пересекающей заданные прямые *AB* и *CD*. (14)
15. В заданных плоскостях провести горизонталь, расположенную от оси *x* на расстоянии 15 мм. (15)
16. Достроить горизонтальную проекцию многоугольника *ABCDE*. (16)
17. Построить горизонтальную проекцию треугольника *ABC*, лежащего в плоскости $Q(a||b)$. (17)
18. Построить горизонтальную проекцию треугольника *ABC*, лежащего в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (18)
19. Построить фронтальную и горизонтальную проекции треугольника *ABC*, лежащего в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (19)

1.2. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Тестовые задачи

1)


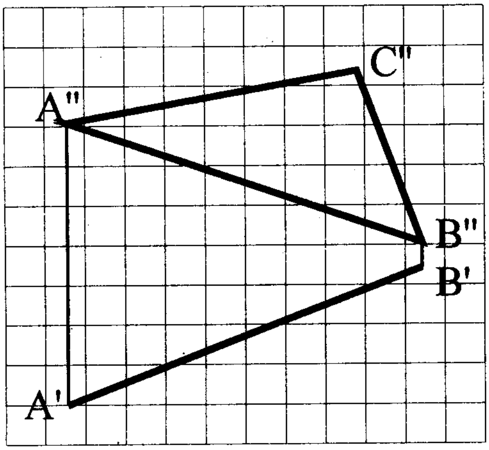
2)


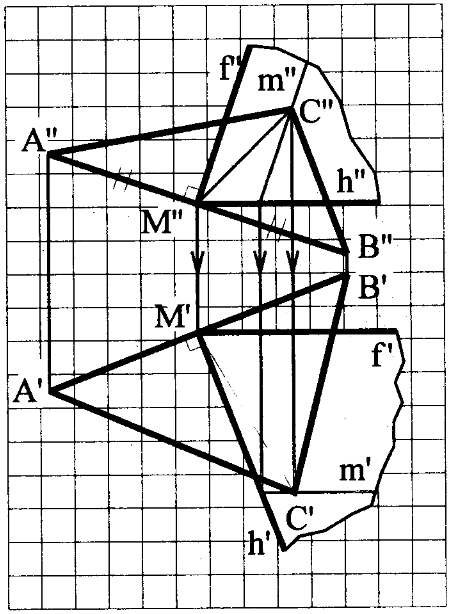
1) Как расположена прямая а относительно плоскости Q ($a \cap Q$ или $a||Q$)?

2) На каком чертеже изображена прямая $n \perp Q$?

Пример решения задачи

№ Достроить горизонтальную проекцию равнобедренного ΔABC по его фронтальной проекции, если AB – основание.





Дано: ΔABC ($A''B''C''$, $A'B'$), $AC=CB$

Построить: $A'B'C'$

Решение:

1) В равноберенном треугольнике высота делит основание пополам, т.е. если $MC \perp AB \Rightarrow AM=MB$
2) Заключим MC в плоскость $Q(MC \in Q)$. Так как $MC \perp AB \Rightarrow Q \perp AB$. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна горизонтали h и фронтали f этой плоскости, т.е. Q надо задать как $f \cap h$. Тогда $A''B'' \perp f''$, $A'B' \perp h'$.
3) Проекция C' находится по принадлежности плоскости Q. Проводим прямую $m \supset C \Rightarrow m \in Q$, $m \| f \Rightarrow m'' \| f'' \rightarrow m' \| f'$, $C'' \rightarrow C' \in m'$. Соединяем точки.

Условия задач

1. Определить, параллельна ли прямая m плоскости $Q(a \cap b)$. (20)
2. Определить, параллельна ли прямая a плоскости $Q(f_{0Q}, h_{0Q})$. (21)
3. Построить проекции горизонтали, проходящей через точку M параллельно плоскости $Q(a, A)$.(22)
4. Построить проекцию профильной прямой, проходящей через точку M параллельно плоскости $Q(f_{0Q}, h_{0Q})$. (23)
5. Построить через точку M плоскость, параллельную прямой a и перпендикулярную горизонтальной плоскости проекций. (24)
6. Построить горизонтальную проекцию прямой a, проходящей через точку A и параллельную плоскости $Q(h \cap f)$. (25)
7. Построить горизонтальную проекцию треугольника ABC, параллельного плоскости $Q(a \cap b)$. (26)

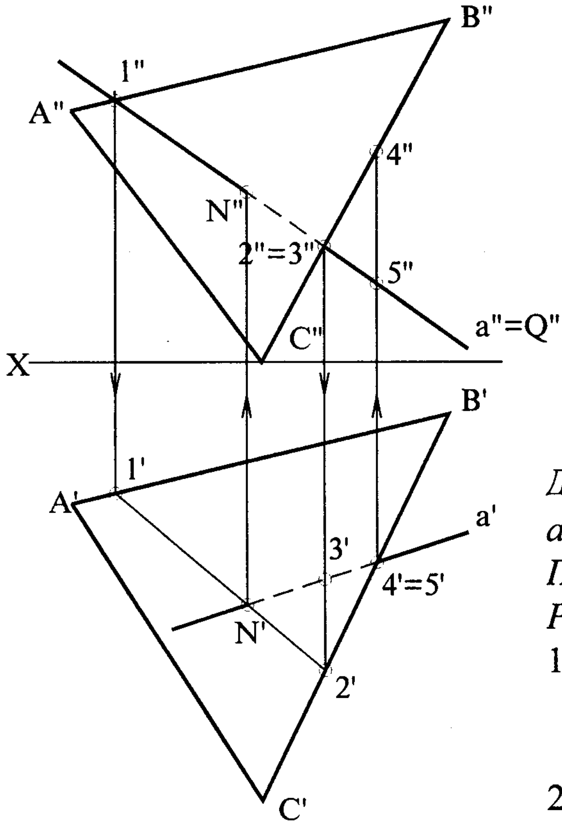
8. Достроить горизонтальную проекцию треугольника ABC, если известно, что сторона AB параллельна плоскости $Q(m||n)$. (27)
9. Построить проекции перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости $Q(a||b)$. (28)
10. Построить проекции плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости треугольника ABC и параллельно прямой m. (29)
11. Построить проекции плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой m, а через точку M - проекции плоскости, параллельной прямой κ. (30)
12. Построить проекции перпендикуляра из точки M к плоскости $Q(a,M)$. (31)
13. Построить проекции перпендикуляра из точки M к плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. Точка M принадлежит плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (32)
14. Построить проекции перпендикуляра из точки M к плоскости $Q(a||b)$. (33)
15. Построить фронтальную проекцию прямой a, перпендикулярной прямой b и проходящей через точку M.(34)
16. Построить недостающую проекцию точки M, равноудаленной от точек A и B. (35)
17. Построить проекции плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскостям $Q(f_{0Q},h_{0Q})$ и $R(a \cap b)$. (36)
18. Построить проекции точки M, симметричной точке K относительно горизонтально-проецирующей плоскости R. (37)
19. Построить проекции плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскостям $Q(f_{0Q},h_{0Q})$ и $R \perp F$. (38)
20. Построить проекции плоскости, проходящей через точку M и прямую a параллельно плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$ и перпендикулярно плоскости $R \perp F$. (39)
21. Построить проекции точки N, симметричной данной точке M относительно плоскости $Q(h \cap a)$ общего положения. (40)
22. Построить проекции равнобедренного треугольника ABC с основанием AB и вершиной C на проецирующей прямой a. (41)
23. Построить недостающую проекцию прямоугольника $ABCD$. Одна из сторон AB известна. (42)
24. Построить проекции прямой, проходящей через точку M перпендикулярно к прямым a и b. (43)
25. Построить горизонтальную проекцию равнобедренного треугольника ABC, у которого AB – основание. (44)
26. Построить недостающую проекцию прямоугольного треугольника с прямым углом при вершине A. (45)
27. Построить на отрезке AB проекции квадрата, направление горизонтальной проекции смежной стороны квадрата известно (точка $D \subset d$). (46)
28. Определить фронтальную проекцию прямой b при условии, что прямая b пересекает в точке A данную прямую a под углом 90°. (47)

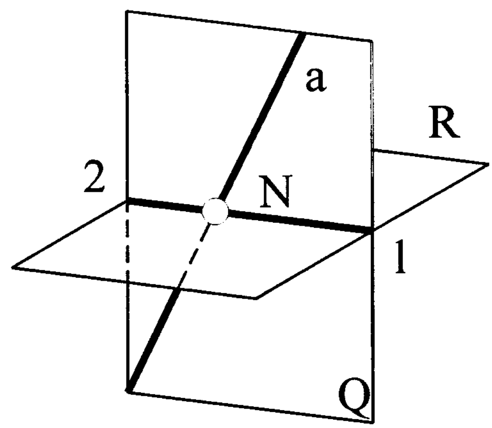
29. Построить проекции отрезка *AB*, проходящего через точку *A* и пересекающегося под углом 90° в середине с данной прямой *a*. (48)

1.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пример решения задачи

№ Построить проекции точки пересечения прямой с плсокостью. Определить видимость линий.





Дано: $\Delta ABC(A'B'C',\ A''B''C'')$, прямая $a(a',a'')$

Построить: $\Delta ABC \cap a = ?$

Решение:

1. Заключаем прямую *a* во фронтально-проецирующую плоскость *Q*. $a \in Q$, $Q \perp F$;
2. $\Delta ABC \cap Q = [12]$, $[1''2''] \rightarrow [1'2']$;
3. $[1'2'] \cap a' = N'$;
4. $N' \rightarrow N''$, $\Delta ABC \cap a = N$;
5. Определяем *видимость* прямой *a* по конкурирующим точкам. Считаем ΔABC непрозрачным. *Видимость* на *F*: выбираем конкурирующие точки $2''=3''$, $2 \in BC$, $3 \in a$, $2'' \rightarrow 2'$, $3'' \rightarrow 3'$. Точка $2'$ находится ближе к наблюдателю ($y_2 > y_3$), следовательно $B''C''$ – видима. *Видимость* на *H*: выбираем конкурирующие точки $4'=5'$, $4 \in BC$, $5 \in a$. Точка $4''$ находится выше ($z_4 > z_5$), т.е. $B'C'$ – видима.

Условия задач

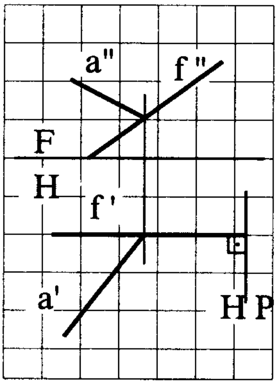
1. Построить проекции точки пересечения прямой линии с плоскостью. Определить видимость линий относительно плоскости. (49)…(64)
2. Построить проекции линии пересечения двух непрозрачных плоскостей. Определить взаимную видимость плоскостей. (65)…(80)

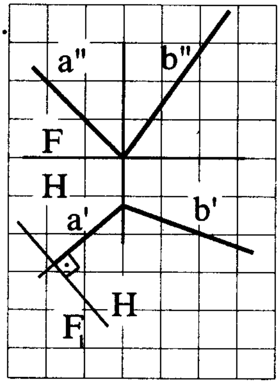
1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ

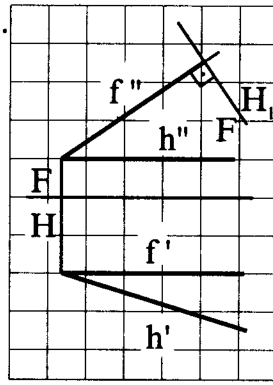
1.4.1. Способ замены плоскостей проекций

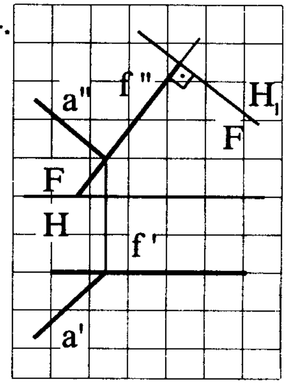
Тестовые задачи

На каких из рисунков 1…4 плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми, спроецируется на третью плоскость проекций прямой линией.

1.


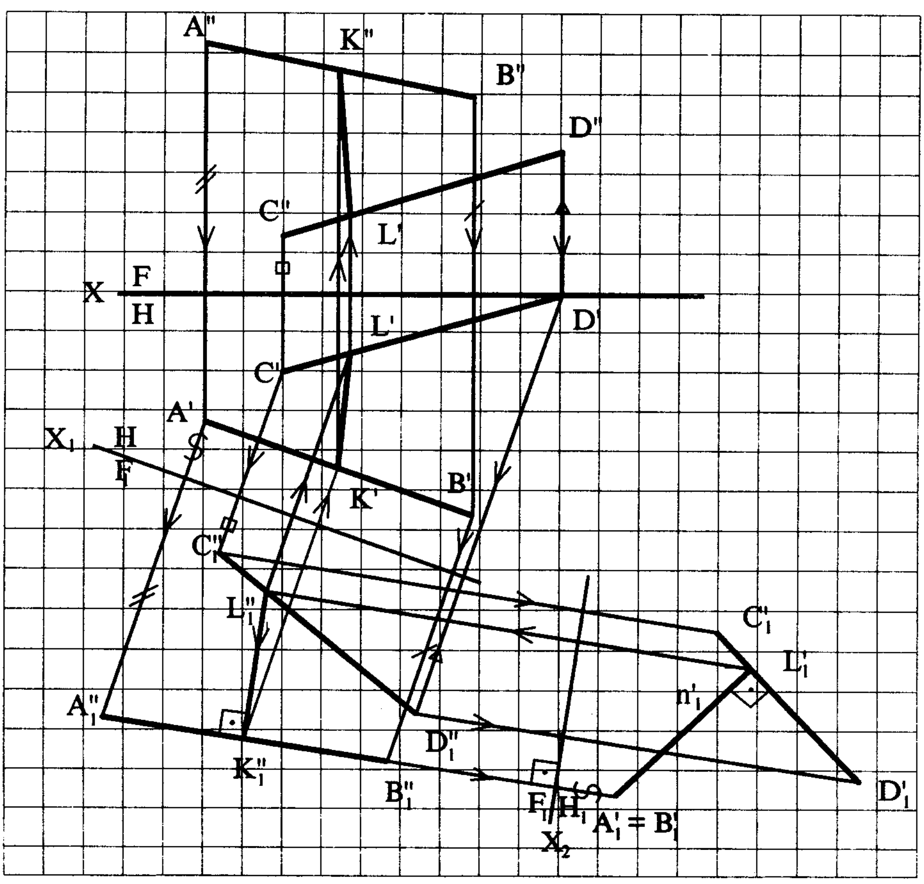
2.


3.


4.


Пример решения задачи

№ Определить расстояние между отрезками [*AB*] и [*CD*].



Дано: $[AB] \dot{-} [CD]$

Построить: Расстояние между $[AB]$ и $[CD]$

Решение:

1. Вводим плоскость $F_1 \| [AB]$;
2. Получаем $[A_1''B_1'']$, $[C_1''D_1'']$. Причем $[A_1''B_1''] = |[AB]|$;
3. Вводим плоскость $H_1 \perp F_1$, $H_1 \perp [AB] \Rightarrow H_1 \perp [A_1''B_1'']$;
4. Получаем $A_1' \equiv B_1'$, т.е. $[AB]$ спроецировался в точку на H_1;
5. Проводим $n \perp [CD]$, $n \perp [AB]$, т.е. $|n_1'| = |n|$ – расстояние между $[AB]$ и $[CD]$;
6. $n \cap [AB] = K$, $n \cap [CD] = L$;
7. Возвращаемся в заданные проекции: $L_1' \rightarrow L_1''$, $L_1''K_1'' \perp [A_1''B_1'']$, так как $[AB]$ – отрезок уровня в системе плоскостей HF_1 (теорема о проецировании прямого угла);
8. Проецируем $L_1'' \rightarrow L'$, $K_1'' \rightarrow K'$;
9. Проецируем $L' \rightarrow L''$, $K' \rightarrow K''$

Условия задач

1. Определить систему плоскостей проекций, в которой отрезок прямой a станет проецирующим. (81)
2. Определить системы плоскостей проекций H/F_1 и F/H_1, в которых плоскость $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$ станет проецирующей. (82)
3. Способом замены плоскостей проекций перевести заданные параллельные прямые в проецирующее положение. (83),(84)
4. Способом замены плоскостей проекций перевести плоскость $Q(a \cap b)$ во фронтально-проецирующее положение. (85)
5. Способом замены плоскостей проекций перевести плоскость $Q(ABC)$ в горизонтально-проецирующее положение. (86)
6. Способом замены плоскостей проекций определить натуральную величину треугольника ABC. Последовательным вращением вокруг двух проецирующих осей привести плоскость в горизонтальное положение уровня. (87),(88)

1.4.2. Способ вращения вокруг проецирующей прямой

Тестовые задачи

1) Как должна быть расположена ось вращения, чтобы прямую общего положения повернуть в положение

$$\frac{\overline{a} \parallel F}{i\perp\ldots}\ ; \quad \frac{\overline{a} \parallel H}{i\perp\ldots}$$

2) Как должна быть расположена ось вращения, чтобы плоскость общего положения повернуть в положение

$$\frac{\overline{Q} \parallel H}{i\perp\ldots}\ ; \quad \frac{\overline{Q} \parallel F}{i\perp\ldots}$$

Условия задач

1. Плоскость $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ вращением вокруг оси i привести в положение проецирующей. (89)
2. Плоскость $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ преобразовать вращением во фронтально-проецирующую. (90)
3. Точку A повернуть вокруг оси i:

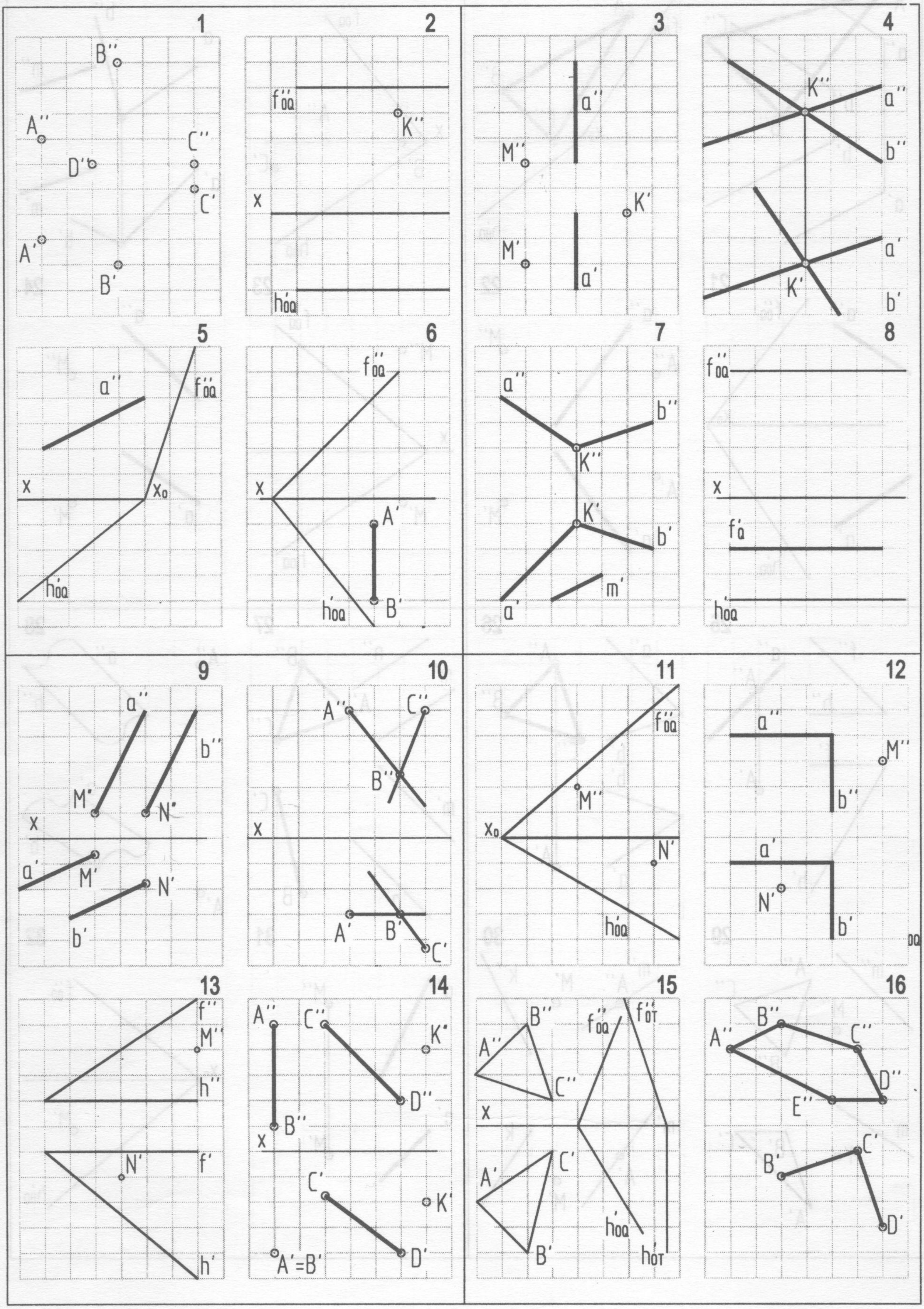
   а) на угол 90° по часовой стрелке;

   б) до совмещения с H. (91)
4. Точку A повернуть вокруг оси i:

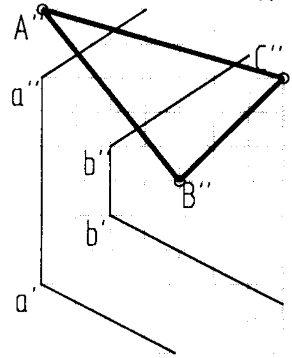
   а) на угол 90° против часовой стрелки;

   б) до совмещения с F. (92)
5. Построить недостающую проекцию точки A, если после поворота вокруг оси i она будет принадлежать прямой a. (93)
6. Точку A повернуть вокруг оси i до совмещения с горизонтально-проецирующей плоскостью Q'. (94)
7. Определить натуральную величину отрезка AB, преобразовать AB в проецирующее положение способом вращения. (95)
8. Вращением вокруг проецирующей оси преобразовать плоскость $Q(a\cap b)$ во фронтально-проецирующее и горизонтально-проецирующее положения. (96)

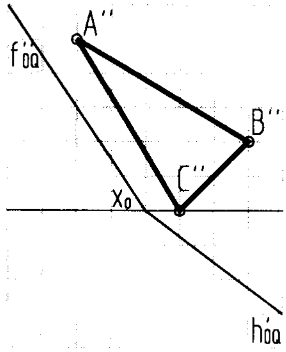
Графические условия к разделу 1



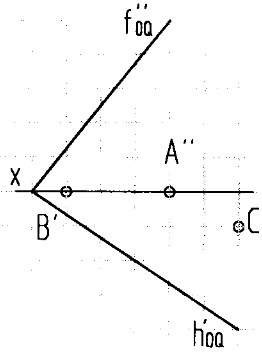
17



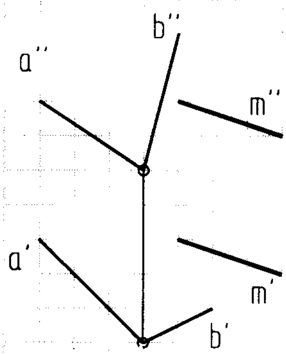
18



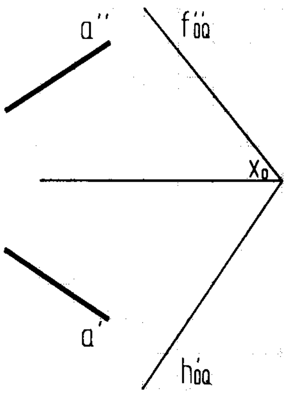
19



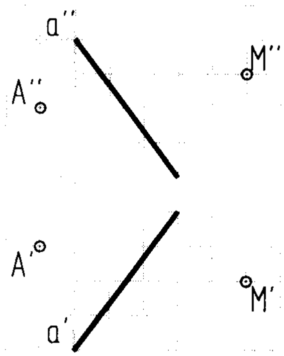
20



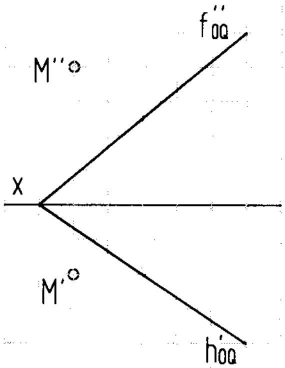
21



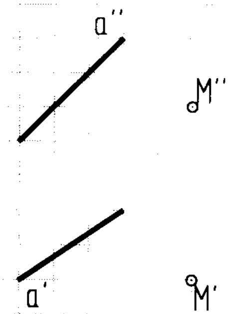
22



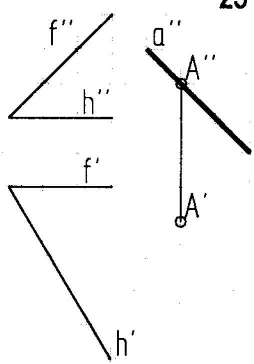
23



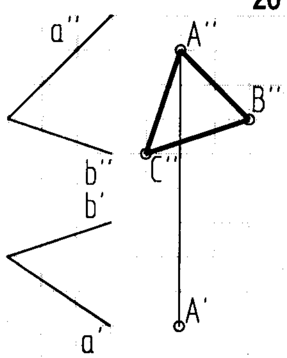
24



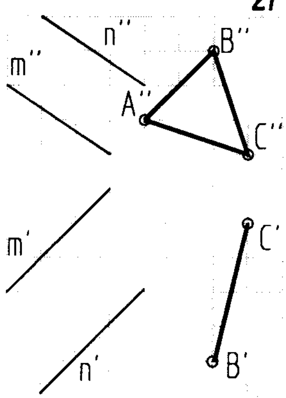
25



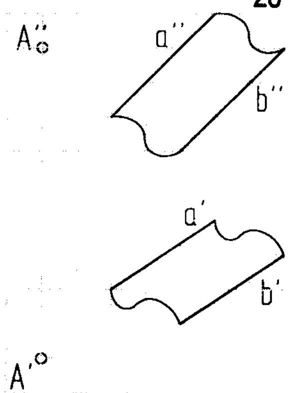
26



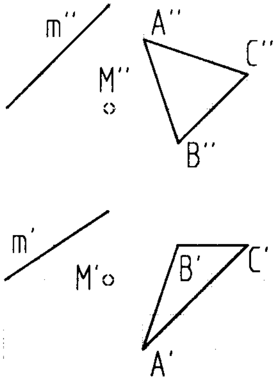
27



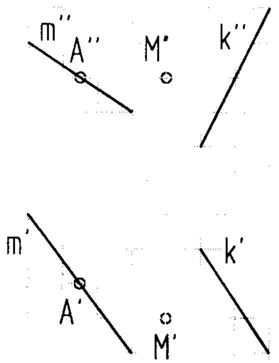
28



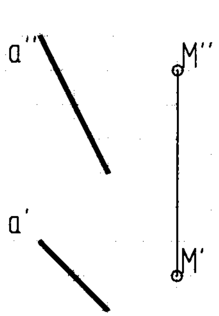
29



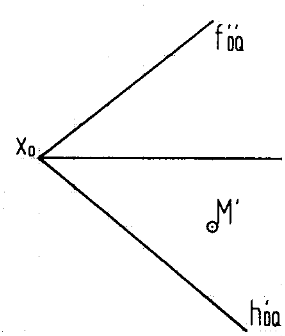
30

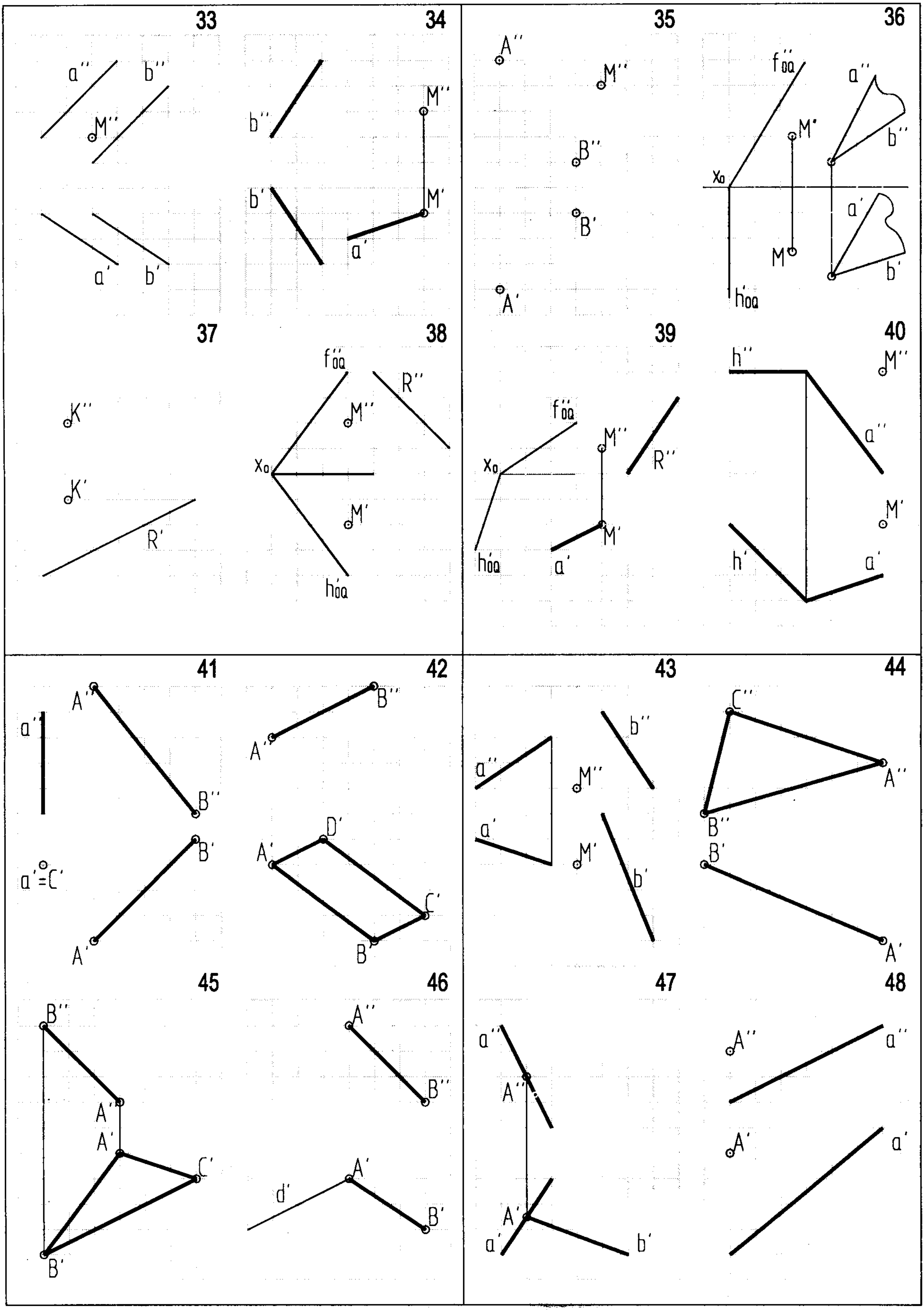


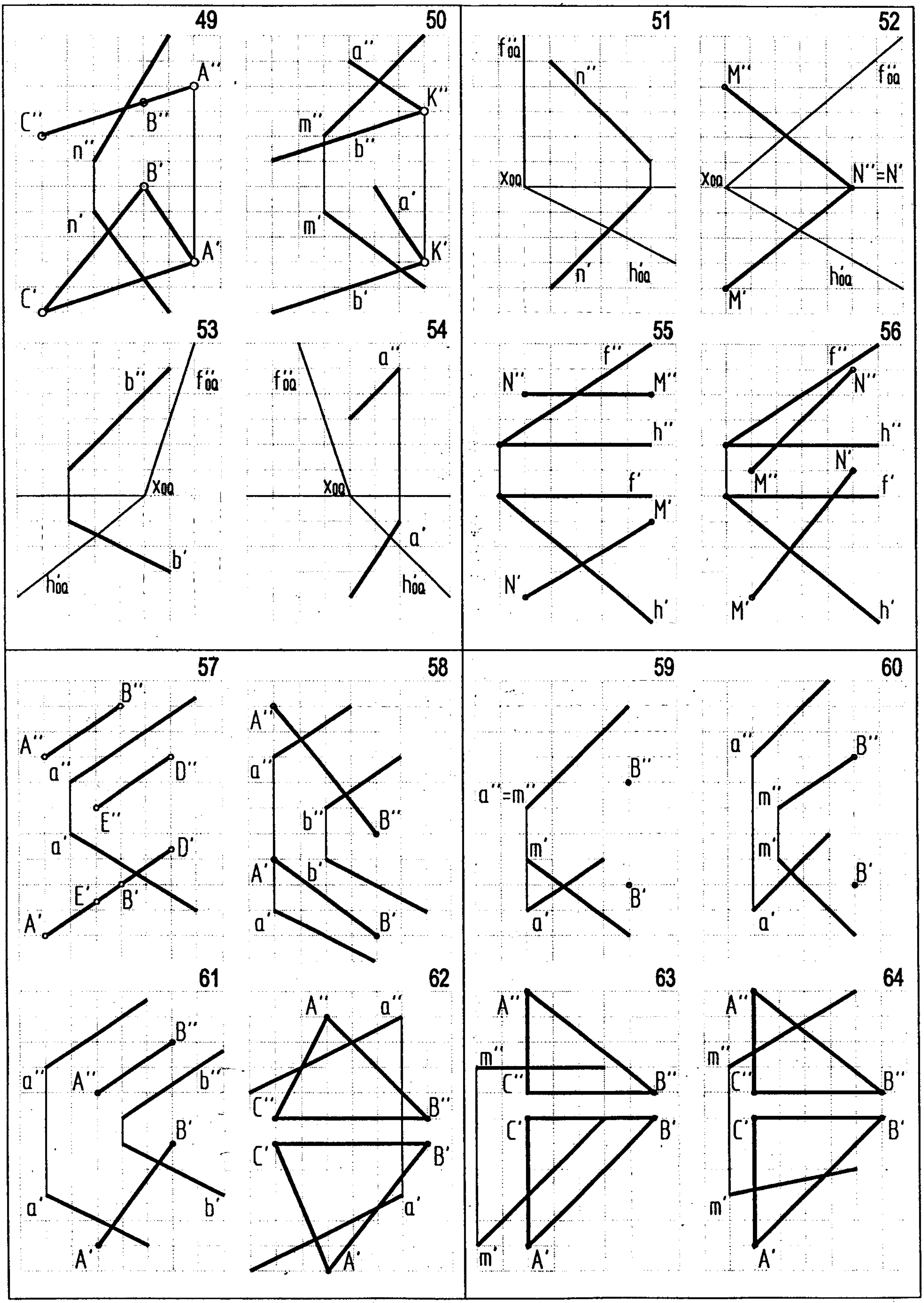
31

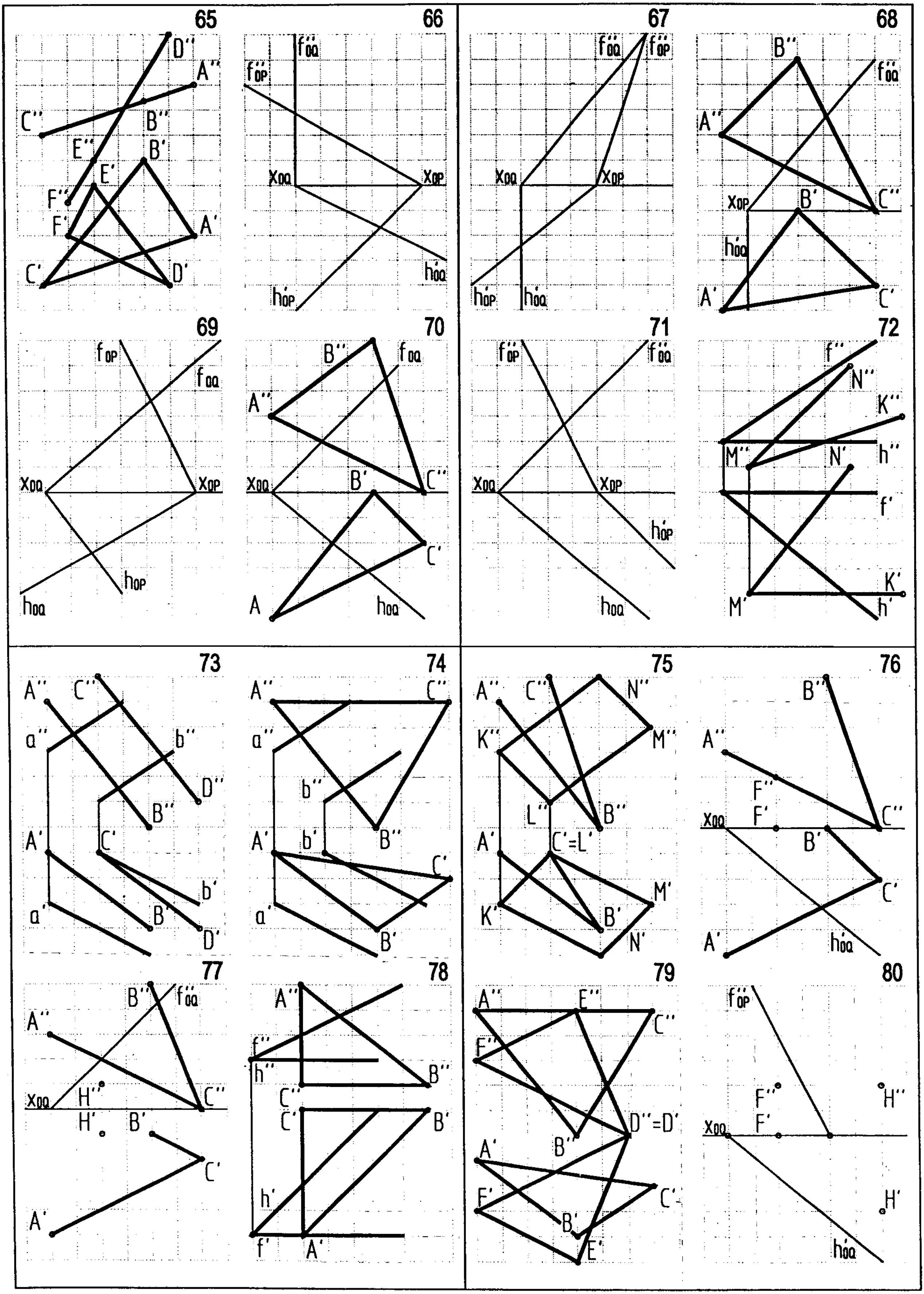


32

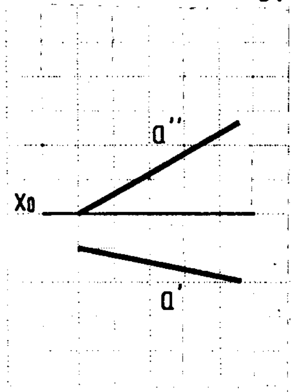



33
a''
b''
M''
a'
b'
34
b''
M''
b'
M'
a'
35
A''
M''
B''
B'
A'
36
f''0Q
a''
M'
b''
x0
a'
M
b'
h'0Q
37
K''
K'
R'
38
f''0Q
R''
M''
x0
M'
h'0Q
39
f''0Q
M''
R''
x0
M'
h'0Q
a'
40
h''
M''
a''
M'
h'
a'
41
A''
a''
B''
B'
a'=C'
A'
42
B''
A''
D'
A'
C'
B'
43
b''
a''
M''
a'
M'
b'
44
C''
A''
B''
B'
A'
45
B''
A''
A'
C'
B'
46
A''
B''
A'
d'
B'
47
a''
A''
A'
a'
b'
48
A''
a''
A'
a'

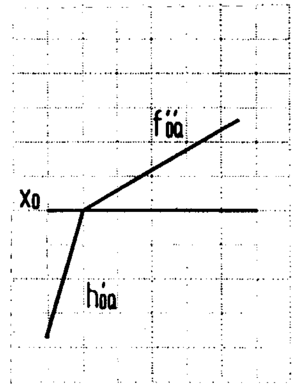

49
A''
C''
B''
n''
B'
n'
A'
C'
50
a''
K''
m''
b''
a'
m'
K'
b'
51
f''oa
n''
xoa
n'
h'oa
52
M''
f''oa
xoa
N''=N'
h'oa
M'
53
b''
f''oa
xoa
b'
h'oa
54
a''
f''oa
xoa
a'
h'oa
55
f''
N''
M''
h''
f'
M'
N'
h'
56
f''
N''
h''
N'
M''
f'
M'
h'
57
B''
A''
a''
D''
E''
a'
D'
E'
B'
A'
58
A''
a''
b''
B''
A'
b'
a'
B'
59
B''
a''=m''
m'
B'
a'
60
a''
B''
m''
m'
B'
a'
61
B''
a''
A''
b''
B'
a'
b'
A'
62
A''
a''
C''
B''
C'
B'
a'
A'
63
A''
m''
C''
B''
C'
B'
m'
A'
64
A''
m''
C''
B''
C'
B'
m'
A'


65
D''
A''
C''
B''
E''
B'
E'
F''
F'
A'
C'
D'
66
f''0Q
f''0P
x0Q
x0P
h'0Q
h'0P
67
f''0Q
f''0P
x0Q
x0P
h'0P
h'0Q
68
B''
f''0Q
A''
x0P
B'
C''
h'0Q
A'
C'
69
f0P
f0Q
x0Q
x0P
h0P
h0Q
70
B''
f0Q
A''
x0Q
B'
C''
C'
A
h0Q
71
f''0P
f''0Q
x0Q
x0P
h'0P
h0Q
72
f''
N''
K''
M''
N'
h''
f'
K'
M'
h'
73
A''
C''
a''
b''
D''
B''
A'
C'
b'
a'
B'
D'
74
A''
C''
a''
b''
A'
b'
B''
C'
a'
B'
75
A''
C''
N''
K''
M''
L''
B''
A'
C'=L'
M'
K'
B'
N'
76
B''
A''
F''
x0Q
F'
C''
B'
C'
A'
h'0Q
77
B''
f''0Q
A''
x0Q
H''
C''
H'
B'
C'
A'
78
A''
f''
h''
B''
C''
C'
B'
h'
f'
A'
79
A''
E''
C''
F''
D''=D'
A'
B''
F'
C'
B'
E'
80
f''0P
F''
H''
x0Q
F'
H'
h'0Q

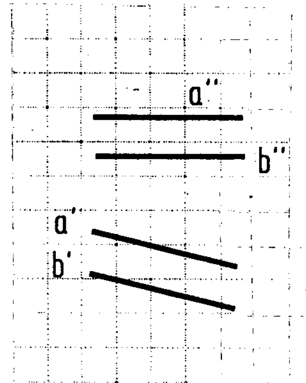
81



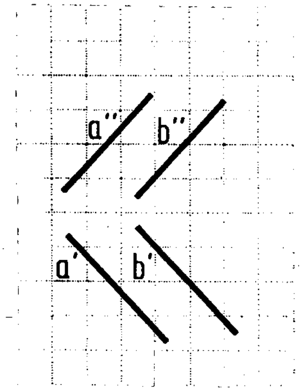
82



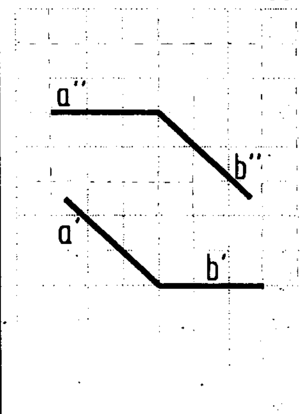
83



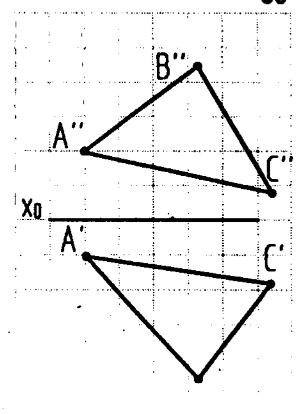
84



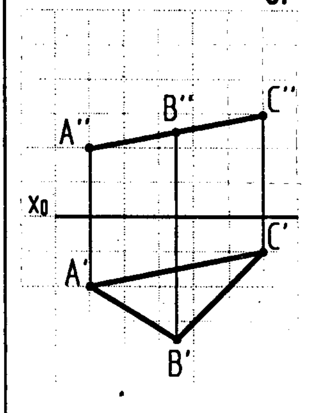
85



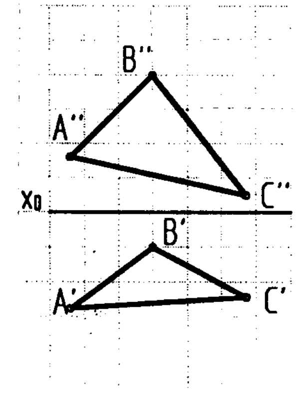
86



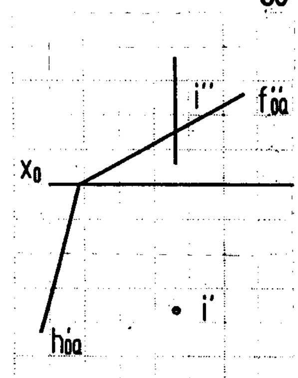
87



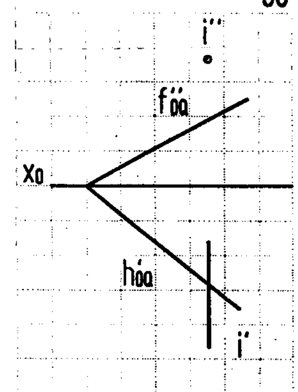
88



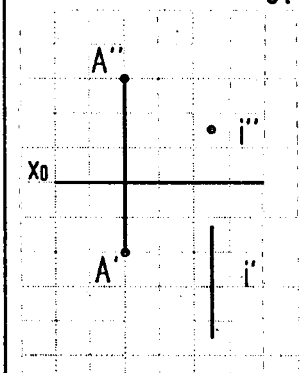
89



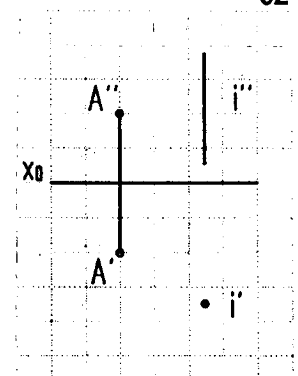
90



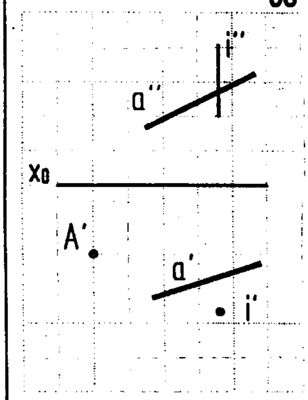
91



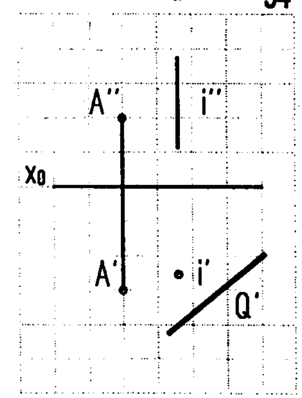
92



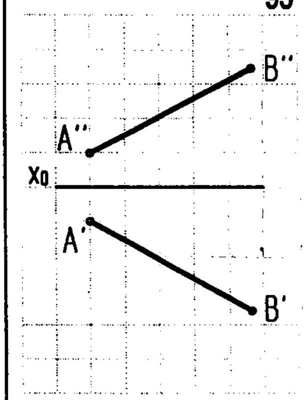
93



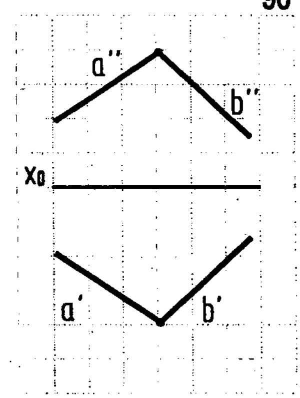
94



95



96

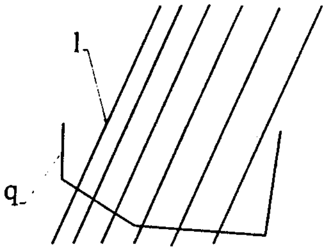


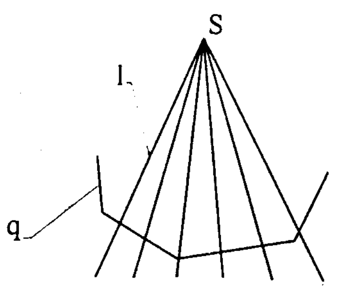
2. ПОВЕРХНОСТИ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА И ИХ МОДЕЛИ

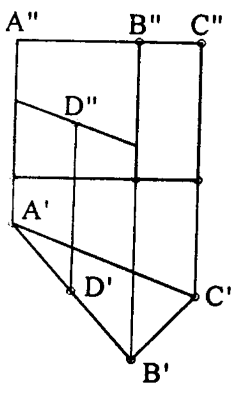
Поверхности, образованные непрерывным движением одной линии (образующей) вдоль другой линии (направляющей) по определенному закону, называются *кинематическими*. Образующие и направляющие образуют непрерывный каркас поверхности, т.е. через каждую точку поверхности можно провести две линии каркаса: образующую l и направляющую q.

Совокупность условий, задающих поверхность на чертеже, называется *определителем* поверхности. Определитель поверхности состоит из двух частей: *геометрической*, задающей геометрические элементы поверхности (направляющую и образующую), *алгоритмической*, определяющей соотношение между направляющей и образующей. Задание поверхности элементами определителя является однозначным, но не наглядным. На практике поверхности задают при помощи очерковых линий.

Очерк поверхности – это проекция контура видимости. На рис. 2.1 и 2.2. показаны определители *гранных* поверхностей: призматической и пирамидальной. Если пересечь эти поверхности плоскостями оснований, получим геометрические тела призму и пирамиду. Грани являются частями плоскостей. Линии пересечения граней называются ребрами, точки пересечения ребер – вершинами. Точка принадлежит грани, если она принадлежит какой-либо линии этой грани (рис. 2.3, 2.4). Поверхности, образованные вращением какой-либо линии (образующей l) вокруг неподвижной оси i называются поверхностями *вращения*. Если образующая прямая, то поверхность – линейчатая (коническая, цилиндрическая) (рис. 2.5, 2.6). Геометрические тела конус и цилиндр получаются при пересечении поверхностей плоскостями оснований.







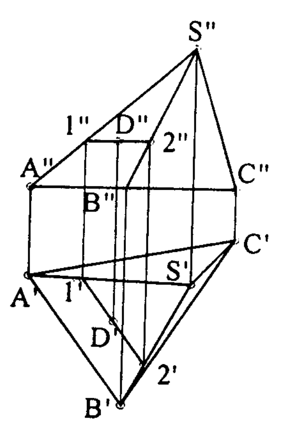


Рис. 2.1 Рис. 2.2 Рис. 2.3 Рис. 2.4

Если образующая кривая линия, то поверхность – нелинейчатая. Поверхность, образованная вращением окружности или ее части вокруг оси, не совпадающей с ее осью, называется тором. Сфера является частным случаем тора (рис. 2.7, 2.8). Направляющей всех поверхностей вращения является окружность (параллель). Линия пересечения поверхности вращения с плоскостью, проходящей через ось, называется меридианом. Меридианы и параллели образуют непрерывный каркас поверхности вращения. Использование параллелей и меридианов является основным способом построения проекций точек на поверхностях вращения.

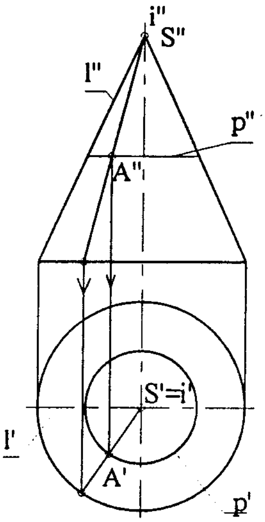


Рис. 2.5

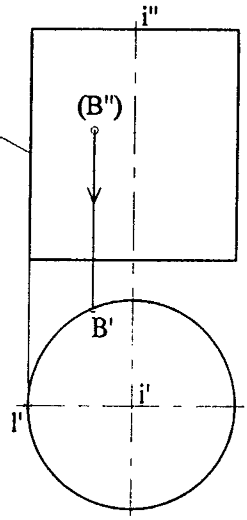


Рис. 2.6

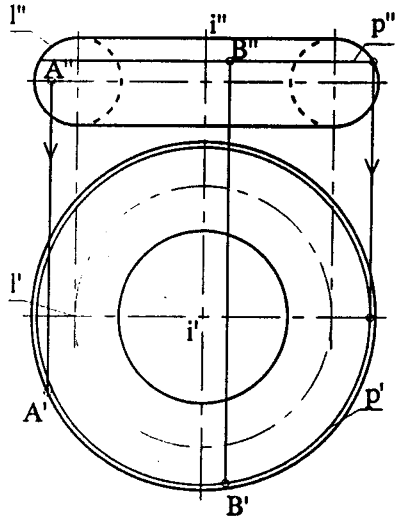


Рис. 2.7

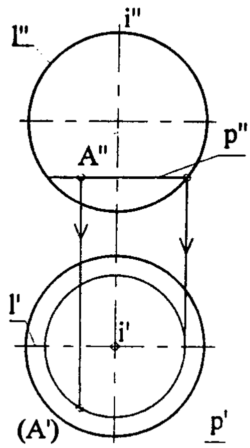
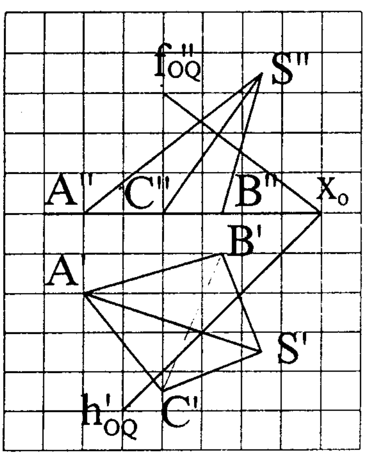


Рис. 2.8

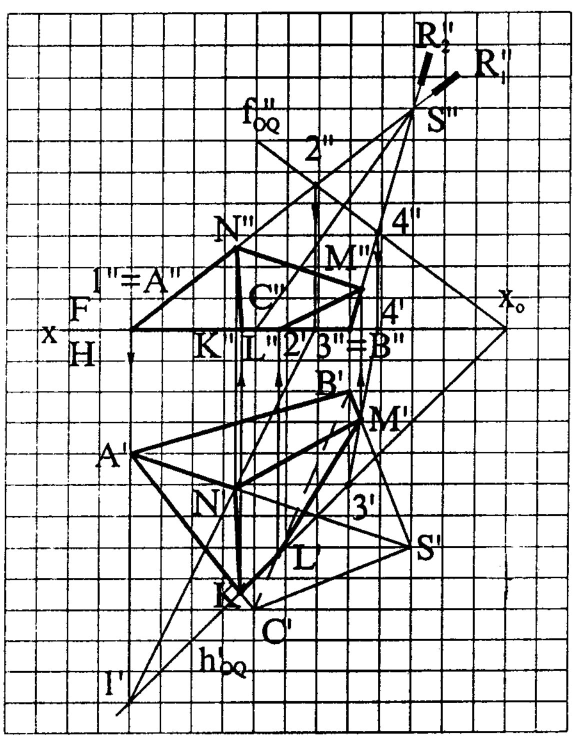
2.1. МНОГОГРАННИКИ

Пример решения задачи

№ Построить проекции пирамиды, усеченной плоскостью $Q(f_{OQ},h_{OQ})$.



Дано: $SABC$ – наклонная треугольная пирамида, $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ – плоскость общего положения
Построить: $SABC \cap Q$=?



Решение: $SABC \cap Q = J$, линия пересечения J – многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам пирамиды, а стороны – граням. Поэтому задачу можно решать двумя способами: находить вершины многоугольника (точки пересечения ребер пирамиды с плоскостью Q) или строить стороны этого многоугольника (линии пересечения граней с плоскостью Q).

1. Основание $\{ABC\} \in H$, $h_{OQ} \in H$, т.е. $[A'C'] \cap h'_{OQ} = K'$, $[C'B'] \cap h'_{OQ} = L'$, $\{ABC\} \cap Q = [KL] \in J$;
2. Найдем точку пересечения ребра AS с плоскостью Q. $AS \in R_1$, $R_1 \perp F$, $R_1 \cap Q = [12]$, $[1''2''] \rightarrow [1'2']$, $[1'2'] \cap A'S' = N' \in J$;
3. Найдем точку пересечения ребра BS с плоскостью Q. $BS \in R_2$, $R_2 \perp F$, $R_2 \cap Q = [34]$, $[3''4''] \rightarrow [3'4']$, $[3'4'] \cap B'S' = M' \in J$;
4. Ребро CS не пересекается с плоскостью Q, так как оно лежит в отсеченной части пирамиды;
5. $J = \{KLMN\}$.

Условия задач

1. Построить проекции пирамиды $\{SABC\}$. Основание ABC – горизонтальная плоскость уровня. Ребро AS – фронталь. Определить видимость ребер и сторон основания. (1)
2. Построить проекции призмы $\{ABCDA_1B_1C_1D_1\}$. Определить видимость ребер и сторон основания. Найти фронтальную проекцию точки M, принадлежащей грани $\{CDC_1D_1\}$. (2)
3. Построить проекции линии пересечения поверхности пирамиды с плоскостью Q (f_{0Q}, h_{0Q}). (3)
4. Построить недостающие проекции точек M и N, принадлежащих граням пирамиды. (4)
5. Построить проекции линии пересечения поверхности призмы плоскостью $Q(f \cap k)$. Плоскость сечения заштриховать. (5)
6. Построить проекции линии пересечения поверхности призмы плоскостью Q (f_{0Q}, h_{0Q}). (6)
7. Построить проекции линии пересечения поверхности пирамиды плоскостью Q, ограниченной параллелограммом. (7)
8. Построить проекции линии пересечения поверхности призмы плоскостью Q, ограниченной треугольником. (8)
9. Применяя способы преобразования чертежа, определить высоту пирамиды и истинную величину основания. (9)
10. Построить фронтальный след плоскости Q, пересекающей призму так, чтобы в сечении получился квадрат. Построить фронтальную проекцию сечения. (10)
11. Построить фронтальную проекцию правильной пирамиды по ее горизонтальной проекции и величине бокового ребра 60 мм. (11)

12. Определить углы наклона боковых граней пирамиды к горизонтальной плоскости проекций *H*. (12)
13. Выполнив объединение двух многогранников, построить проекции линии пересечения их граней, определить их видимость и видимость ребер многогранников. (13)
14. Выполнив вычитание многогранников, построить проекции призматического выреза в усеченной пирамиде. Определить видимость линий пересечения и видимость ребер многогранников. (14)

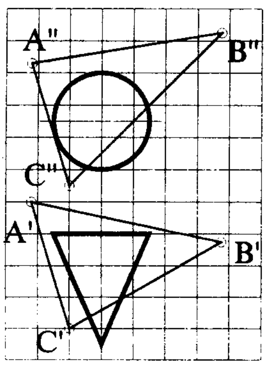
2.2. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ. ТОЧКИ И ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

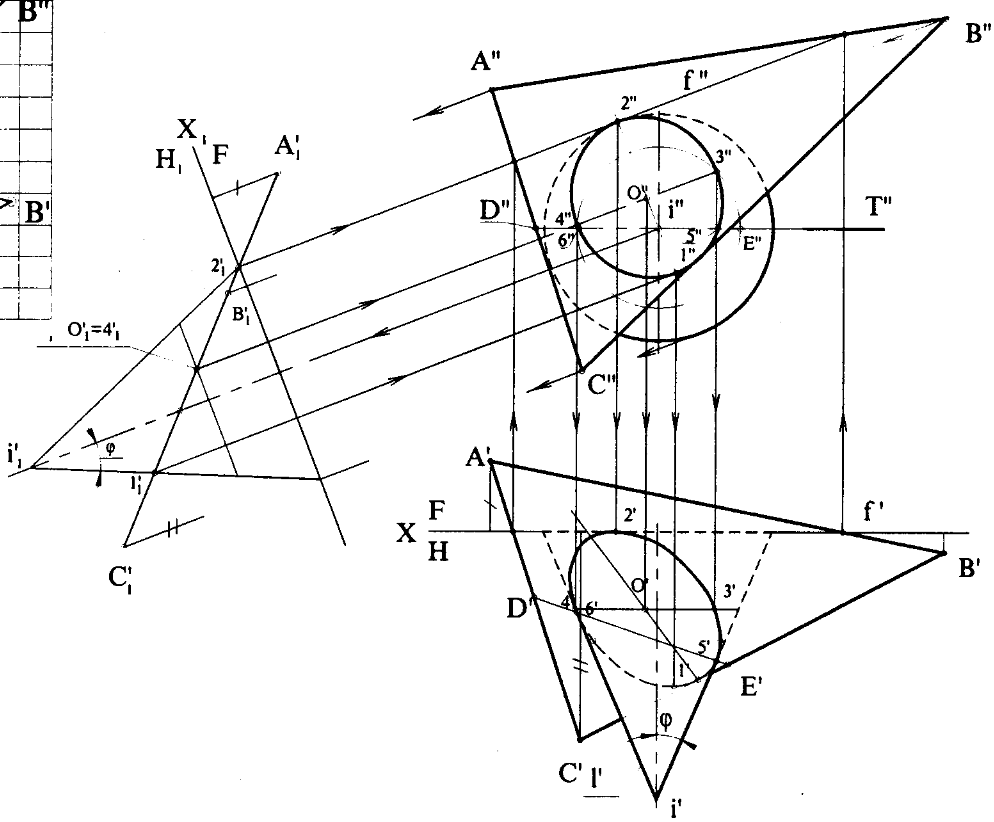
Пример решения задачи

№ Построить проекции конуса, усеченного плоскостью $Q(ABC)$.

Дано: $\Pi_K(\Pi_K'', \Pi_K')$, $Q(A''B''C'', A'C'B')$

Построить: $\Pi_K \cap Q = J$?





Решение: Плоскость Q – общего положения. Если преобразовать ее в плоскость, занимающую проецирующее положение, то задача сводится к частному случаю пересечения. Вводим дополнительную плоскость $H_1 \perp Q \Rightarrow H_1 \perp f'' \in Q$. Причем f' совпадает с проекциями оси x и основания конуса. $Q_1' = C_1'B_1'A_1'$, а $(1_1'2_1') = J_1'$ – проекция линии пересечения, которая является эллипсом. O_1' – его центр, J'' и J' – строятся по каркасным линиям конуса. Для построения точек, лежащих на горизонтальном очерке конуса, вводится дополнительная плоскость $T \supset i$, $T \parallel H$. $T \cap Q = DE = h$, а конус – по очерковым образующим l_1 и l_2. $D'E' \cap l_1' = 6'$, $D'E' \cap l_2' = 5'$. В этих точках меняется видимость линии пересечения. После этого определяется видимость очерков поверхностей и линии пересечения J. Плоскость считаем непрозрачной.

Условия задач

1. Построить три проекции цилиндра, усеченного плоскостями $T \parallel F$, $Q \perp F$ и $R \parallel P$. Найти недостающие проекции точек A и B, лежащих на полученных поверхностях. (15)
2. Построить проекции линий пересечения поверхностей с плоскостью $Q(f_{0Q}, h_{0Q})$. (16…19)
3. Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью, заданной прямой h и точкой K. (20)
4. Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью $Q \perp F$. Определить недостающие проекции точек A и B, принадлежащих заданной поверхности. (21)
5. Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью, заданной четырехугольником $ABCD$. (22,23)
6. Поверхность сферы рассечь плоскостью Q, проходящей через ее центр O и прямую a. Обвести видимую часть сферы. (24)
7. Построить проекции линии пересечения поверхности плоскостью, заданной треугольником ABC. (25,26)
8. Построить три проекции тела, полученного в результате сечения цилиндра плоскостями $T \parallel P$ и $Q \perp F$. Найти недостающие проекции точки A, лежащей на поверхности. (27)
9. Построить проекции тела, полученного в результате сечения сферы плоскостью T, параллельной плоскости $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$ и пересекающей сферу по окружности радиусом 20 мм. (28)
10. Построить три проекции тела, полученного в результате сечения тора плоскостями $T \parallel P$ и $Q \parallel H$. Найти недостающие проекции точки A, лежащей на поверхности. (29)
11. Построить три проекции тела, полученного в результате сечения конуса плоскостями $T \parallel F$ и $Q \perp F$. Найти недостающие проекции точки A, лежащей на поверхности. (30)

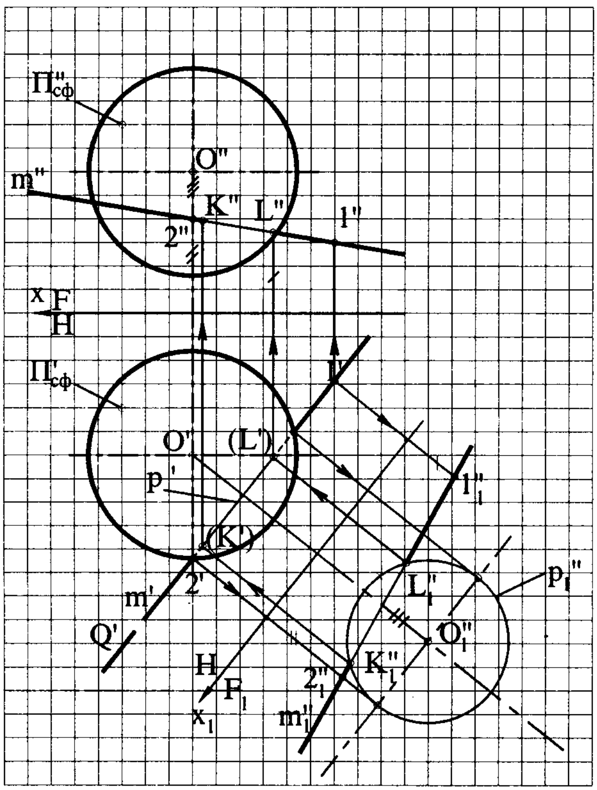
2.3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПРЯМОЙ

Пример решения задачи

(№) Найти проекции точек встречи прямой m с поверхностью сферы $П_{СФ}$.

Дано: $П_{СФ}$ ($П_{СФ}'$,$П_{СФ}''$), $m(m',m'')$

Построить: $П_{СФ} \cap m$=?



Решение:

Для нахождения точек встречи прямой с поверхностью необходимо реализовать общий алгоритм: заключить прямую в плоскость, пересекающую заданную поверхность по простой линии (окружности или прямой), и построить линию пересечения поверхности этой плоскостью. Общие точки линии пересечения и заданной прямой будут искомыми точками встречи.

1. Заключаем прямую m в плоскость Q , $Q \supset m$, $Q \perp H$, $Q \cap П_{СФ}=p$ (окружность).

2. Фронтальной проекцией p будет эллипс. Чтобы спроецировать p в окружность, введем плоскость $F_1 \| Q$, $F_1 \perp H$. Получим p_1''.

3. Спроецируем m на F_1. Для этого выделяем две точки 1 и 2, принадлежащие m, и строим их проекции на F_1. Получим m_1''.

4. Находим точки пересечения p_1'' и m_1''. $p_1'' \cap m_1''=K_1''$, L_1''.

5. Возвращаемся в исходные проекции. Получаем (K',K''), (L',L'').

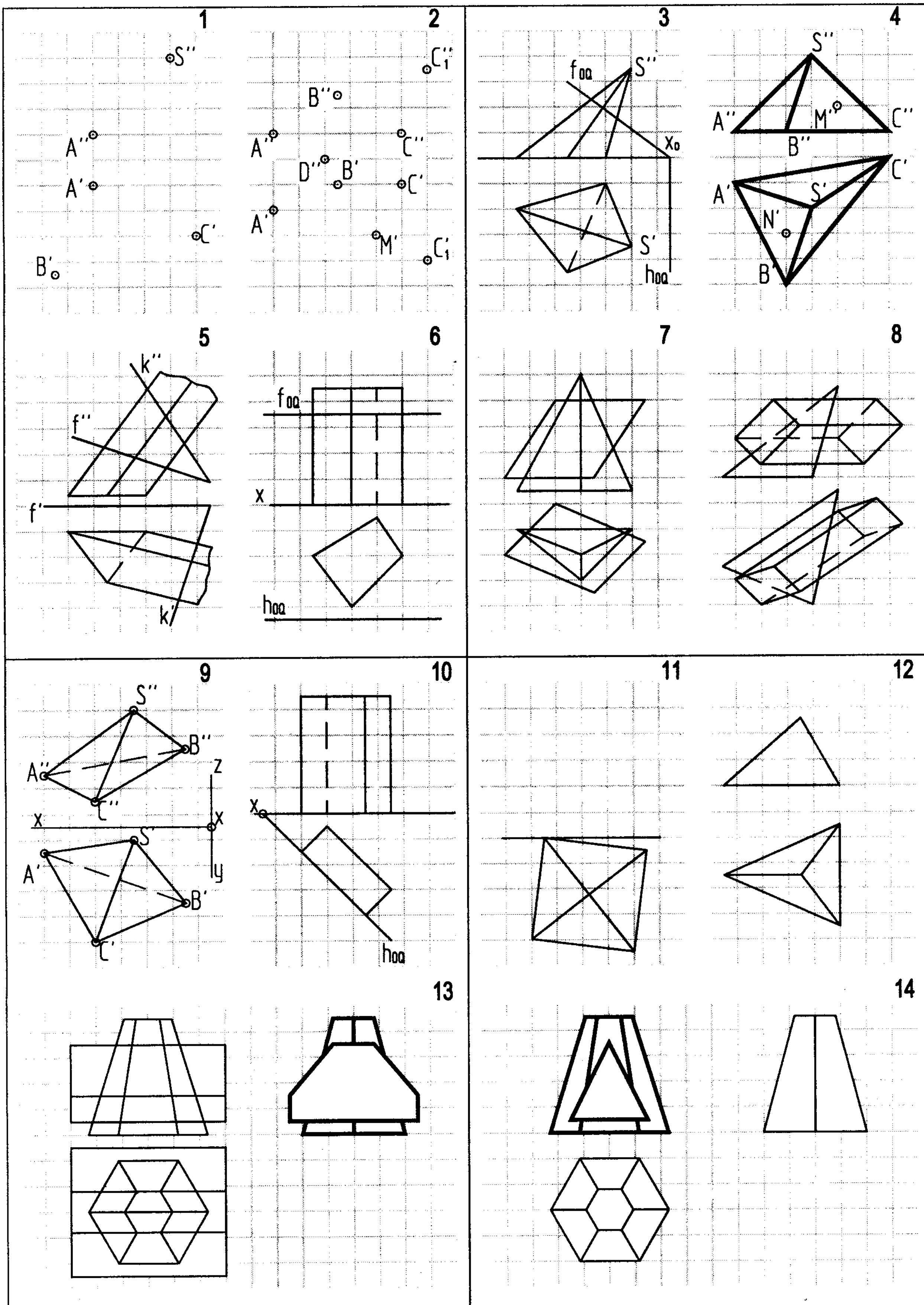
6. Определяем видимость точек встречи K и L и прямой m.

На F: K'', L''– видимы, m'' – видима. На H: K', L'– не видимы, m' – не видима в пределах очерка сферы. Между точками встречи K и L (внутри сферы) m изображается условной тонкой линией.

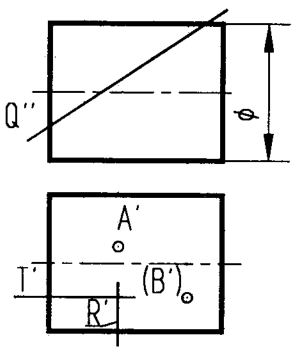
Условия задач

1. Найти проекции точек встречи прямой с поверхностью вращения. Определить видимость точек встречи и прямой. (31…46)

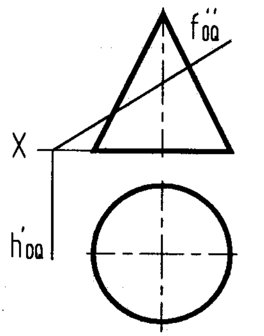
Графические условия к разделу 2



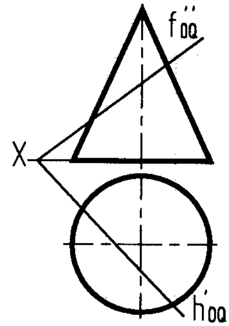
15



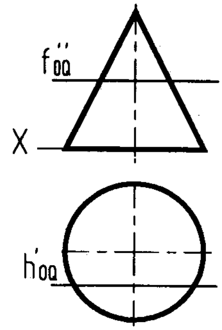
16



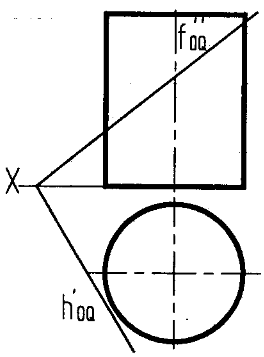
17



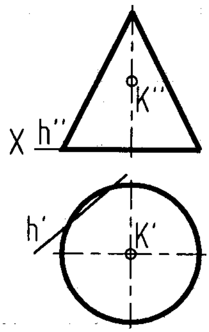
18



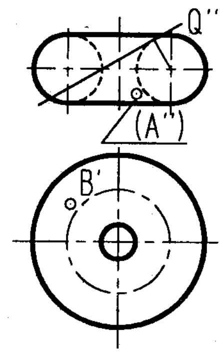
19



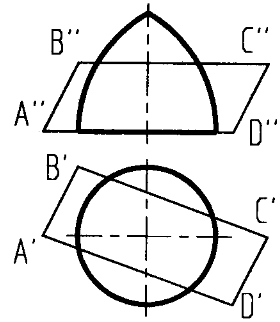
20



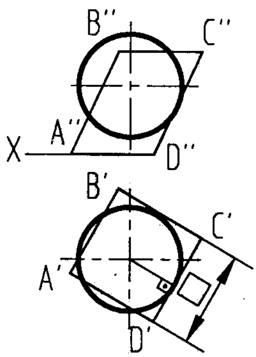
21



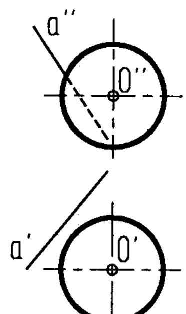
22



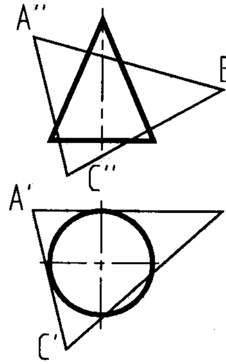
23



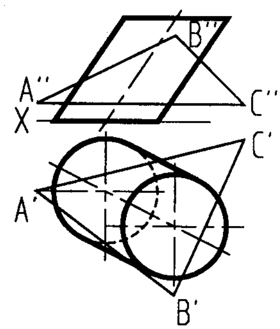
24



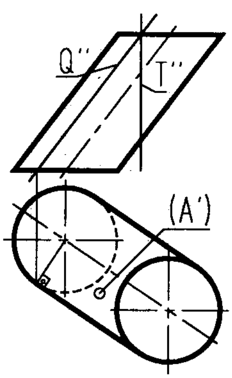
25



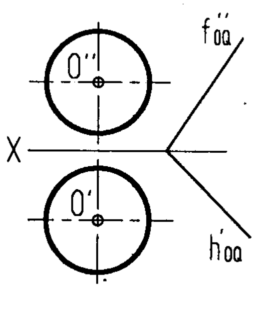
26



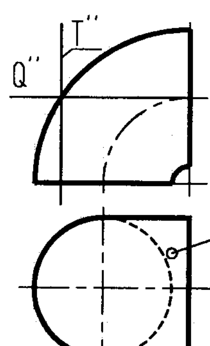
27



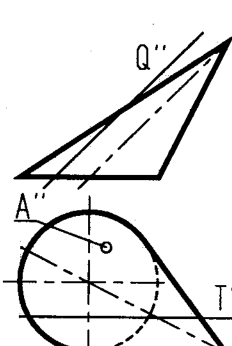
28

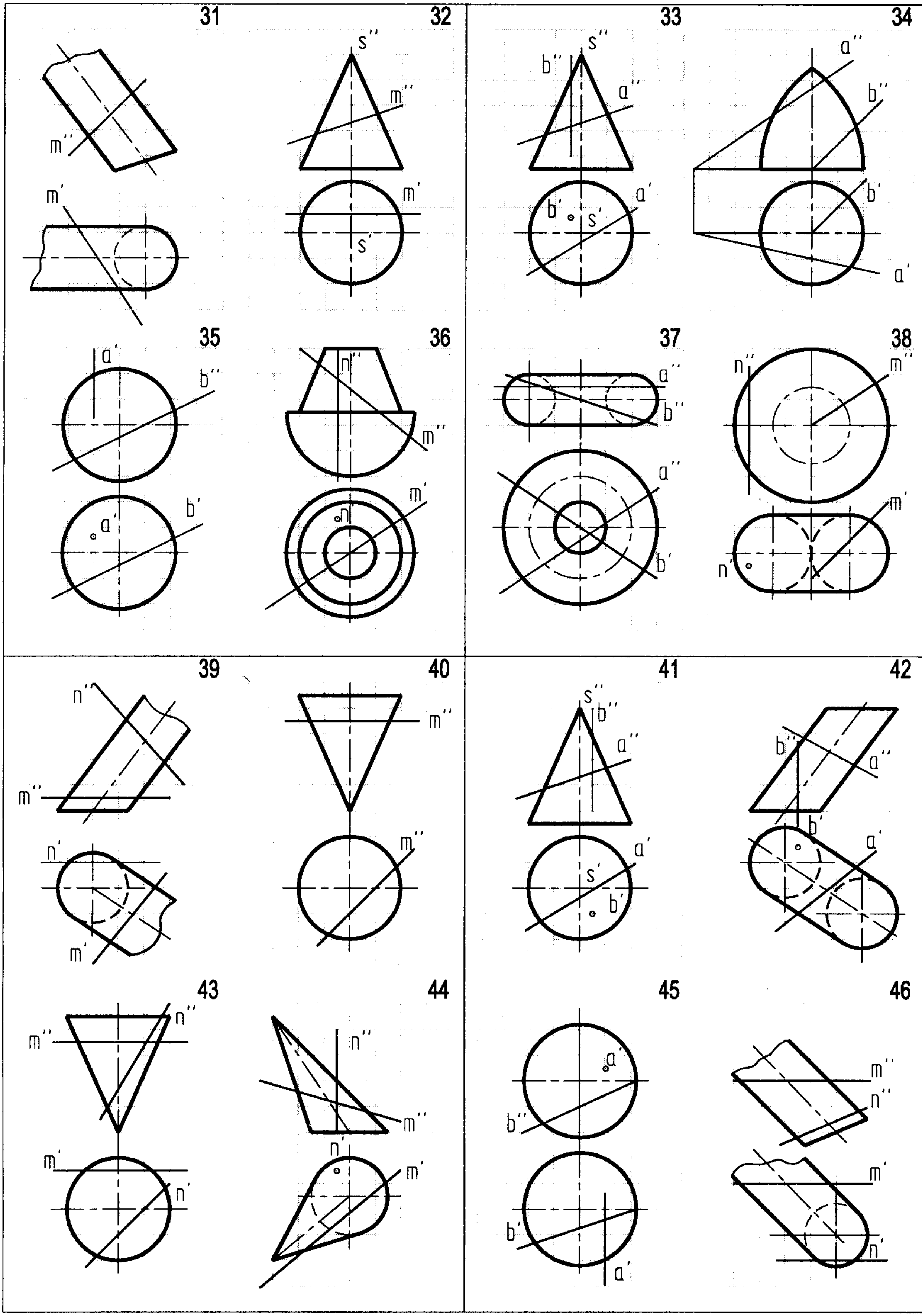


29



30

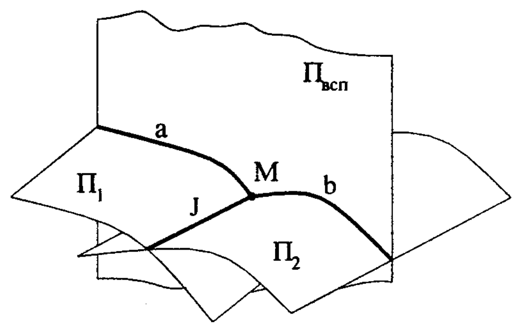



31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Линия пересечения J – это общая линия двух пересекающихся поверхностей $\Pi_1 \cap \Pi_2$ ($J \in \Pi_1, \Pi_2$). Ее следует рассматривать как совокупность точек, а точка есть результат пересечения трех поверхностей. Следовательно, для построения точек, принадлежащих линии пересечения, необходима третья вспомогательная поверхность, пересекающая заданные по графически простым линиям (прямым или окружностям). Эти линии будут пересекаться в точках общих для всех трех поверхностей, т.е. принадлежащих линии пересечения. Таким образом, задача о пересечении двух поверхностей сводится к более простой задаче о пересечении двух линий, лежащих во вспомогательной поверхности.

Общий алгоритм решения задачи:



1. Вводим вспомогательную поверхность $\Pi_{ВСП}$, пересекающую заданные поверхности Π_1 и Π_2 по простым линиям a и b;
2. Строим линии $a = \Pi_1 \cap \Pi_{ВСП}$, $b = \Pi_2 \cap \Pi_{ВСП}$;
3. Находим точку (или точки) пересечения полученных линий $a \cap b = M$, принадлежащую линии пересечения J ($M \in J$).

Повторив эти операции n раз, получим n проекций точек, соединив которые, получим проекцию искомой линии пересечения. В качестве вспомогательных могут использоваться плоскости и сферические поверхности. Выбор вспомогательной поверхности зависит от вида пересекающихся поверхностей, от их взаимного положения и положения относительно плоскостей проекций. Взаимное положение поверхностей вращения определяется взаимным положением их осей, которые могут быть: параллельными $i_1 \| i_2$, совпадающими $i_1 \equiv i_2$, пересекающимися $i_1 \cap i_2$, скрещивающимися $i_1 \dot{-} i_2$. Если одна из пересекающихся поверхностей занимает проецирующее положение, то вспомогательные поверхности не используются, так как сразу известна одна проекция линии пересечения – она совпадает с проекцией этой поверхности.

Приступая к решению задачи, следует охарактеризовать заданные поверхности. Определить их вид, положение в системе плоскостей проекций, взаимное расположение, семейства простых линий на этих поверхностях. Затем выбрать вспомогательные поверхности и зоны их ввода на изображении. Определить характерные точки линии пересечения (очевидные, очерковые, экстремальные). Построить несколько промежуточных точек и соединить найденные точки с учетом видимости линии пересечения и очерков поверхностей.

Классификация способов построения линии пересечения

Пересечение двух поверхностей

- Общие случаи
  - Способ вспомогательных поверхностей
    - Оси поверхностей параллельны — Вспомогательные секущие плоскости перпендикулярны осям $Q \perp i_1, i_2$
    - Оси поверхностей пересекаются — Способ концентрических сфер. Центр сфер $O = i_1 \cap i_2$
    - Оси поверхностей вращения скрещиваются — Способ эксцентрических сфер
- Частные случаи
  - Одна поверхность - проецирующая — Одна проекция линия пересечения задана. Вторая строится по принадлежности не проецирующей поверхности (по каркасным линиям)
  - Обе поверхности проецирующие — Заданы две проекции линии пересечения. Третья строится по координатам.
  - Теорема Монжа — Линия пересечения распадается на две плоские кривые, одна проекция которых строится сразу, вторая – по принадлежности одной из поверхностей.

3.1. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С ПОВЕРХНОСТЬЮ МНОГОГРАННИКА

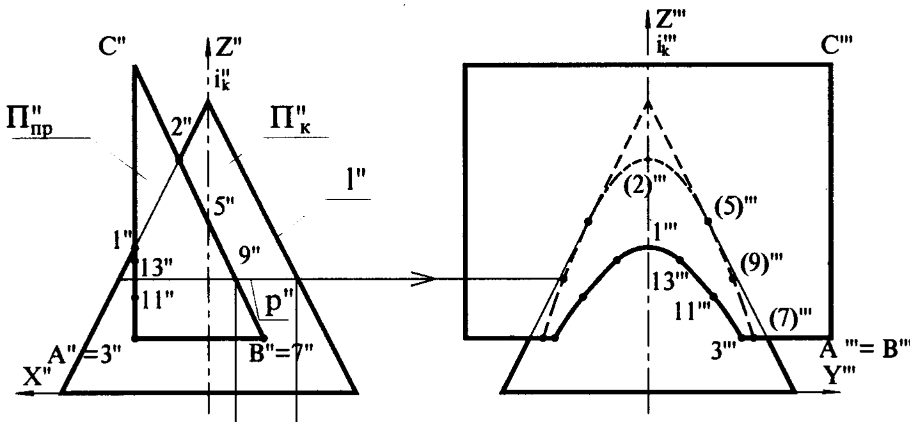
Пример решения задачи

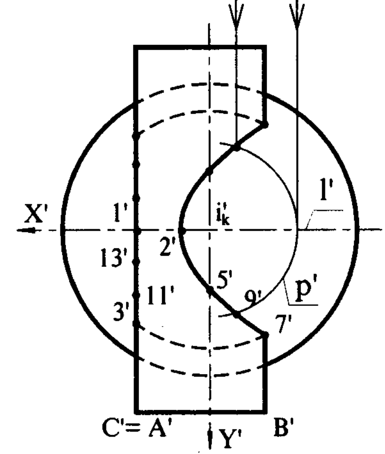
№ Построить проекции линий пересечения прямого кругового конуса и призмы.

Дано: $\Pi_к \cap \Pi_{пр}$, $\Pi_{пр} \perp F$, $i_k \perp H$.

Построить: $\Pi_к \cap \Pi_{пр} = ?$.

Решение: Так как $\Pi_{пр} \perp F$, имеем фронтальную проекцию линии пересечения, которая состоит из трех участков: $(2''B'') \| l$ (парабола), $(A''B'') \perp i_k$ (окружность), $(A''1'') \| i_k$ (гипербола).





Горизонтальные проекции этих трех линий строятся по "принадлежности" поверхности конуса (при помощи каркасных линий конуса). Профильная проекция строится по координатам.

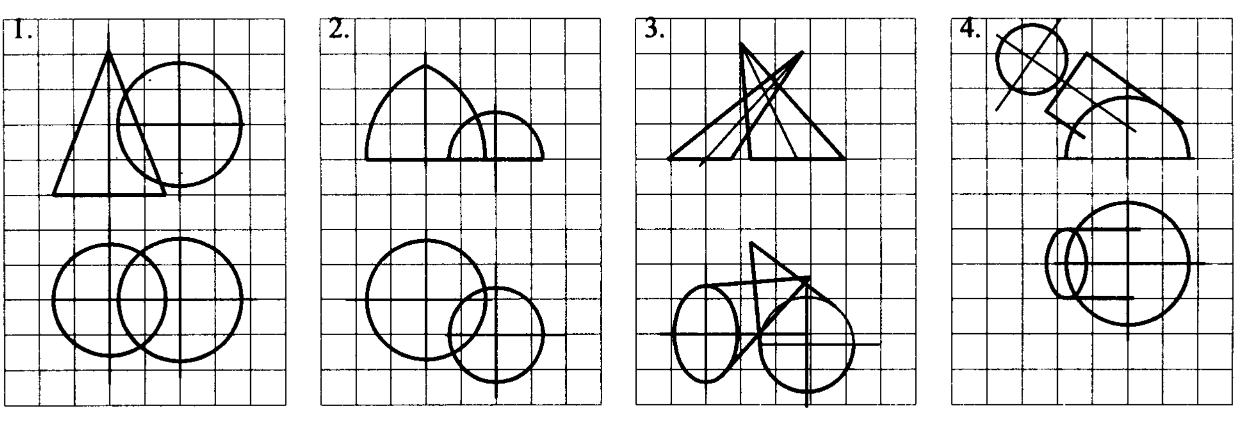
Условия задач

1. Построить недостающие проекции линии пересечения поверхностей и третий вид. (1…4)

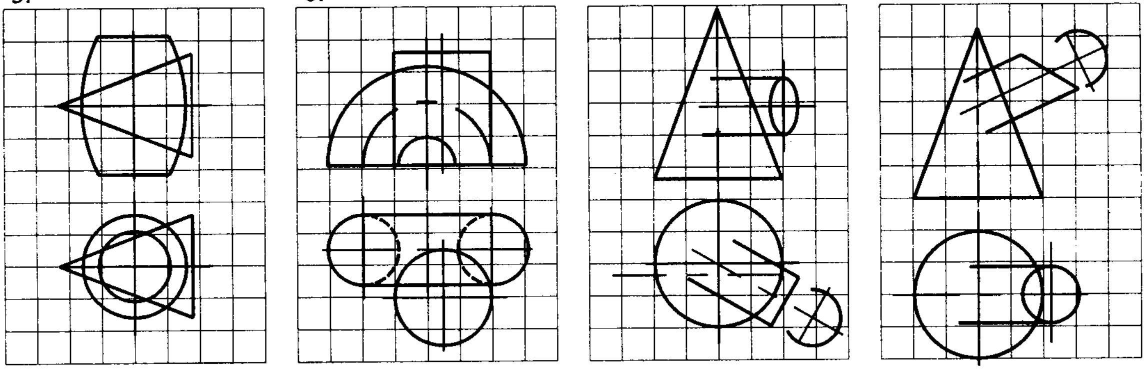
3.2. ОБЩИЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Тестовые задачи

Укажите в каких примерах можно использовать вспомогательные плоскости , а в каких – вспомогательные сферы для построения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей.



5. 6. 7. 8.

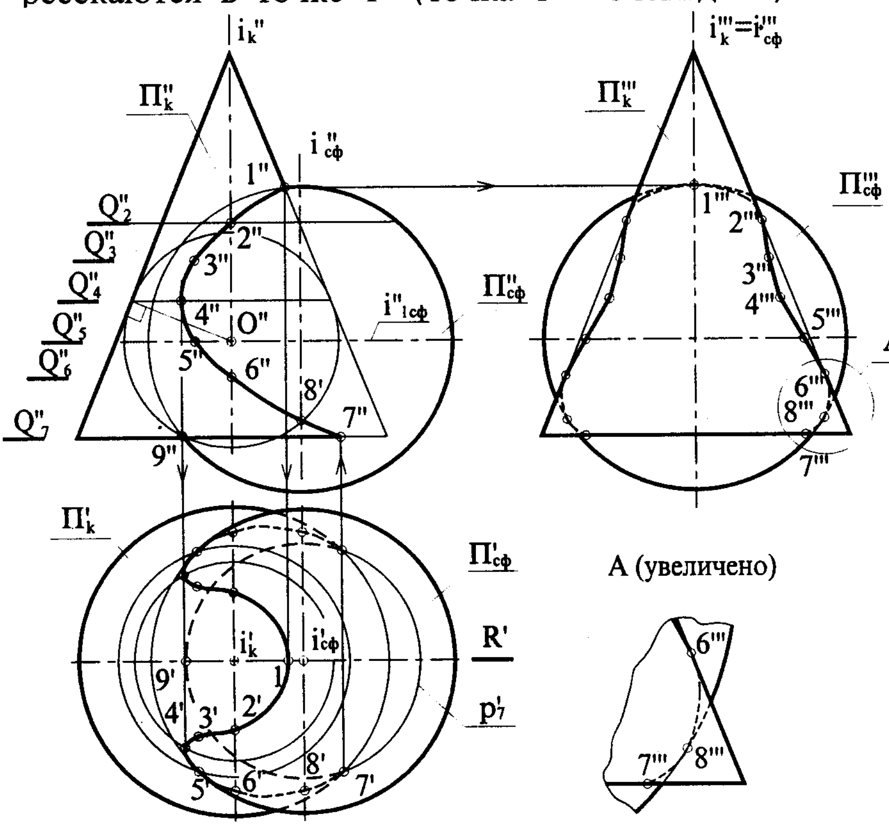


Пример решения задачи

(№)Построить проекции линии пересечения поверхности прямого кругового конуса с поверхностью сферы.

Дано: $\Pi_к \cap \Pi_{сф}$, $i_к \| i_{сф}$. *Построить*: $\Pi_к \cap \Pi_{сф} = J$.

Решение: Так как $i_к \| i_{сф}$, линия пересечения строится при помощи вспомогательных плоскостей, перпендикулярных осям и пересекающих заданные поверхности по параллелям p. В начале находим характерные точки. Так как $i_к$ и $i_{сф}$ лежат в плоскости $R\|F$, то фронтальные очерки поверхности пересекаются в точке $1''$ (точка 1 – очевидная). Так как пересекаются две поверхности второго порядка линия их пересечения J кривая четвертого порядка. Плоскость $R\|F$ является плоскостью общей симметрии поверхностей. При проецировании на F порядок J понизится вдвое, т.е. J'' будет кривой второго порядка (параболой), потому что в предельном случае, когда $i_к$ и $i_{сф}$ совпадут, линия пересечения распадется на две параллельные прямые.



Парабола имеет экстремум. Для нахождения экстремальной точки 4 из центра $O = i_к \cap i_{1сф}$ вписываем в конус сферу и через точку касания проводим вспомогательную плоскость Q_4. Для определения точек на горизонтальном очерке сферы и делящих J на видимую и невидимую проводим плоскость Q_5. Плоскость Q_7 определяет положение точек на горизонтальном очерке конуса и линию пересечения плоскости основания конуса со сферой. Для болеее точного построения J вводятся плоскости Q_2, Q_3, Q_6. Проекция J''' строится по координатам.

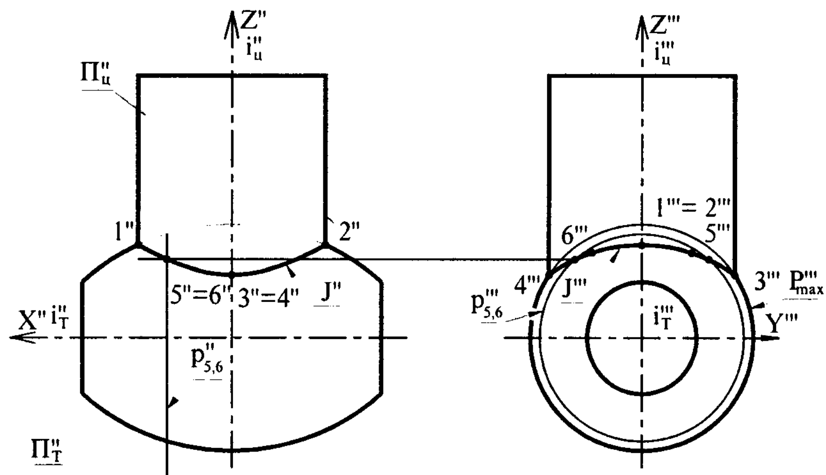
Условия задач

1. Построить проекции линий пересечения заданных поверхностей вращения, третий вид и выполнить выносные элементы. (9…17)

3.3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Пример решения:

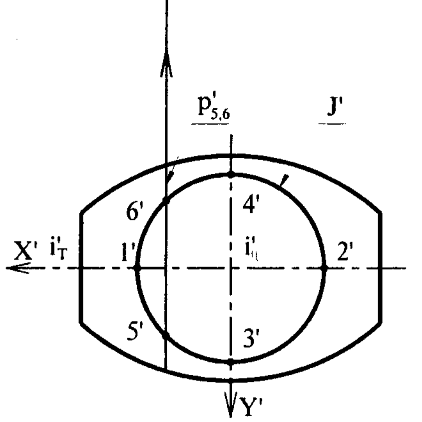
№ Построить проекции линий пересечения прямого кругового цилиндра и тора.



Дано: $П_ц \cap П_т$, $П_ц \perp H$, $i_ц \perp H$, $i_т \perp P$
Построить: $П_ц \cap П_т = J$

Решение: Так как $П_ц \perp H$, имеем горизонтальную проекцию линии пересечения J. Профильная проекция строится по "принадлежности" поверхности тора (при помощи параллелей тора). Фронтальная проекция строится по координатам.

Характерные точки 1, 2, 3, 4 являются очевидными.

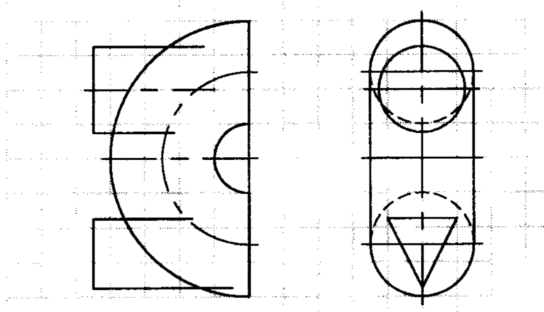


Условия задач

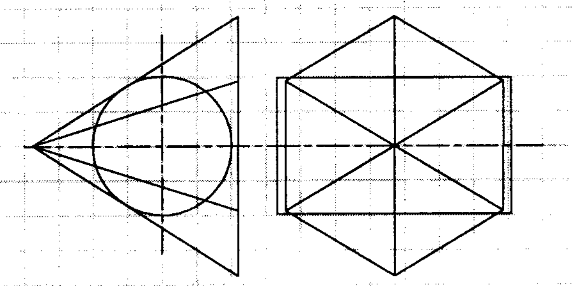
1. Построить недостающие проекции линии пересечения поверхностей, третий вид и выполнить выносные элементы. (1), (5…8)

Графические условия к разделу 3

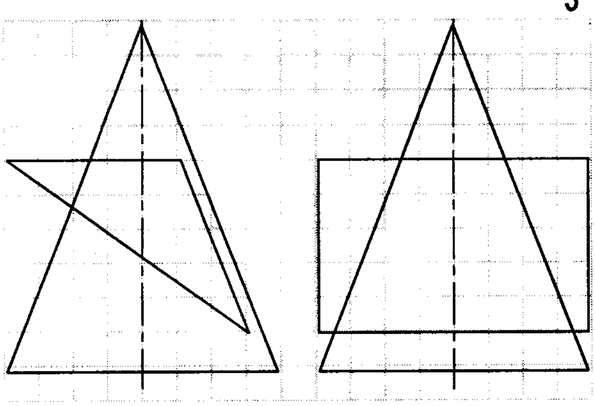
1



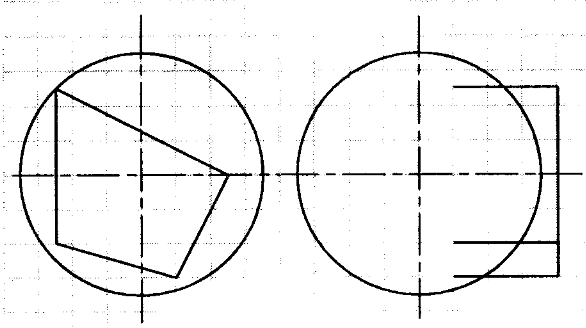
2



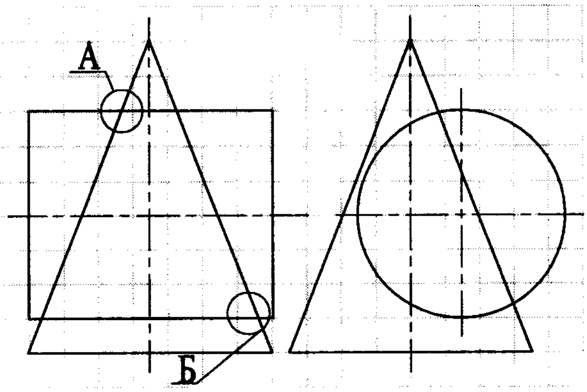
3



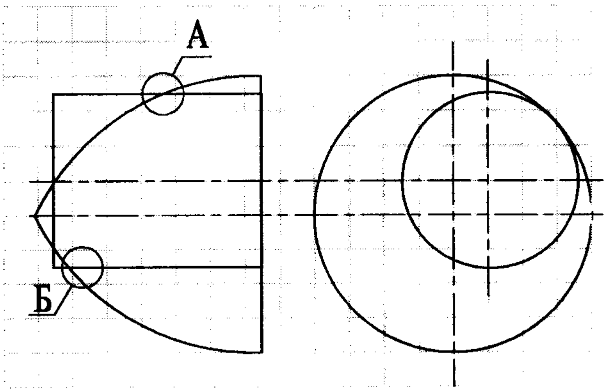
4



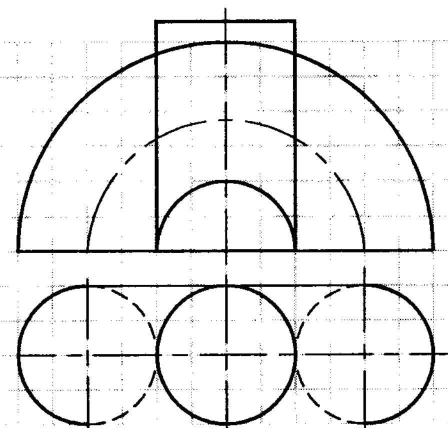
5



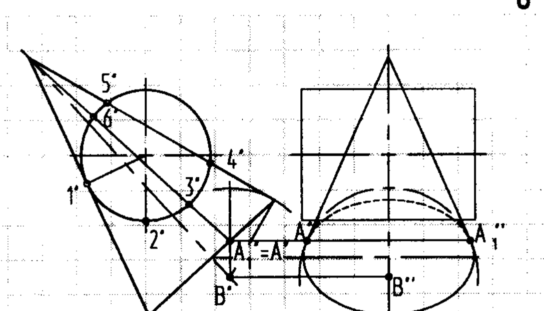
6



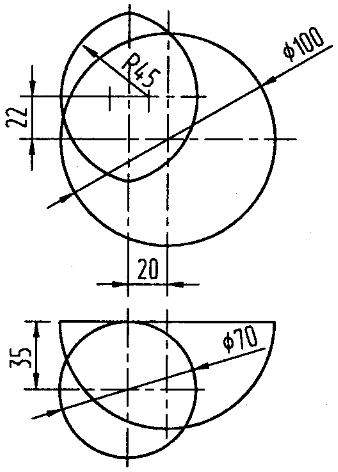
7



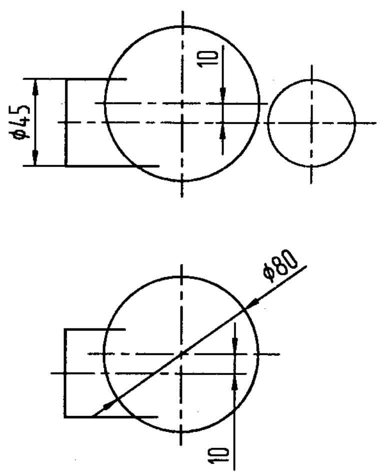
8



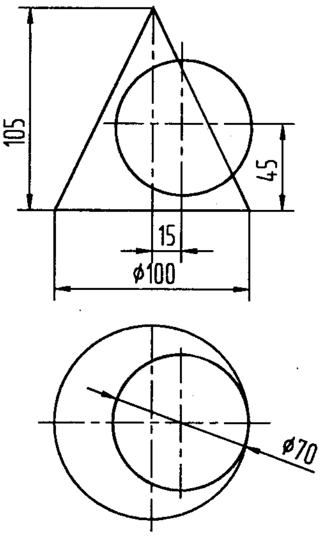
9



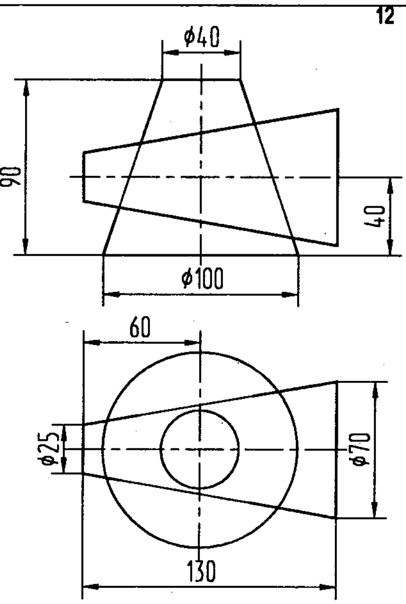
10



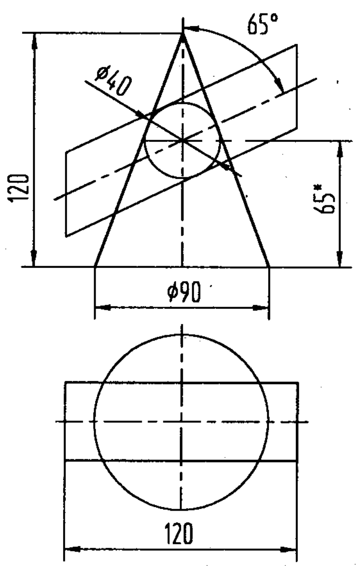
11



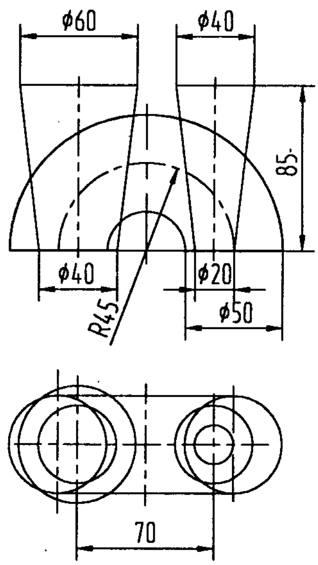
12



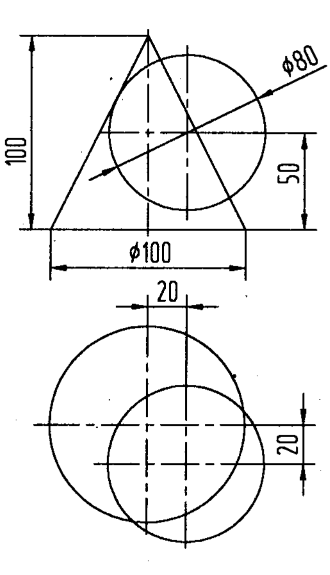
13



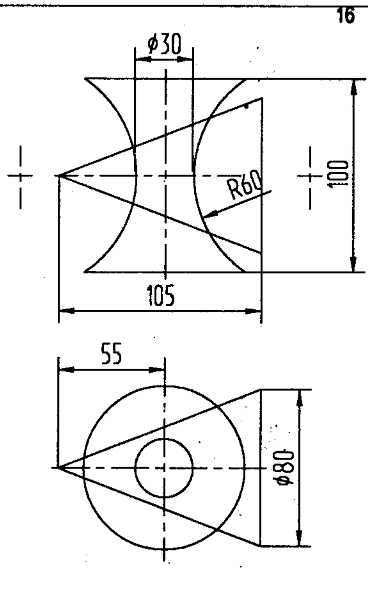
14



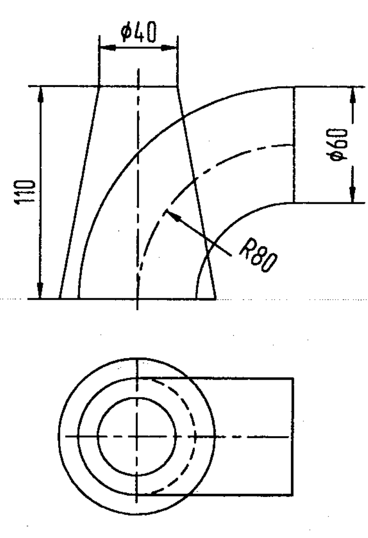
15



16



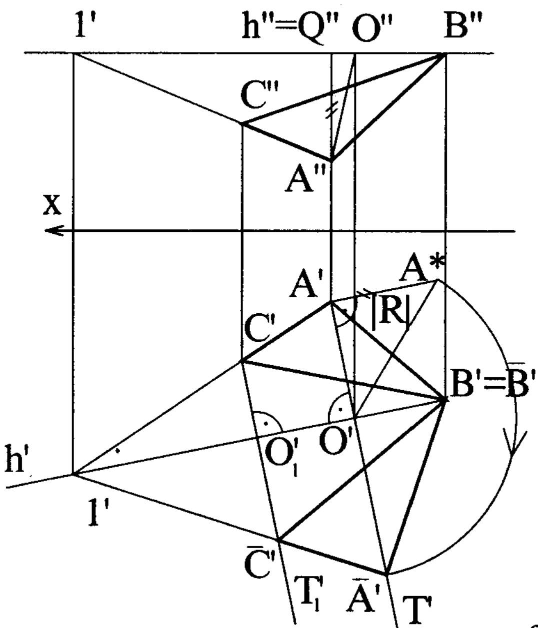
17



4. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

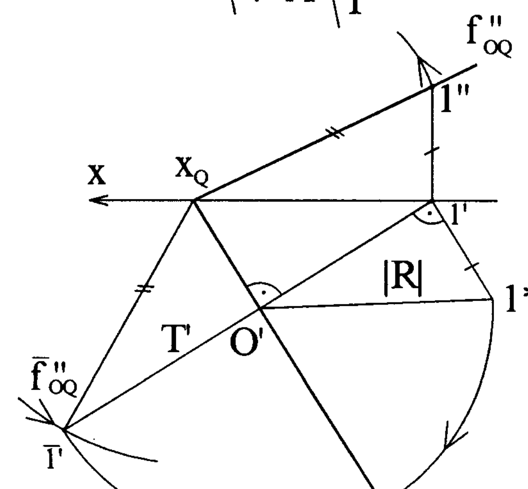
Метрическими считаются задачи, связанные с определением расстояний, углов, построением отрезков и плоских фигур заданных размеров. Одним из способов определения истинных величин плоских фигур является *способ совмещения* плоскости общего положения с плоскостью уровня. Совмещение осуществляется вращением плоскости вокруг принадлежащей ей линии уровня.

Для совмещения плоскости ΔABC с горизонтальной плоскостью уровня Q выбрана ось вращения h, причем $h''\equiv Q''$, $h\supset B$. Повернуть достаточно вершину А.



Для этого необходимо:

1. Построить проекцию плоскости T, в которой будет вращаться вершина A $(T'\perp h', T\perp H, T\supset A)$;
2. Найти центр вращения $O'=T'\cap h'$, $[O'A']$ – проекция радиуса вращения;
3. Найти истинную величину радиуса вращения (способом прямоугольного треугольника $A'A^*=Z_O''-Z_A''$) $[O'A^*]=|R|$;
4. Найти повернутое положение вершин A: $\overline{A}'$ и C: $\overline{C}'$. (Вершина C будет вращаться в плоскости $T_1\|T$)
5. $\Delta\overline{A}'\overline{B}'\overline{C}'=|\Delta ABC|$.

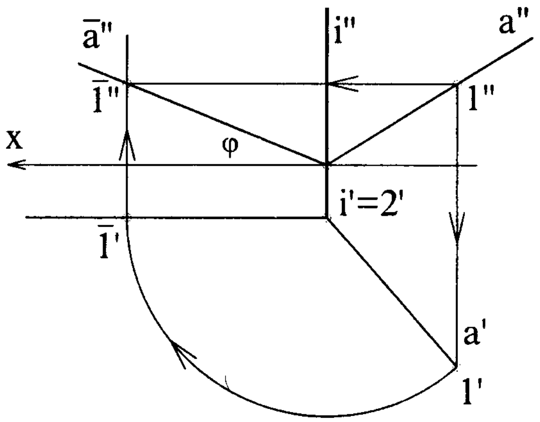


Плоскости, заданные следами, совмещаются с одной из плоскостей проекций вращением вокруг соответствующего следа. Для совмещения плоскости $Q(f_{0Q}, h_{0Q})$ с горизонтальной плоскостью проекций выбираем точку $1\in f_{0Q}$. Строим плоскость вращения T, центр вращения O, истинную величину радиуса вращения $|R|$ и находим совмещенную точку $\overline{1}'$. Но так как $|x_Q1''|=|x_Q\overline{1}'|$, то точку $\overline{1}'$ можно найти сразу без определения истинной величины радиуса вращения как точку пересечения окружности $r=|x_Q1''|$ с проекцией плоскости T'.

Используя *способ совмещения*, можно решить обратную задачу, т.е. по совмещенной проекции (истинной величине) строить проекции плоских фигур.

Метрические задачи можно решать рассмотренными ранее *способами замены плоскостей проекций* и *вращения вокруг проецирующей прямой*.

Углы между пересекающимися прямыми также можно определять способом совмещения с плоскостью уровня. Угол между скрещивающимися прямыми измеряется углом между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся, и определяется аналогично. Угол между прямой линией и плоскостью измеряется углом между прямой и ее проекцией на эту плоскость: ∠φ. После построения проекции прямой *a* на данную плоскость ∠φ (или дополнительный) можно определять способом вращения вокруг линии уровня.

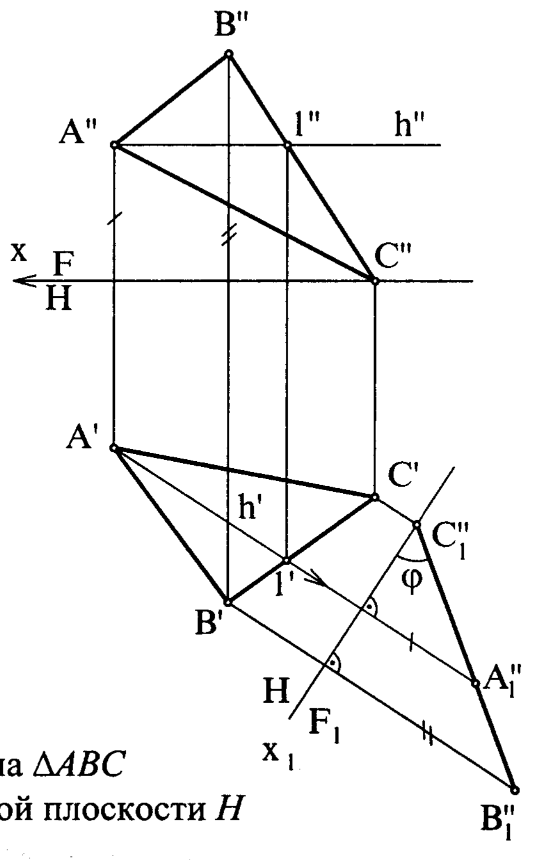


При определении угла наклона прямой общего положения к плоскостям проекций, необходимо перевести прямую в положение уровня вращением вокруг проецирующей прямой. Угол наклона при вращении и спроецируется в истинную величину.

Угол между двумя плоскостями называется двугранным. Если задано ребро двугранного угла, то его можно перевести в проецирующее положение (проекция – точка). Стороны при этом спроецируются в линии, а угол между ними будет истинной величиной двугранного угла.

Для определения угла наклона плоскости к плоскостям проекций, необходимо перевести плоскость в проецирующее положение.

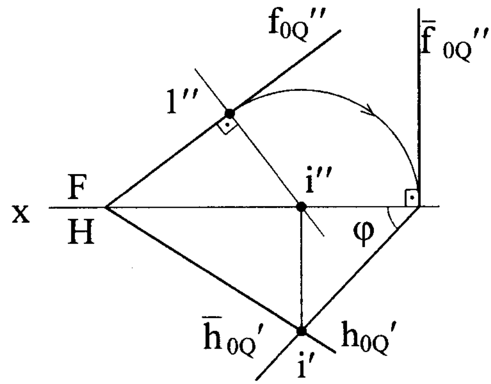
Ниже приведены примеры преобразования плоскостей общего положения. Одна из них задана следами, другая – треугольником, причем плоскость $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$ преобразована в проеци-



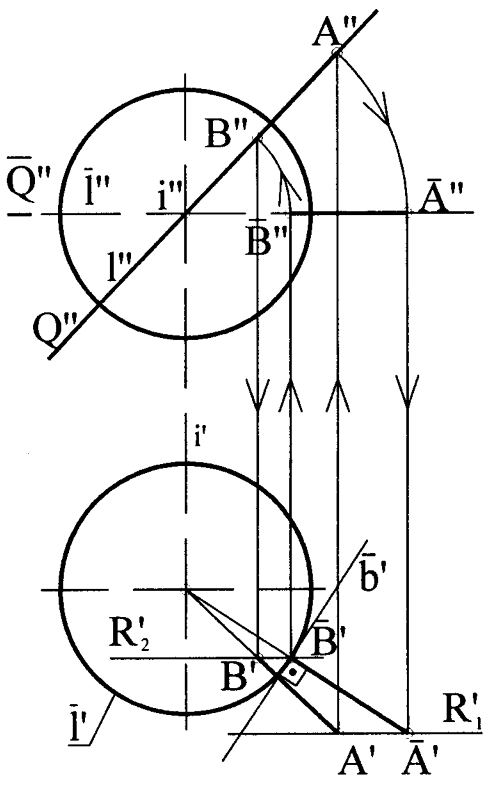
φ – угол наклона ΔABC
к горизонтальной плоскости *H*

рующее положение *способом вращения* вокруг проецирующей прямой, а ΔABC – *способом замены плоскостей* проекций.

φ – угол наклона плоскости $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$ к фронтальной плоскости F.



Расстояние от точки до поверхности вращения определяется длиной перпендикуляра (нормали), опущенного из точки на ближайшую к ней образующую поверхности. Эта образующая лежит в плоскости, проходящей через заданную точку и ось вращения поверхности.



$Q \supset A, i, Q \cap \Pi_{сф} = l$; $\left|\bar{A}'\bar{B}'\right| \perp \bar{b}' = |n|$, где $\bar{b}'$ – касательная к $\bar{l}'$ в точке $\bar{B}'$.

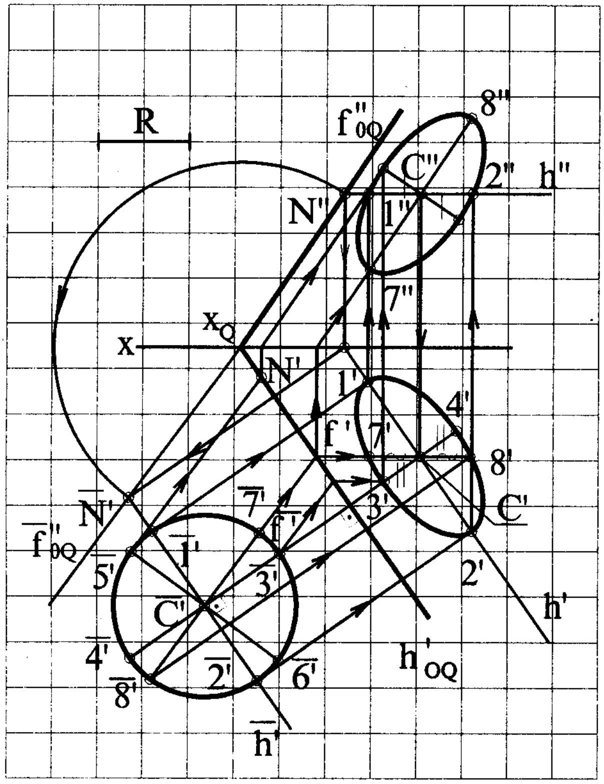
Порядок решения задачи:

1. Находим ближайшую к точке образующую поверхности. Для этого через точку проводим осевую плоскость Q (чаще всего – проецирующую). $Q''=l''$ Образующая l – окружность. На горизонтальную плоскость она спроецируется в эллипс.
2. Определяем истинную величину ближайшей образующей и нормали к ней (чаще всего – способом вращения вокруг проецирующей прямой). $i \perp F$, $\bar{Q}' \parallel H$, следовательно $\left|A'B'\right| = |n|$
3. Определяем проекции нормали и ее видимость. Так как концы отрезка при вращении перемещаются в плоскостях уровня, проекцию точки B' находим, проведя плоскость $R_2' \parallel R_1'$ ($R_1' \parallel F$).

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТИННЫХ ВЕЛИЧИН ПЛОСКИХ ФИГУР СПОСОБОМ СОВМЕЩЕНИЯ (ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ ЛИНИЙ УРОВНЯ, ВРАЩЕНИЕ ВОКРУГ СЛЕДА)

Пример решения задачи

№ Построить проекции окружности, расположенной в плоскости $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$.



Дано: фронтальная проекция центра окруж-ности C''. Радиус окружности R=20 мм.

Решение: Q – плоскость общего положения, лежащая в ней окружность, спроецируется в эллипсы.

1. Проводим $h \in Q$, $h \supset C$, $h'' \cap f_{OQ}'' = N''$, $h'' \to h'$, $C'' \to C'$.
2. Повернем Q вокруг h_{OQ}' до совмещения с H. Окружность R=20 мм спроецируется на $\overline{Q}$ в истинную величину.
3. Найдем $\overline{C}'$ и построим окружность радиуса R.
4. Диаметр $[\overline{1}'\,\overline{2}'] \in \overline{h}'$ спроецируется на H в большую ось эллипса, а диаметр $[\overline{3}'\,\overline{4}']$ (линия наибольшего наклона) $\perp$ $[\overline{1}'\,\overline{2}']$– в малую ось эллипса $[\overline{1}'\,\overline{2}'] \to [1'2']$, т.е. диаметры окружности, совпадающие с линиями уровня (f и h), спроецируются в большие оси эллипсов и будут равны $2R$, а диаметры им перпендикулярные (совпадающие с линиями наибольшего наклона) спроецируются в малые оси. Проведя $\overline{f} \supset \overline{3}'$ и построив f', находим $3'$, а $4'$ находится из симметрии эллипса.
5. Диаметр $[\overline{7}'\overline{8}'] \in \overline{f}'$ спроецируется на F в большую ось эллипса, а диаметр $[\overline{5}'\overline{6}'] \perp [\overline{7}'\overline{8}']$ – в малую ось. Горизонтальные и фронтальные проекции их строятся при помощи совмещенных проекций фронталей.

Условия задач

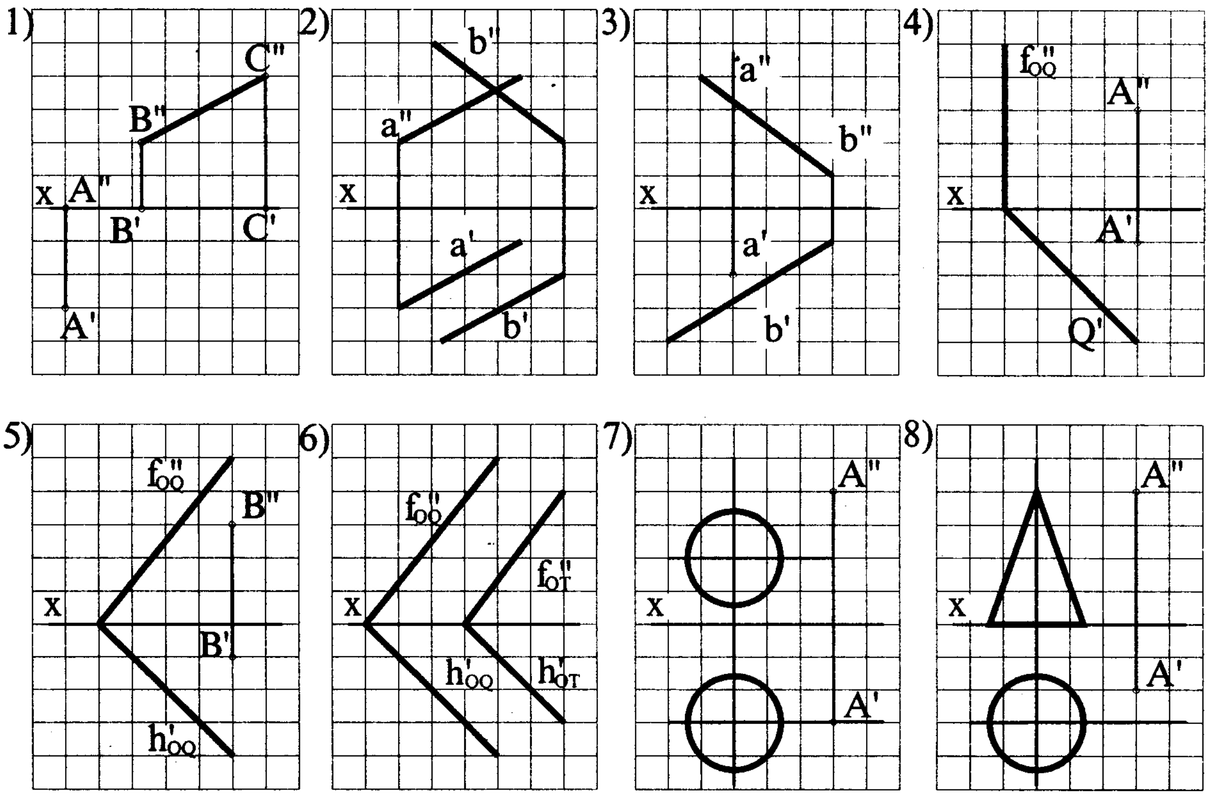
1. Точку A вращением вокруг прямой h совместить с плоскостью уровня Q. (1)
2. Треугольник ABC вращением вокруг фронтали f ($f \in \Delta ABC$) совместить с фронтальной плоскостью уровня. (2)

3. Построить проекции треугольника *ABC* по заданному катету *AB* и направлению гипотенузы *m*. (3)
4. Построить проекции равностороннего треугольника *ABC*, сторона *BC* которого лежит на прямой *m*. (4)
5. Определить истинную величину пятиугольника *ABCDE*, лежащего в плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. (5)
6. Построить проекции квадрата *ABCD*, принадлежащего плоскости $Q(f_{0Q},h_{0Q})$, по заданному совмещенному положению его стороны *AB*. (6)
7. Построить проекции траектории вращения точки *A* вокруг прямой *m*. (7)
8. Построить проекции полушария, положенного срезом на плоскость $Q(f_{0Q},h_{0Q})$. Окружность среза вписана в треугольник следов. (8)

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

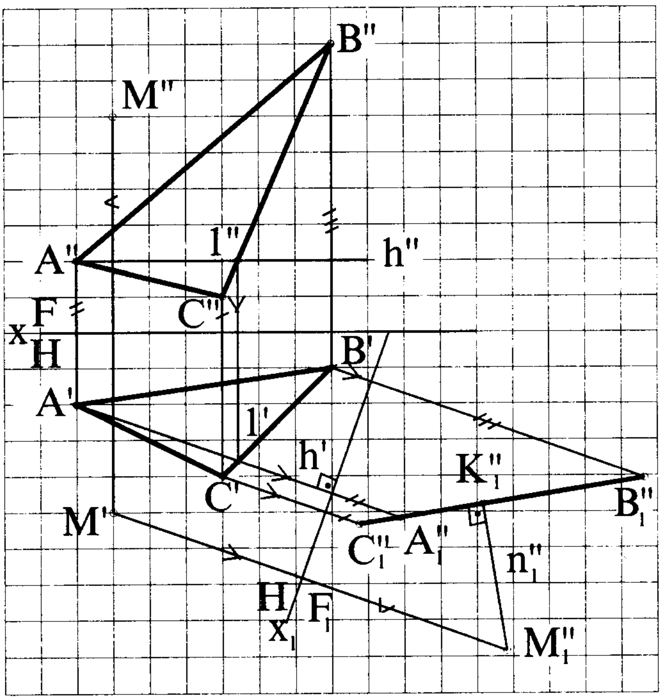
Тестовые задачи

Укажите на каких чертежах, приведенных ниже, можно определить кратчайшее расстояние между геометрическими образами, не производя никаких преобразований.



Пример решения:

№ Определить расстояние от точки *M* до плоскости треугольника *ABC*.



Дано: $M(M',M'')$,
$\Delta ABC\ (A'B'C',A''B''C'')$
Построить: $|n|=|MK|\perp\Delta ABC$
Решение:

1. Строим горизонталь $h\in\Delta ABC$, $h\supset A$
2. Вводим плоскость $F_1\perp H$, $F_1\perp h\Rightarrow F_1\perp\Delta ABC$, т.е. на плоскость F_1 ΔABC спроецируется в линию $\{A_1''B_1''C_1''\}$
3. Проецируем точку M на F_1: $M'\to M_1''$
4. Проводим $M_1''K_1''\perp\{A_1''B_1''C_1''\}$, $[M_1''K_1'']=|n|$

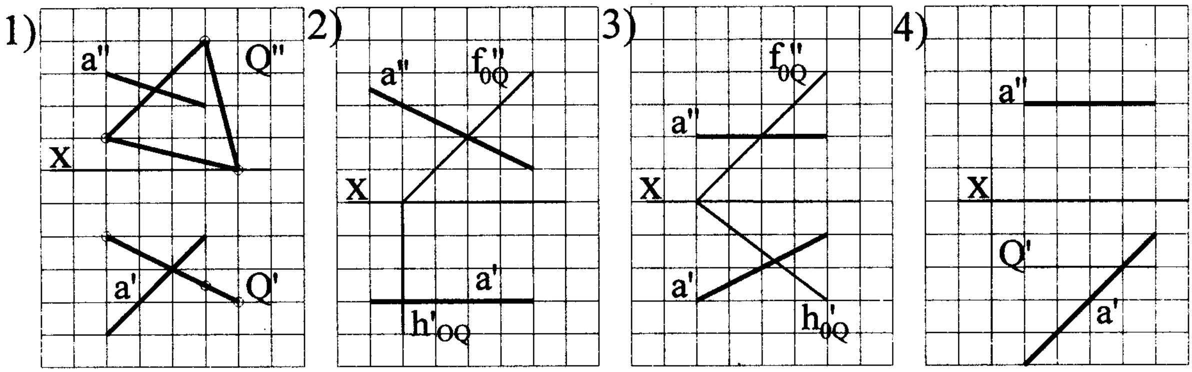
Условия задач

1. Определить расстояние от точки M до ближайшей боковой грани пирамиды. (9)
2. Определить расстояние от точки A до поверхности конуса. (10)
3. Определить расстояние от точки B до поверхности шара. (11)
4. Определить расстояние от точки M до поверхности тора. (12)
5. Построить проекции плоскости T, параллельной плоскости $Q(a\cap b)$ и одинаково удаленной от нее и от точки M. (13)
6. На прямой b найти точки, отстоящие от прямой a на 20 мм. (14)
7. Провести проекции прямой, параллельной двум заданным параллельным прямым ($a||b$) и удаленной от a на 20 мм и от b на 15 мм. (15)
8. Построить горизонтальный след плоскости Q, если задан ее фронтальный след f_{OQ} и точка A, удаленная от плоскости Q на 25 мм. (16)
9. Найти фронтальную проекцию точки $B(B'')$, отстоящей от точки A на 35 мм. (17)
10. Определить расстояние от точки A до прямой a. (18)
11. Определить расстояние от точки A до плоскости $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$. (19)
12. Определить расстояние между параллельными прямыми a и b. (20)
13. Найти фронтальную проекцию точки N (N''), отстоящей от горизонтали h на 20 мм. (21)
14. Определить расстояние от точки M до плоскости $Q(\Delta ABC)$. (22)
15. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми a и b. (23)
16. Определить расстояние между параллельными плоскостями $Q(f_{OQ}, h_{OQ})$ и $T(f_{OT}, h_{OT})$. (24)

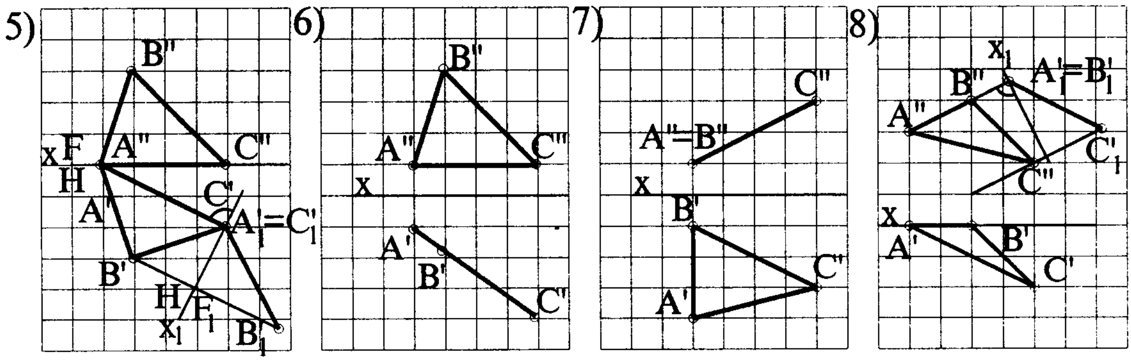
4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТИННЫХ ВЕЛИЧИН УГЛОВ

Тестовые задачи

Укажите, на каком чертеже (1…4) угол между прямой a и плоскостью Q можно измерить без дополнительных построений



На каком чертеже (5…8) определен угол наклона плоскости ΔABC к горизонтальной плоскости проекции H.



Пример решения:

(№) Определить угол между плоскостями DAB и ABC.

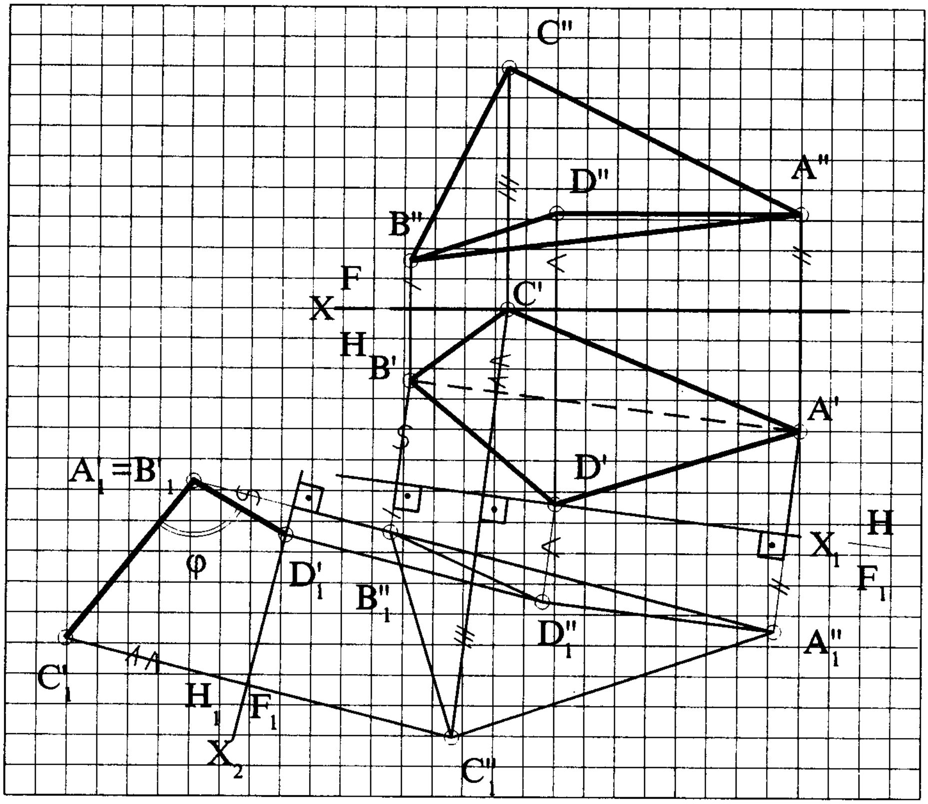
Дано: $\{ABD\} \cap \{ABC\} = [AB]$

Построить: $\{ABD\}^\wedge\{ABC\} = \varphi = ?$

Решение:

$\{ABD\}$ и $\{ABC\}$ образуют двугранный угол φ. Если выбрать дополнительную плоскость проекций, перпендикулярную ребру $[AB]$, то на нее этот угол спроецируется в натуральную величину. Задача решается в два этапа:

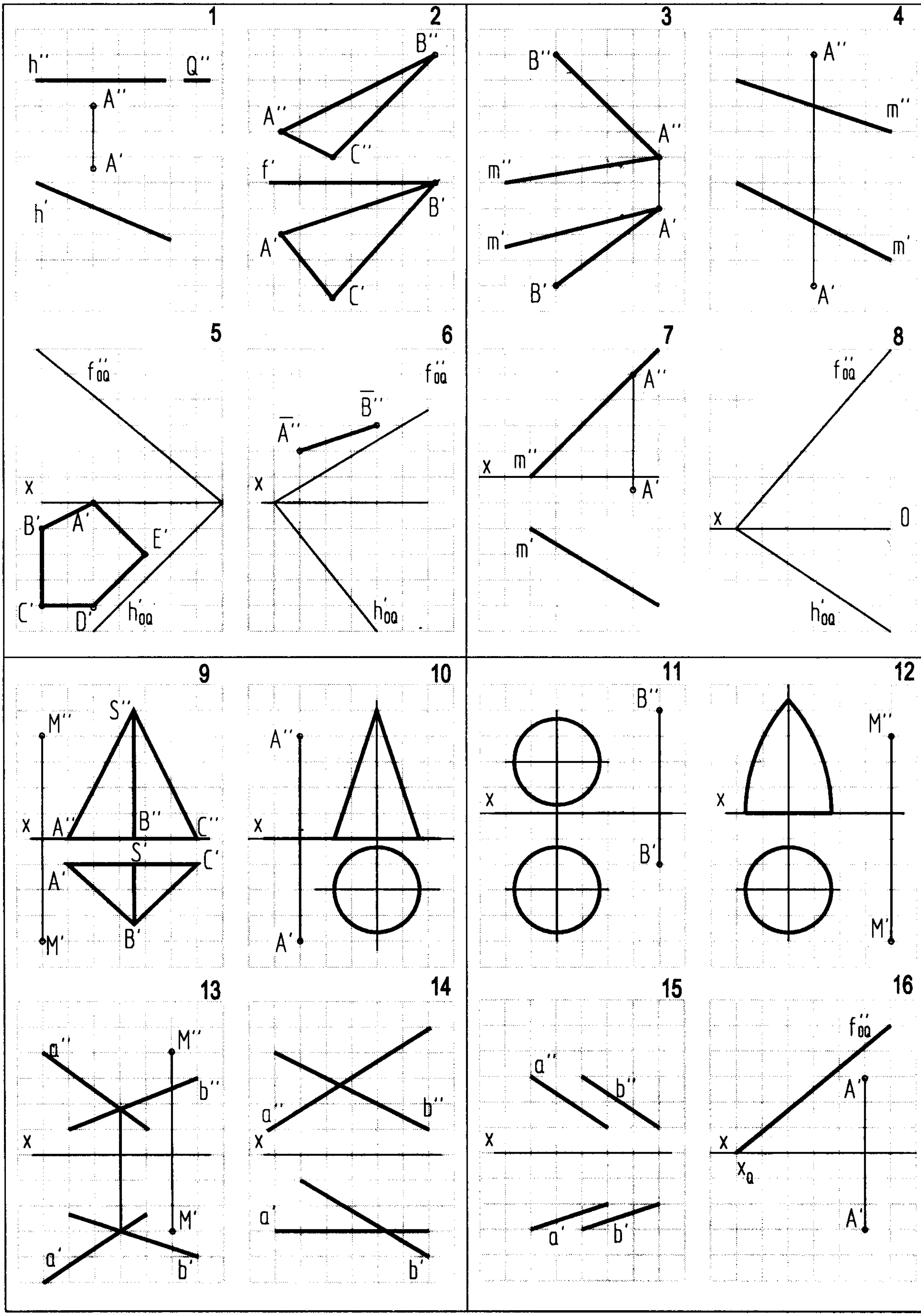
1. Переводим $[AB]$ в положение уровня (вводим плоскость F_1):
   $F_1 \| [A'B']$, $F_1 \perp H$, $[A'B'] \to [A_1''B_1''] = |AB|$
2. Переводим $[AB]$ в проецирующее положение (вводим плоскость H_1):
   $H_1 \perp [A_1''B_1'']$, $[A_1''B_1''] \to [A'=B']$
3. Проецируем на F_1 и H_1 стороны угла: $\{D'A'B'\} \to \{D_1''A_1''B_1''\} \to [D_1'B_1']$;
   $\{A'B'C'\} \to \{A_1''B_1''C_1''\} \to [C_1'A_1']$
4. Искомый двугранный угол найден $\varphi = [C_1'A_1']^\wedge[D_1'B_1'] = |\{ABD\}^\wedge\{ABC\}|$



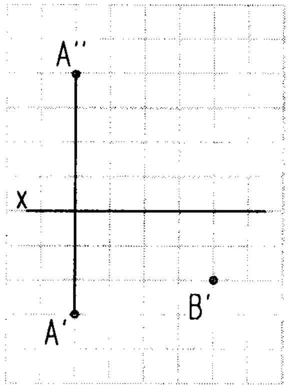
Условия задач

1. Определить угол между пересекающимися прямыми a и b. (25)…(27)
2. Определить угол между пересекающимися отрезками AB и AC. (28),(29)
3. Определить угол между отрезком AB и осью x. (30)
4. Построить горизонтальную проекцию прямого угла ABC, если известны его фронтальная проекция и горизонтальная проекция стороны AB. (31)
5. Определить угол между плоскостью треугольника ABC и горизонтальной плоскостью проекций. (32)
6. Определить углы наклона прямой a к плоскостям проекций F и H. (33)
7. Определить углы между скрещивающимися прямыми a и b. (34)…(36)
8. Определить угол между прямой a и плоскостью Q. (37),(38)
9. Определить угол между прямой a и плоскостью $Q(f_{OQ},h_{OQ})$. (39)
10. Определить угол между отрезком EG и плоскостью $Q(AB \cap BC)$. (40)
11. Определить угол между плоскостями $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ и $R(f_{OR},h_{OR})$. (41),(42)
12. Определить угол между плоскостями Q и R. (43),(44)
13. Определить угол между плоскостями $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ и ΔABC. (45)
14. Определить угол между плоскостями $Q(f_{OQ},h_{OQ})$ и $R(a \| b)$. (46)
15. Определить угол между плоскостью ΔABC и прямой m. (47)
16. Построить фронтальный след плоскости Q, если она образует с плоскостью H угол 60°. (48)

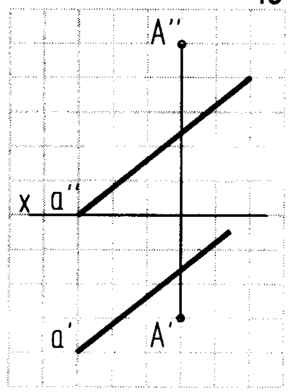
Графические условия к разделу 4



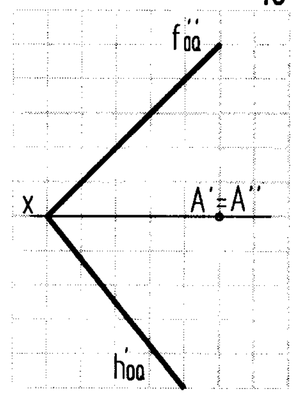
17



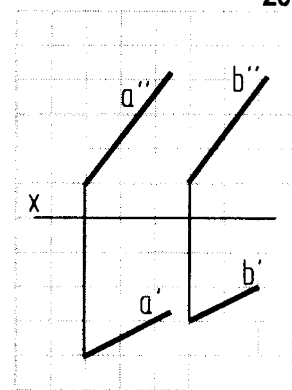
18



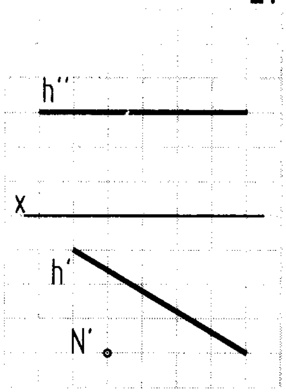
19



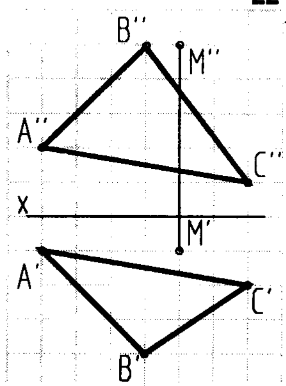
20



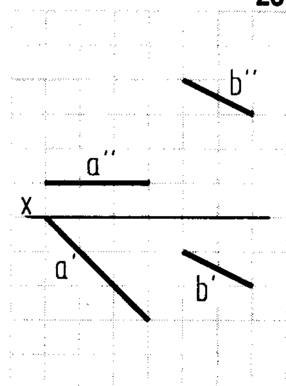
21



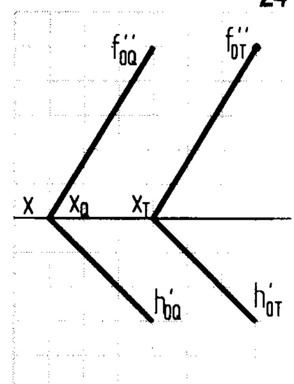
22



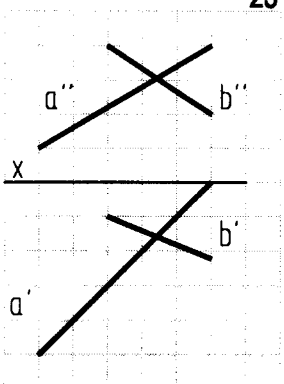
23



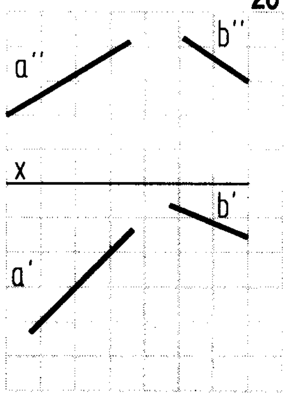
24



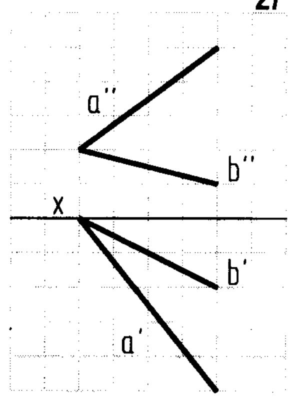
25



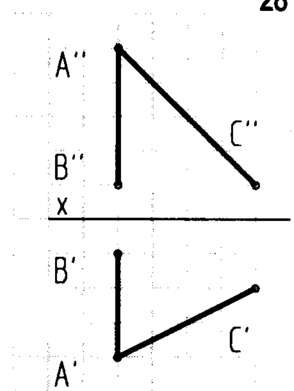
26



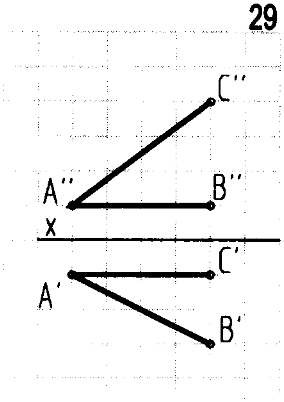
27



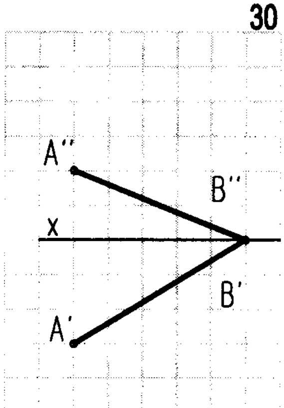
28



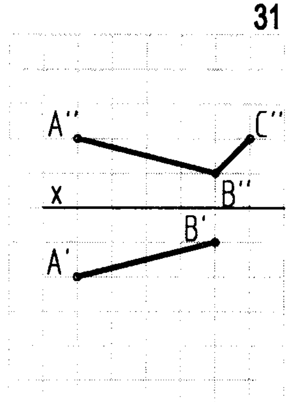
29



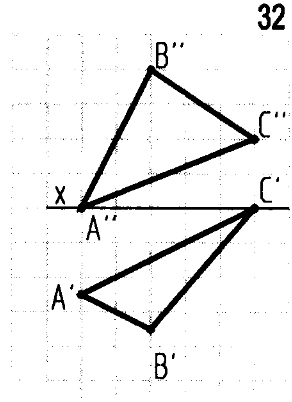
30

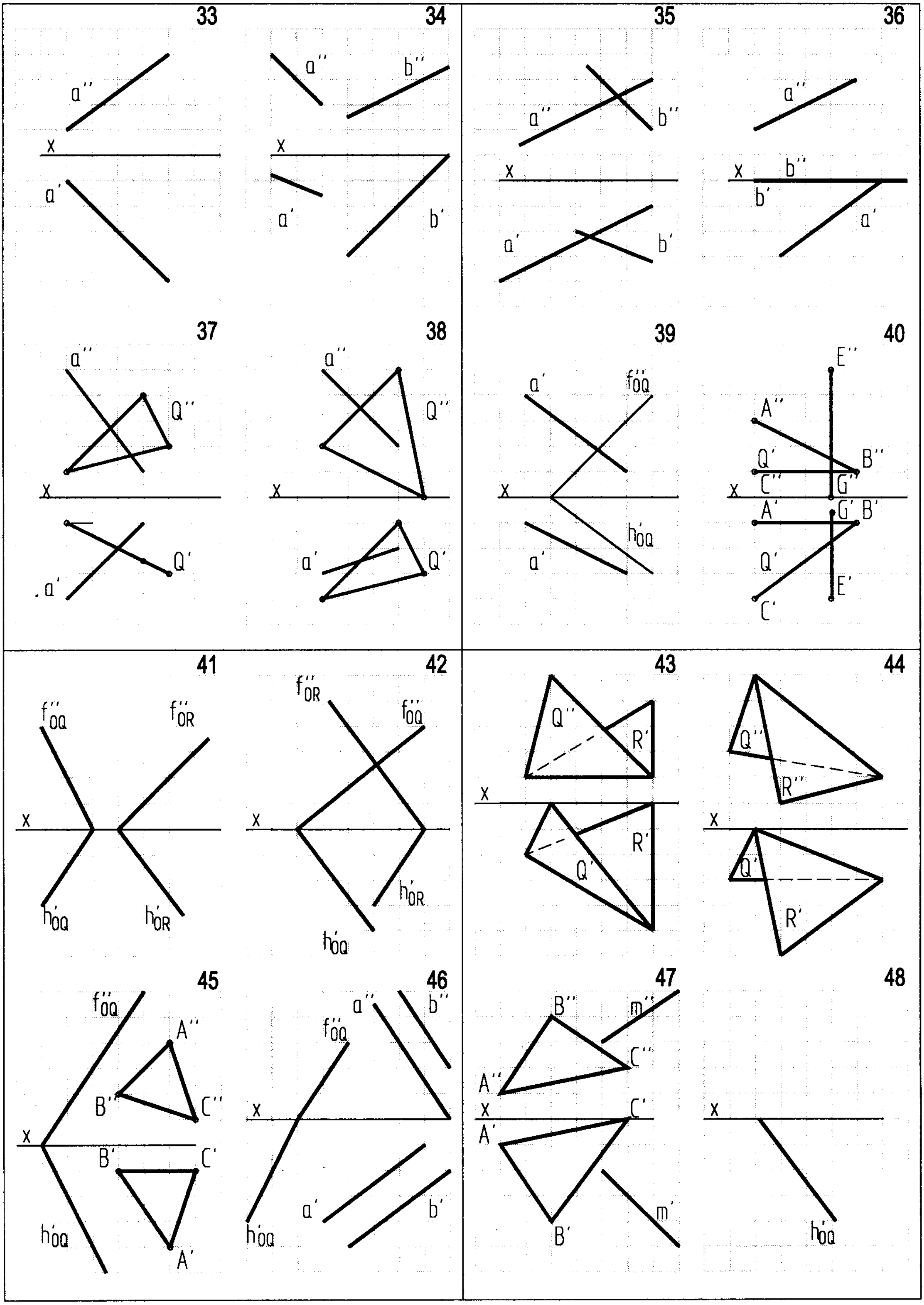


31



32




33
a''
x
a'
34
a''
b''
x
a'
b'
35
a''
b''
x
a'
b'
36
a''
x
b''
b'
a'
37
a''
Q''
x
Q'
a'
38
a''
Q''
x
a'
Q'
39
a'
f''0Q
x
h'0Q
a'
40
E''
A''
Q'
B''
C''
G''
x
A'
G'
B'
Q'
E'
C'
41
f''0Q
f''0R
x
h'0Q
h'0R
42
f''0R
f''0Q
x
h'0R
h'0Q
43
Q''
R'
x
R'
Q'
44
Q''
R''
x
Q'
R'
45
f''0Q
A''
B''
C''
x
B'
C'
h'0Q
A'
46
a''
b''
f''0Q
x
a'
b'
h'0Q
47
B''
m''
C''
A''
x
C'
A'
m'
B'
48
x
h'0Q

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Авторы:

Бурдунина Нина Анверовна, *Гордеева* Ирина Васильевна, *Горнов* Александр Олегович, *Давыдкина* Татьяна Вениаминовна, *Иванова* Анна Михайловна, *Исаева* Ольга Игоревна, *Касаткина* Елена Петровна, *Кауркин* Виктор Николаевич, *Мачуева* Лариса Анатольевна, *Миронова* Надежда Георгиевна, *Нетунаева* Валентина Николаевна, *Патрунова* Маргарита Сергеевна, *Полтавцева* Татьяна Алексеевна, *Степанов* Юрий Владимирович, *Фролова* Галина Михайловна, *Янина* Елена Владимировна

РЕШЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Сборник графических заданий и упражнений

Учебное пособие по курсу

"Начертательная геометрия"

для студентов 1-го курса всех специальностей МЭИ

Редактор *И.В. Гордеева*

Редактор издательства *Н.Л. Черныш*

ЛР № 020528 от 05.06.97

Темплан издательства МЭИ 2000, учебн. Подписано в печать 30.06.01

Формат 60x84/8 Печать офсетная Печ. л. 6,5

Тираж 500 Изд. № 82 Заказ № 218 Цена 18 р.

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная, д.14

Отпечатано в типографии ЦНИИ "Электроника", 117415, Москва, просп. Вернадского, д.39