

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

Драгунов В.К.

« 16 » июня 2015 г.



Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

специальной дисциплины

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ОД.2

Всего: 252 часа

Семестр 5, 144 часа, в том числе 6 часов – контактная работа,
138 часа – самостоятельная работа,

Семестр 6, 108 часов, в том числе 6 часов – контактная работа,
66 часов – самостоятельная работа,
36 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденном приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866», и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

Формула специальности

Специальность «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» – область математики, посвященная изучению дифференциальных уравнений. Основными составными частями специальности являются обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Главные научные цели специальности: исследование разрешимости дифференциальных уравнений, описание качественных и количественных характеристик, приложения.

Области исследований

1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем обыкновенных уравнений.
2. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
3. Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.
4. Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях.
5. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений.
6. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.
7. Теория псевдодифференциальных операторов.
8. Теория дифференциально-операторных уравнений.
9. Теория дифференциально-функциональных уравнений.
10. Асимптотическая теория дифференциальных уравнений и систем.
11. Теория дифференциальных включений и вариационных неравенств.

12. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления.

Отрасль науки

физико-математические науки

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по дифференциальным уравнениям, динамическим системам и оптимальному управлению.

Задачами дисциплины являются: изучение функционального анализа, теории функциональных пространств, теории обобщенных функций, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции:**

- способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).
- способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития (УК-5);
- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);
- способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);
- способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5);
- способность разрабатывать новые методы исследования и решения дифференциальных уравнений, применять для этого методы теории функций и функционального анализа (ПК-6).
- способность читать лекции, проводить лабораторные и практические занятия с обучающимися, руководить курсовым проектированием и выполнением выпускных квалификационных работ бакалавров (ПК-7).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

- основные понятия и результаты функционального анализа (ОПК-1);
- основные свойства пространств Лебега и Соболева (ПК-1);
- основные понятия теории обобщенных функций (ПК-1);
- основные результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОПК-1);
- постановки основных краевых и начально-краевых задач для уравнений в частных производных и результаты об их разрешимости (ПК-1);

уметь:

- применять методы функционального анализа к исследованию математических задач (ПК-2);
- использовать пространства Лебега и Соболева для исследования уравнений в частных производных (ПК-5);
- применять теорию обобщенных функций для формулировки и исследования краевых и начально-краевых задач (ПК-2);
- ставить задачи математической физики и исследовать их свойства (УК-1);

владеть:

- теорией и методами функционального анализа (ПК-6);
- теорией функциональных пространств (ПК-6);
- теорией обобщенных функций (ПК-6);
- теорией обыкновенных дифференциальных уравнений (ПК-7);
- современной теорией уравнений с частными производными (УК-5);

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Функциональный анализ

Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра о категории. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества. Критерии относительной компактности в $C(K)$ и $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$ (теорема Асколи-Арцела и критерий Рисса).

Топологические пространства. Топологии. Базы. Аксиомы счетности. Сходящиеся последовательности. Непрерывные, открытые и замкнутые отображения. Связность. Непрерывные отображения связных пространств. Аксиомы отделимости. Задания топологий. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.

Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.

Сильная и слабая сходимость. Свойства слабо сходящихся последовательностей. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве. Ряды

Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.

Линейные функционалы и операторы. Непрерывные линейные операторы. Нормы и спектральный радиус оператора.

Ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора. Мера обусловленности линейного оператора и ее применение при замене точного уравнения (решения) приближенным.

Сопряженное пространство. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства). Спектр оператора. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства. Вариационные методы минимизации квадратичных функционалов, решения уравнений и нахождения собственных значений (методы Ритца, Бубнова-Галеркина, наименьших квадратов).

Преобразование Фурье и его свойства. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини. Преобразование Фурье функций из $S^\infty(R^m)$. Преобразование Фурье свертки. Преобразование Фурье-Планшереля. Равенство Парсеваля.

Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато. Метод Ньютона, его сходимость и применение.

Функциональные пространства

Пространства $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Обобщенное неравенство Минковского. Обратное неравенство Минковского. Неравенство Харди. Полнота пространства $L_p(E)$. Плотность в $L_p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) множества простых функций, множества непрерывных и непрерывных финитных функций. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.

Пространство $L_\infty(E)$ и его полнота. Взаимосвязь пространств Лебега с конечным и бесконечным показателями суммируемости.

Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства. Плотность в $L_p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Критерий Рисса предкомпактности в $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$.

Определение обобщенной производной и ее свойства. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в пространствах Соболева. Пространства $W_p^{0,l}$ и их свойства. Продолжение функций из пространств Соболева.

Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега. Пространства Гельдера. Неравенство Морри. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.

Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

Дифференцируемость функций из пространств Соболева на почти всех прямых.

Обобщенные функции

Пространство основных функций. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Регуляризация степенных особенностей.

Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.

Свертка обобщенных функций.

Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

Автономные системы уравнений. Положение равновесия. Предельные циклы.

Устойчивость по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (без доказательства), приложение к задачам быстрогодействия для линейных систем.

Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина..

Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка. Характеристики. Задача Коши. Теория Гамильтона–Якоби.

Уравнения с частными производными

Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши–Ковалевской.

Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума). Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).

Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).

Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал. Объемный параболический потенциал и его свойства. Потенциал Пуассона и его свойства. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.

Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаздо-Галеркина. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины: 6 семестр – экзамен кандидатского минимума.

Вопросы для самоконтроля и проведения кандидатского экзамена

1. Метрические пространства. Полные и неполные метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
2. Теорема Бэра о категории.
3. Теорема Хаусдорфа о пополнении.
4. Принцип сжимающих отображений и его приложения. Обобщенный принцип сжимающих отображений.
5. Компактность в метрических пространствах. ε -сеть. Вполне ограниченные множества.
6. Критерии относительной компактности в $C(K)$ и $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$ (теорема Асколи-Арцела и критерий Рисса).
7. Топологические пространства. Топологии.
8. Базы. Аксиомы счетности.
9. Сходящиеся последовательности. Непрерывные, открытые и замкнутые отображения.
10. Связность. Непрерывные отображения связных пространств.
11. Аксиомы отделимости. Задания топологий.
12. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.
13. Линейные, нормированные, банаховы и гильбертовы пространства.
14. Сильная и слабая сходимости. Свойства слабо сходящихся последовательностей.
15. Задача о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве.
16. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
17. Непрерывные линейные операторы. Норма и спектральный радиус оператора.
18. Ряд Неймана и условия его сходимости. Теоремы о существовании обратного оператора.
19. Сопряженное пространство.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения.
21. Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала (для гильбертова пространства).

22. Спектр оператора.
23. Сопряженные, симметричные, самосопряженные, положительно определенные, вполне непрерывные операторы и их спектральные свойства.
24. Преобразование Фурье и его свойства.
25. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини.
26. Преобразование Фурье функций из $S^\infty(R^m)$.
27. Преобразование Фурье свертки.
28. Преобразование Фурье-Плассереля. Равенство Парсеваля.
29. Дифференцирование нелинейных операторов, производные Фреше и Гато.
30. Метод Ньютона, его сходимость и применение.
31. Пространства $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского.
32. Обобщенное неравенство Минковского.
33. Обратное неравенство Минковского.
34. Полнота пространства $L_p(E)$.
35. Плотность в $L_p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) множества простых функций, множества непрерывных и непрерывных финитных функций.
36. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.
37. Пространство $L_\infty(E)$ и его полнота. Взаимосвязь пространств Лебега с конечным и бесконечным показателями суммируемости.
38. Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства. Плотность в $L_p(E)$ ($1 \leq p < \infty$) множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.
39. Определение обобщенной производной и ее свойства.
40. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность.
41. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в пространствах Соболева.
42. Пространства $W_p^{0,l}$ и их свойства.
43. Продолжение функций из пространств Соболева.
44. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега.
45. Пространства Гельдера. Неравенство Морри. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.
46. Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций.
47. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.
48. Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

49. Дифференцируемость функций из пространств Соболева на почти всех прямых.

50. Пространство основных функций.

51. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций.

52. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Регуляризация степенных особенностей.

53. Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.

54. Свертка обобщенных функций.

55. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

56. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

57. Гладкость решения задачи Коши по начальным данным и параметрам, входящим в правые части системы уравнений. Продолжение решения.

58. Общая теория линейных уравнений и систем (область существования решения, фундаментальная матрица Коши, формула Лиувилля-Остроградского, метод вариации постоянных и др.).

59. Автономные системы уравнений. Положение равновесия. Предельные циклы.

60. Устойчивость по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя.

61. Теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости.

62. Теорема Четаева о неустойчивости.

63. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

64. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

65. Краевая задача для линейного уравнения или системы уравнений. Функция Грина. Представление решения краевой задачи с помощью функции Грина..

66. Задача Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

67. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Теорема существования и единственности решения при условиях Каратеодори.

68. Системы уравнений с частными производными типа Ковалевской. Аналитические решения. Теория Коши–Ковалевской.

69. Классификация линейных уравнений второго порядка на плоскости. Характеристики.

70. Основные свойства гармонических функций (формулы Грина, теоремы о среднем, принцип максимума).

71. Фундаментальное решение и функция Грина для уравнения Лапласа.

72. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, гладкость, теоремы о среднем и др.).

73. Задача Коши и начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности и методы их решения. Свойства решений (принцип максимума, бесконечная скорость распространения, функция источника и др.).

74. Задача Коши и начально-краевые задачи для волнового уравнения и методы их решения. Свойства решений (характеристический конус, конечность скорости распространения волн, характер переднего и заднего фронтов волны и др.).

75. Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал.

76. Объемный параболический потенциал и его свойства.

77. Потенциал Пуассона и его свойства.

78. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

79. Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.

80. Метод Фурье и его применение для доказательства разрешимости начально-краевых задач для параболических и гиперболических уравнений.

81. Обобщенные решения эллиптических уравнений. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

82. Задача на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

83. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

84. Обобщенные решения параболических уравнений. Существование и единственность решения из $V_2(Q_T)$. Метод Фаздо-Галеркина.

85. Обобщенные решения из $W(Q_T)$ и $H_2^{2,1}(Q_T)$, их существование и единственность.

86. Гиперболические уравнения 2-го порядка. Сильные и слабые обобщенные решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, их существование и единственность.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. В 2-х т. М.: Академия, 2012.

3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.
4. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.
5. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.
6. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.: Лань, 2011.
7. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.: Эдиториал УРСС, 2007.
8. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2014.
9. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.
10. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.
11. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
12. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
13. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ, 2014.

Дополнительная литература:

14. 14. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.
15. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.
17. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.
18. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.
19. Математическая теория оптимальных процессов. /Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983.
20. Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.