

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

Драгунов В.К.

2017 г.



Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

специальной дисциплины

«Вычислительная математика»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ОД.2

Всего: 252 часа

Семестр 5, 144 часа, в том числе 6 часов – контактная работа,
138 часов – самостоятельная работа,

Семестр 6, 108 часов, в том числе 6 часов – контактная работа,
66 часов – самостоятельная работа,
36 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

Формула специальности

Вычислительная математика – область науки, к которой относятся разработка и теория методов численного решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, а также реализация методов в практическом решении задач с применением современных ЭВМ.

Области исследований

1. Создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники.
2. Разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности.
3. Особенности численных методов и связанных с ними программных комплексов, отражающие рост производительности современных ЭВМ и способствующие повышению эффективности вычислений.
4. Реализация численных методов в решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и научно-технических проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач.

Отрасль науки

физико-математические науки

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по вычислительной математике.

Задачами дисциплины являются: изучение функционального анализа, теории уравнений с частными производными, численных методов решения систем линейных и нелинейных уравнений, методов приближения функций, теории численного интегрирования, численных методов решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции:**

- способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).
- способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-5);
- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);
- способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);
- способность применять методы вычислительной математики и разрабатывать алгоритмы численной реализации математических моделей (ПК-3);
- способность к проведению вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования с применением современных компьютерных технологий и математических методов (ПК-4);
- способность читать лекции, проводить лабораторные и практические занятия с обучающимися, руководить курсовым проектированием и выполнением выпускных квалификационных работ бакалавров (ПК-7).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

- постановки и методы решения основных задач математической физики (УК-1);
- численные методы решения основных математических задач и их свойства (ПК-7);
- основные понятия и результаты функционального анализа (ОПК-1);

уметь:

- применять методы вычислительной математики для решения основных математических задач (ПК-3);
- исследовать свойства разностных схем, применяемых для решения краевых задач математической физики (ПК-4);
- разрабатывать новые вычислительные методы (ПК-2);
- применять методы функционального анализа для исследования разнообразных математических задач (ПК-2);
- ставить задачи математической физики и исследовать их свойства (ПК-1);

владеть:

- теорией и методами функционального анализа (ОПК-1);
- методами и основными теоретическими результатами уравнений с частными производными (ПК-7);
- основными численными методами решения математических задач (УК-5);
- методологией вычислительного эксперимента (ПК-4).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Метрические, нормированные, гильбертовы пространства. Метрические пространства. Непрерывные отображения. Компактные множества.

Принцип сжатых отображений, методы последовательных приближений и их приложения. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимости. Задача о наилучшем приближении. Наилучшее равномерное приближение. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.

Сходимость операторов; ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Линейные функционалы. Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Пространства функций C , L_2 , L_p , W_p^1 . Обобщенная производная. Неравенства Пуанкаре–Стеклова–Фридрихса. Понятие о теоремах вложения.

Задачи математической физики

Математические модели физических задач. Математические модели физических пространств, приводящие к уравнениям математической физики. Основные уравнения математической физики; постановки задач. Корректно и некорректно поставленные задачи.

Обобщенное решение краевых задач для эллиптических уравнений. Дивергентная форма записи эллиптического оператора. Понятие об обобщенном решении. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

Задача Коши. Задача Коши для уравнения теплопроводности и уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях).

Фундаментальные решения. Характеристики. Понятие об обобщенных решениях. Обобщенные решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов; существование, единственность и непрерывная зависимость от данных задачи. Теорема Стеклова о разложении в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Численные методы

Численные методы алгебры. Прямые и итерационные методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида. Одношаговые итерационные методы.

Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы. Методы спуска и метод сопряженных градиентов.

Приближение функций. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения. Интерполяционные многочлены. Выбор узлов интерполяции.

Быстрое дискретное преобразование Фурье. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.

Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса. Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Численные методы решения задачи Коши и краевых задач. Оценка погрешности, сходимость и устойчивость. Методы прогонки и стрельбы. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Понятие о жестких системах обыкновенных дифференциальных уравнений и методах их решения.

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления, переменных направлений. Понятие о методе Федоренко. Оценки скорости сходимости.

Методы решения обратных и некорректных задач. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных

систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: 6 семестр – экзамен кандидатского минимума.

Вопросы для самоконтроля и проведения кандидатского экзамена

1. Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
2. Теорема Бэра о категории.
3. Теорема Хаусдорфа о пополнении.
4. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений.
5. Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества.
6. Критерии относительной компактности в $C(K)$ и $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$ (теорема Асколи-Арцела и критерий Рисса).
7. Интеграл Лебега и его свойства. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.
8. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Б. Леви и Фату.
9. Теорема Фубини.
10. Пространства Лебега L_p , $1 \leq p \leq \infty$ и их свойства. Неравенства Гельдера и Минковского.
11. Топологические пространства. Топологии. Базы. Аксиомы счетности.
12. Сходящиеся последовательности. Непрерывные, открытые и замкнутые отображения.
13. Связность. Непрерывные отображения связных пространств.
14. Аксиомы отделимости. Задания топологий.
15. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.
16. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.
17. Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей.
18. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.

19. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
20. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
21. Ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора.
22. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.
23. Сопряженное пространство.
24. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения.
25. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства).
26. Спектр оператора.
27. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.
28. Преобразование Фурье и его свойства.
29. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини.
30. Преобразование Фурье функций из $S^\infty(R^m)$.
31. Преобразование Фурье свертки.
32. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.
33. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато.
34. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
35. Обобщенная производная и ее свойства.
36. Пространства Соболева W_p^1 и их свойства.
37. Неравенства Пуанкаре–Стеклова–Фридрихса.
38. Понятие о теоремах вложения.
39. Понятие о следах функций из пространства W_p^1 .
40. Основные уравнения математической физики; постановки задач.
41. Корректно и некорректно поставленные задачи.
42. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).
43. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.
44. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона.
45. Задача Коши для уравнения теплопроводности (в одномерном и многомерном случаях).
46. Задача Коши для уравнения колебаний (в одномерном и многомерном случаях). Характеристики. Характеристический конус.

47. Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал.
48. Объемный параболический потенциал и его свойства. Потенциал Пуассона и его свойства.
49. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.
50. Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.
51. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
52. Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.
53. Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.
54. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.
55. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.
56. Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаздо-Галеркина.
57. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.
58. Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.
59. Прямые методы решения систем линейных уравнений с полными матрицами и матрицами специального вида.
60. Одношаговые итерационные методы.
61. Чебышевские одношаговые итерационные методы. Оптимальный набор чебышевских параметров и вычислительная устойчивость. Трехчленные (двушаговые) чебышевские итерационные методы.
62. Методы подпространства Крылова.
63. Методы сопряженных градиентов и сопряженных невязок, MINRES.
64. Метод Ланцоша. Алгоритм Арнольди.
65. Методы решения систем с несимметричными матрицами. GMRES. Метод бисопряженных градиентов.

66. Предобусловливание. Предобусловленный метод сопряженных градиентов. Предобусловленный GMRES. Неполная LU-факторизация.
67. Матрица Фурье и быстрое дискретное преобразование Фурье.
68. Решение систем уравнений с циркулянтными и тёплицевыми матрицами.
69. Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения.
70. Конечные и разделенные разности.
71. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Выбор узлов интерполяции.
72. Локальные и нелокальные сплайны. Интерполяция сплайнами.
73. Интерполяционные квадратурные формулы.
74. Квадратурные формулы Гаусса.
75. Многомерные квадратурные формулы.
76. Понятие о методе Монте-Карло.
77. Интегрирование быстро осциллирующих функций.
78. Численные методы решения задачи Коши. Явные и неявные методы. Методы Рунге-Кутты и Адамса.
79. Устойчивость численных методов решения задачи Коши.
80. Понятие о жестких задачах и методах их решения.
81. Сеточные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость, аппроксимация и сходимость.
82. Метод пристрелки (стрельбы).
83. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.
84. Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость).
85. Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала).
86. Разностная схема для задачи Дирихле в прямоугольнике. Принцип максимума и теоремы сравнения. Априорная оценка решения, его существование и единственность. Погрешность аппроксимации и оценка погрешности.
87. Разностная схема для уравнения Пуассона на неравномерной сетке и ее свойства.

88. Начально-краевая задача для параболических уравнений. Полудискретный метод (метод прямых).
89. Двухслойные разностные схемы, погрешность аппроксимации. Устойчивость явной и чисто неявной разностных схем. Спектральный и энергетический методы исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весами.
90. Экономичные методы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Метод переменных направлений, метод приближенной факторизации, метод с расщепляющимся оператором. Локально-одномерные методы и их свойства.
91. Прямые методы решения сеточных уравнений (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции).
92. Итерационные методы решения сеточных уравнений (метод последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод).
93. Понятие о многосеточном методе (методе Федоренко). Сглаживающее свойство базовых итерационных методов. Классический многосеточный метод. V-, W- и F- циклы. Сходимость многосеточного метода.
94. Методы решения обратных и некорректных задач.
95. Применение методов регуляризации, минимизации сглаживающего функционала и итерационных методов для решения вырожденных, несовместных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений и интегральных уравнений первого рода.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

4. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

4.1 Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
2. Бакушинский А.Б., Худак Ю.И. Элементы функционального анализа. М.: ACADEMIA, 2011.
3. Иосида К. Функциональный анализ. Изд. 3-е. М.: ЛКИ, 2010.
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Изд-во "Лань", 2009.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. В 2-х т. М.: Академия, 2012.
6. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2005.

7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.

8. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

9. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

10. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бино. Лаборатория знаний, 2012.

13. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы. - СПб: Изд-во "Лань", 2014.

14. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.

15. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа. М.: Издательский центр "Академия", 2007.

16. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. М.: Мир, 2001.

4.2 Дополнительная литература:

1. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. Василевский Ю.В., Ольшанский М.А. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. – М.: МАКС Пресс, 2007.

4. Ольшанский О.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Физматлит, 2005.