

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»



«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

Драгунов В.К.

декабря 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Методы вычислительной математики»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.1.1

Всего: 108 часов

Семестр 1 , в том числе

6 часов – контактная работа,
84 часа – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по основным разделам современной теории методов вычислительной математики.

Задачами дисциплины являются: изучение численных методов линейной алгебры, теории приближения функций, численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, интегральных уравнений, а также основных методов решения некорректных задач.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции:**

- способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).
- способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);
- готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);
- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);
- способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);
- способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

- способность применять методы вычислительной математики и разрабатывать алгоритмы численной реализации математических моделей (ПК-3);
- способность к проведению вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования с применением современных компьютерных технологий и математических методов (ПК-4);
- способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

- прямые и итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (ОПК-1);
- методы приближения функций (ПК-1);
- методы численного интегрирования и дифференцирования (ПК-2);
- методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ПК-2);
- методы численного решения уравнений математической физики (ОПК-2);
- методы численного решения интегральных уравнений (ПК-1);
- методы решения некорректных задач (ПК-1);

уметь:

- использовать прямые и итерационные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений (ПК-2);
- использовать различные методы приближения функций (ПК-2);
- применять методы численного интегрирования и дифференцирования (ПК-2);
- применять численные методы для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (УК-2);
- разрабатывать методы численного решения уравнений математической физики (УК-1);
- применять численные методы для решения интегральных уравнений (ПК-3);
- применять численные методы для решения некорректных задач (УК-3);

владеть:

- методами численного решения основных математических задач (ПК-5);
- методами проведения вычислительного эксперимента (ПК-4).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы линейной алгебры

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса и его варианты. LU-разложение матрицы и его использование для задач вычислительной алгебры. Метод Холецкого. Метод прогонки.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Одношаговые итерационные методы. Классические итерационные методы, каноническая форма записи. Методы простой итерации и Зейделя, SOR – метод, SSOR – метод. Необходимое и достаточное условия сходимости итерационных методов для систем с положительно определенными матрицами. Понятие о неявных и нестационарных методах. Многочлены Чебышева. Явный нестационарный метод с чебышевским набором параметров. Неявный стационарный метод с чебышевским набором параметров.

Проекционные методы. Методы подпространства Крылова. Методы решения систем с симметричными матрицами. Методы сопряженных градиентов и сопряженных невязок, MINRES. Метод Ланцоша. Алгоритм Арнольди.

Методы решения систем с несимметричными матрицами. GMRES, Биортогонализация Ланцоша. Метод бисопряженных градиентов. Метод GMRES – stab.

Предобусловливание. Предобусловленный метод сопряженных градиентов. Предобусловленный GMRES. Неполная LU-факторизация.

Матрица Фурье и быстрое дискретное преобразование Фурье. Циркулянтные матрицы. Тёплицевы матрицы. Решение систем уравнений с циркулянтными и тёплицевыми матрицами.

Решение частичной проблемы собственных чисел. Теорема Гершгорина. Простейшие методы решения проблемы собственных значений. Степенной метод. Метод обратных итераций. Понятие о QR-алгоритме.

Приближение функций и смежные вопросы

Общие свойства систем ортогональных многочленов. Многочлены Лежандра и Чебышева; их свойства и приложения.

Интерполяционные многочлены. Многочлен Лагранжа. Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными и с разделенными разностями. Выбор узлов интерполяции. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами. Интерполяция функций многих переменных.

Быстрое дискретное преобразование Фурье.

Численное интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Задача оптимизации квадратуры. Квадратурные формулы типа Гаусса.

Многомерные квадратурные формулы. Понятие о методе Монте-Карло. Интегрирование сильно осциллирующих функций.

Формулы численного дифференцирования.

Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Численные методы решения задачи Коши. Дискретизация задачи. Аппроксимация, устойчивость и сходимость численных методов. Понятие о локальной и глобальной погрешностях. Метод разложения в ряд Тейлора, явный и неявный методы Эйлера, методы Рунге-Кутты. Правило Рунге оценки погрешностей. Организация программ с автоматическим выбором шага. Многошаговые методы. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Неявные методы. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений и уравнений m -го порядка. Понятие о жестких задачах и методах их решения.

Численное решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Дискретизация задачи. Сетка, сеточные функции. Построение разностной схемы. Разрешимость. Использование метода прогонки. Оценка погрешности сеточного решения. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Проблема аппроксимации краевых условий. Метод пристрелки. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

Методы численного решения уравнений математической физики

Разностные и вариационно-разностные методы решения уравнений математической физики. Основные понятия (аппроксимация, устойчивость, сходимость). Методы построения разностных схем (метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств, вариационно-разностные и проекционно-разностные методы, метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала); их применение к решению краевых и начально-краевых задач для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. Оценка порядка аппроксимации и сходимости. Двухслойные и трехслойные схемы; их устойчивость.

Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач; методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции). Метод

последовательной верхней релаксации, неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод. Методы расщепления, переменных направлений. Оценки скорости сходимости.

Понятие о многосеточных методах. Базовые итерационные алгоритмы. Двухсеточный метод. Сглаживающее свойство базовых итерационных методов. Коррекция с грубой сетки. Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке. Классический многосеточный метод. V-, W- и F- циклы. Предсглаживание и постсглаживание. Матрица итераций. Сходимость многосеточного метода. Сходимость W-цикла. Свойства сглаживания и аппроксимации. Анализ многосеточного метода на примере задачи Пуассона.

Методы решения интегральных уравнений

Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Введение в теорию интегральных уравнений.

Метод квадратур. Проекционные методы. Методы наименьших квадратов и коллокации. Метод замены ядра на вырожденное.

Интегральные уравнения Вольтера второго рода. Интегральные уравнения Вольтера первого рода.

Нелинейные интегральные уравнения.

Методы решения некорректных задач

Некорректные задачи. Метод подбора. Квазирешения.

Метод регуляризации решения операторных уравнений. Понятие регуляризирующего оператора. Метод Лагранжа построения регуляризирующих операторов. Определение параметра регуляризации по невязке. Построение регуляризирующих операторов с помощью минимизации сглаживающего функционала.

Решение вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

Метод регуляризации решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Приближенные методы решения интегральных уравнений типа свертки первого рода.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

1 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Метод Гаусса и его варианты.
2. LU-разложение матрицы и его использование для задач вычислительной алгебры.

3. Метод Холецкого.
4. Метод прогонки.
5. Методы простой итерации и Зейделя.
6. SOR – метод, SSOR – метод.
7. Необходимое и достаточное условия сходимости итерационных методов для систем с положительно определенными матрицами.
8. Многочлены Чебышева.
9. Явный нестационарный метод с чебышевским набором параметров. Неявный стационарный метод с чебышевским набором параметров.
10. Проекционные методы. Методы подпространства Крылова.
11. Методы сопряженных градиентов и сопряженных невязок.
12. MINRES. Метод Ланцоша. Алгоритм Арнольди.
13. Методы решения систем с несимметричными матрицами. GMRES. Метод GMRES – stab.
14. Биортогонализация Ланцоша. Метод бисопряженных градиентов.
15. Предобуславливание. Предобусловленный метод сопряженных градиентов. Предобусловленный GMRES. Неполная LU-факторизация.
16. Матрица Фурье и быстрое дискретное преобразование Фурье.
17. Циркулянтные матрицы. Тёплицевы матрицы. Решение систем уравнений с циркулянтными и тёплицевыми матрицами.
18. Теорема Гершгорина.
19. Простейшие методы решения проблемы собственных значений. Степенной метод. Метод обратных итераций.
20. Понятие о QR-алгоритме.
21. Многочлен Лагранжа.
22. Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными и с разделенными разностями. Выбор узлов интерполяции.
23. Интерполяция нелокальными и локальными сплайнами.
24. Интерполяция функций многих переменных.
25. Быстрое дискретное преобразование Фурье.
26. Интерполяционные квадратурные формулы.
27. Квадратурные формулы Гаусса.
28. Многомерные квадратурные формулы.
29. Понятие о методе Монте-Карло.
30. Интегрирование сильно осциллирующих функций.
31. Формулы численного дифференцирования.
32. Явный и неявный методы Эйлера решения задачи Коши.
33. Методы Рунге-Кутты.

34. Правило Рунге оценки погрешностей. Организация программ с автоматическим выбором шага.

35. Устойчивость численных методов решения задачи Коши. Неявные методы.

36. Решение задачи Коши для систем дифференциальных уравнений и уравнений m -го порядка.

37. Понятие о жестких задачах и методах их решения.

38. Разностная схема для решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Дискретизация задачи. Сетка, сеточные функции.

39. Устойчивость, аппроксимация и сходимость. Оценка погрешности.

40. Метод пристрелки.

41. Разностные схемы для решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами.

42. Основные понятия теории разностных схем (аппроксимация, устойчивость, сходимость).

43. Метод сеток, интегро-интерполяционный метод, метод аппроксимации интегральных тождеств

44. Вариационно-разностные и проекционно-разностные методы.

45. Метод Галеркина, метод конечных элементов, метод аппроксимации квадратичного функционала.

46. Методы численного решения краевых задач для эллиптических уравнений.

47. Методы численного решения начально-краевых задач для параболических уравнений.

48. Методы численного решения начально-краевых задач для гиперболических уравнений.

49. Экономичные методы решения нестационарных многомерных задач.

50. Методы решения нелинейных уравнений (теплопроводности и газовой динамики). Дивергентные и монотонные разностные схемы. Схемная и искусственная вязкость.

51. Методы решения сеточных уравнений. Прямые методы (прогонки, быстрого дискретного преобразования Фурье, циклической редукции).

52. Метод последовательной верхней релаксации.

53. Неявные схемы с эквивалентными по спектру операторами, попеременно-треугольный метод.

54. Методы расщепления, переменных направлений.

55. Понятие о многосеточных методах. Двухсеточный метод. Сглаживающее свойство базовых итерационных методов. Коррекция с грубой сетки. Продолжение, проектор, оператор на грубой сетке.

56. Классический многосеточный метод. V-, W- и F– циклы.. Сходимость многосеточного метода.
57. Анализ многосеточного метода на примере задачи Пуассона.
58. Метод квадратур решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
59. Проекционные методы решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
60. Методы наименьших квадратов и коллокации решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
61. Методы решения интегральных уравнений Вольтера второго рода.
62. Методы решения интегральных уравнений Вольтера первого рода.
63. Некорректные задачи. Метод подбора. Квазирешения.
64. Метод регуляризации решения операторных уравнений. Понятие регуляризирующего оператора. Метод Лагранжа построения регуляризирующих операторов.
65. Определение параметра регуляризации по невязке. Построение регуляризирующих операторов с помощью минимизации сглаживающего функционала.
66. Решение вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.
67. Метод регуляризации решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.
68. Приближенные методы решения интегральных уравнений типа свертки первого рода.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. – СПб: Изд-во "Лань", 2014.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
3. Злотник А.А. Введение в теорию разностных схем. Учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ. 2012.
4. Рябенкий В.С. Введение в вычислительную математику. 3-е изд., М.: Физматлит, 2008.
5. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. Итерационные методы решения седловых задач. – М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

6. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М. Физматлит, 2005.

7. Олышанский О.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М. Физматлит, 2005.

8. Тиртышников Е.Е. Методы численного анализа. – М.: Издательский центр “Академия”, 2007.

9. Тиртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. – М.: Физмат-лит, 2007.

10. Калиткин Н.Н. Численные методы. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014.

11. Зализняк, В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений – М.: Юрайт, 2012.

Дополнительная литература:

12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.

13. Годунов С.К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. – Новосибирск. Научная книга (ИДМИ), 2002.

14. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. – М.: Мир, 2001.