НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

_______________ Драгунов В.К.

«_22_» _декабря_ 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 − «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Краевые задачи математической физики»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.2.2

Всего: 108 часов

Семестр 3 , в том числе 6 часов – контактная работа,
84 часа – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по теории обобщенных решений краевых и начально-краевых задач математической физики.

Задачами дисциплины являются: изучение теории обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка и освоение основных положений теории начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений второго порядка.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);
– готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);
– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);
– способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);
– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);
– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5);
– способность разрабатывать новые методы исследования и решения дифференциальных уравнений, применять для этого методы теории функций и функционального анализа (ПК-6).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основы теории обобщенных решений эллиптических краевых задач (ПК-1);

– основы теории обобщенных решений параболических начально-краевых задач (ПК-2);

– основы теории обобщенных решений гиперболических начально-краевых задач (ПК-2);

уметь:

– формулировать обобщенные постановки краевых и начально-краевых задач (ОПК-1);

– применять для исследования разрешимости краевых задач метод Галеркина (УК-2);

– применять для исследования разрешимости начально-краевых задач метод Фаэдо-Галеркина (УК-3);

– применять для исследования краевых и начально-краевых задач методы функционального анализа (ОПК-2);

владеть:

– методами исследования краевых и начально-краевых задач с применением методов функционального анализа (ПК-6);

– основными результатами теории обобщенных решений дифференциальных уравнений (ПК-5).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Эллиптические уравнения. Обобщенные решения из $H^1(\Omega)$

Задача Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Классическая и обобщенная постановки. Связь между ними.

Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Теорема Реллиха. Гильбертовость $H_0^1(\Omega)$. Понятие о теоремах вложения. Первое основное неравенство для эллиптических операторов.

Теорема существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Редукция обобщенной постановки задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения к операторному уравнению Фредгольма в гильбертовом пространстве. Вспомогательная теорема существования и единственности для несамосопряженного эллиптического уравнения. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

Обобщенная постановка задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Простейшие свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям. Вариационные свойства и минимаксный принцип для собственных значений.

Понятие следа на границе для функций из $H^1(\Omega)$, оценка в L_2 нормы следа. Краевая задача для эллиптического уравнения с неоднородным условием Дирихле. Другие краевые задачи. Вариационная постановка неоднородной задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Связь между обобщенной и вариационной постановками. Вариационный метод доказательства теоремы существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$.

Эллиптические уравнения. Другие обобщенные решения и методы исследования

Обобщенное решение из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Второе основное неравенство для эллиптических операторов; преобразование и оценки слагаемых по области и по ее границе. Первая краевая задача для эллиптического уравнения в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Априорная оценка решения. Применение метода продолжения по параметру. Теорема существования и единственности решения из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Свойство локальной зависимости гладкости решения эллиптической краевой задачи от гладкости данных. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина. Обобщенные решения из $L_2(\Omega)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения, их существование и единственность.

Параболические уравнения. Обобщенные решения из энергетического класса

Начально-краевая задача для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка. Классическое решение. Обобщенное решения из $V_2(Q_T)$. Леммы Гронуолла и Гронуолла-Беллмана. Теорема существования решения из $V_2(Q_T)$ и метод Фаэдо-Галеркина: построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая оценка, предельный переход. Дробная гладкость по t обобщенного решения из $V_2(Q_T)$. Оператор Div и запись параболического уравнения с его использованием. Теорема единственности решения из $V_2(Q_T)$.

Параболические уравнения. Другие обобщенные решения и методы исследования

Обобщенные решения из $W(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность. Обобщенные решения из $H_2^{2,1}(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность. Свойство локальной зависимости гладкости решения параболической начально-краевой задачи от гладкости данных. Сопряженный параболический оператор и начально-краевая задача.

Обобщенные решения из $L_2(Q_T)$, их существование и единственность. Метод Фурье для параболического уравнения с не зависящими от t коэффициентами. Доказательство энергетической оценки методом Фурье (включая вывод обобщенного неравенства Минковского). Использование теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве: построение замыкания параболического оператора, замкнутость его образа, анализ ортогонального дополнения.

Гиперболические уравнения 2-го порядка. Обобщенные решения

Обобщенные решения из энергетического класса начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка с не зависящими от t коэффициентами и самосопряженной эллиптической частью. Теорема существования (метод Фаэдо-Галеркина): построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая, предельный переход. Теорема единственности обобщенного решения из энергетического класса. Сильные обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность. Слабые обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность. Метод Фурье для гиперболической начально-краевой задачи.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

3 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Задача Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Классическая и обобщенная постановки. Связь между ними.
2. Первое основное неравенство для эллиптических операторов.
3. Теорема существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения.

4. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

5. Обобщенная постановка задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Простейшие свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

6. Вариационные свойства и минимаксный принцип для собственных значений.

7. Вариационная постановка неоднородной задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Связь между обобщенной и вариационной постановками.

8. Вариационный метод доказательства теоремы существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$.

9. Обобщенное решение из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Второе основное неравенство для эллиптических операторов; преобразование и оценки слагаемых по области и по ее границе.

10. Первая краевая задача для эллиптического уравнения в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Априорная оценка решения.

11. Теорема существования и единственности решения из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

12. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

13. Свойство локальной зависимости гладкости решения эллиптической краевой задачи от гладкости данных.

14. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

15. Обобщенные решения из $L_2(\Omega)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения, их существование и единственность.

16. Начально-краевая задача для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка. Классическое решение. Обобщенное решения из $V_2(Q_T)$.

17. Леммы Гронуолла и Гронуолла-Беллмана.

18. Теорема существования решения из $V_2(Q_T)$ и метод Фаэдо-Галеркина: построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая оценка, предельный переход.

19. Дробная гладкость по t обобщенного решения из $V_2(Q_T)$.

20. Теорема единственности решения из $V_2(Q_T)$.

21. Обобщенные решения из $W(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность.

22. Обобщенные решения из $H_2^{2,1}(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность.

23. Свойство локальной зависимости гладкости решения параболической начально-краевой задачи от гладкости данных.

24. Сопряженный параболический оператор и начально-краевая задача.

25. Обобщенные решения из $L_2(Q_T)$, их существование и единственность.

26. Метод Фурье для параболического уравнения с не зависящими от t коэффициентами. Доказательство энергетической оценки методом Фурье (включая вывод обобщенного неравенства Минковского).

27. Использование теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве: построение замыкания параболического оператора, замкнутость его образа, анализ ортогонального дополнения.

28. Обобщенные решения из энергетического класса начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка с не зависящими от t коэффициентами и самосопряженной эллиптической частью.

29. Теорема существования (метод Фаэдо-Галеркина): построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая, предельный переход.

30. Теорема единственности обобщенного решения из энергетического класса.

31. Сильные обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность.

32. Слабые обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность.

33. Метод Фурье для гиперболической начально-краевой задачи.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.

2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 2006.

4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.

5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

6. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

7. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ, 2014.

8. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

Дополнительная литература:

9. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.

12. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Эдиториал УРСС, 2002.