НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

_________________ Драгунов В.К.

«22» декабря 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 − «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Функциональный анализ»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.1.2

Всего: 108 часов

Семестр 1, в том числе 6 часов – контактная работа,
84 часа – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по функциональному анализу.

Задачами дисциплины являются: изучение теории метрических и топологических пространств, освоение теории линейных операторов и линейных функционалов в нормированных пространствах, изучение теории преобразования Фурье и основных положений дифференциального исчисления в банаховых пространствах.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);
– готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);
– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);
– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);
– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– определения и классические результаты теории метрических пространств (ОПК-1);

– терминологию и простейшие факты теории топологических пространств (ОПК-1);

– основные понятия и факты теории нормированных пространств (ОПК-2);

– определения и классические результаты теории линейных операторов (ОПК-2);

– простейшие факты нелинейного анализа (УК-2);

уметь:

– применять результаты функционального анализа для исследования математических задач (ПК-2);

– формулировать математические задачи на языке функционального анализа (УК-3);

владеть:

– основными понятиями и фактами функционального анализа (ПК-5);

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Метрические пространства

Определение и примеры метрических пространств. Сходимость. Полные и неполные метрические пространства. Открытые и замкнутые множества. Внутренние, предельные и граничные точки. Точки прикосновения, изолированные точки. Замыкание множества. Открытые и замкнутые множества на числовой прямой. Канторово множество. Компактные множества. Лемма Гейне-Бореля.

Непрерывные отображения метрических пространств. Гомеоморфизмы. Изометрия.

Теорема о вложенных шарах. Сепарабельные метрические пространства. Теорема Бэра о категории. Теорема Хаусдорфа о пополнении. Принцип сжимающих отображений и его обобщение.

Компактность в метрических пространствах. е-сеть. Вполне ограниченные множества. Пространство C(K) непрерывных на компакте K функций и его полнота. Критерий относительной компактности в C(K) (теорема Асколи-Арцела). Критерий Рисса компактности в $L_p(E)$ $(1 < p < \infty)$.

Топологические пространства

Топологические пространства. Топологии. Открытые и замкнутые множества. Окрестность. Замыкание множества. Сравнение топологий. Подпространства. Индуцированные топологии.

Базы. Аксиомы счетности. Топология метрического пространства.

Сходящиеся последовательности. Непрерывные отображения. Открытые и замкнутые отображения. Гомеоморфизмы.

Связность. Достаточные условия связности. Связные множества на прямой и в конечномерном пространстве. Непрерывные отображения связных пространств.

Аксиомы отделимости. Большая лемма Урысона и теорема Титце-Урысона.

Различные способы задания топологии. Метризуемость.

Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.

Линейные топологические пространства.

Нормированные пространства. Линейные операторы и линейные функционалы в нормированных пространствах

Нормированные пространства. Банаховы пространства. Фактор-пространства. Коразмерность. Линейные функционалы и их геометрическая интерпретация.

Выпуклые множества и выпуклые тела. Выпуклые и однородно-выпуклые функционалы. Функционал Минковского. Теорема Хана-Банаха (вещественный и комплексный варианты). Отделимость выпуклых множеств.

Евклидовы и унитарные пространства. Существование ортонормированных базисов в сепарабельных пространствах.

Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем равномерном приближении в гильбертовом пространстве. Ортогональное проектирование на замкнутое подпространство. Ортогональные дополнения. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Теорема Рисса-Фишера. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств. Характеристическое свойство евклидовых (унитарных) пространств.

Линейные операторы. Ограниченность и непрерывность линейного оператора. Норма ограниченного линейного оператора.

Пространство $L(X;Y)$ и его полнота. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия. Обратный оператор. Достаточные условия ограниченности обратного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана.

Линейные функционалы не нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах и ее следствия.

Сопряженное пространство. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $L_p(E)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Изометричность пространств H и H^*, $L_p(E)$ и $L_{p'}(E)$. Слабая сходимость и ее свойства. Второе сопряженное пространство. Оператор естественного вложе-ния. Рефлексивные пространства. Слабая полнота рефлексивного пространства. Слабая компактность единичного шара. Слабая топология и ее связь со слабой сходимостью.

* - слабая сходимость, ее свойства, связь с сильной и слабой сходимостью.

Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор. Вполне непрерывные операторы. Интегральный оператор с ядром Гильберта-Шмидта.

Теория Фредгольма. Применение к интегральным уравнениям.

Спектр линейного оператора. Резольвента. Собственные значения и собственные векторы. Точечный спектр, непрерывный спектр. Резольвентное множество. Спектр. Оценка спектрального радиуса. Спектр самосопряженного оператора. Спектр вполне непрерывного оператора. Теорема Гильберта-Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье функций из $L_1(R^m)$ и его свойства. Обратное преоб-разование Фурье. Условие Дини. Преобразование Фурье функций из $S^\infty(R^m)$. Преобразование Фурье свертки. Преобразование Фурье-Планшереля функций из $L_2(R^m)$. Равенство Парсеваля.

Дифференциальное исчисление в банаховых пространствах

Абстрактные функции (функции со значениями в банаховом пространстве.) Непрерывность абстрактной функции. Дифференцируемость по Фреше. Сильная производная и сильный дифференциал. Дифференцирование сложной функции. Слабая производная (производная Гато) и слабый дифференциал. Оценка приращения дифференцируемой функции.

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

Теорема о неявной функции.

Экстремальные задачи. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума функционала. Экстремальные задачи с ограничениями.

Интегрирование абстрактных функций.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

1 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Определение и примеры метрических пространств. Полные и неполные метрические пространства
2. Компактные множества. Лемма Гейне-Бореля.
3. Теорема о вложенных шарах.
4. Теорема Бэра о категории.
5. Теорема Хаусдорфа о пополнении.
6. Принцип сжимающих отображений и его обобщение.
7. ε-сеть. Вполне ограниченные множества.
8. Пространство C(K) непрерывных на компакте K функций и его полнота. Критерий относительной компактности в C(K) (теорема Асколи-Арцела).
9. Критерий Рисса компактности в $L_p(E)$ $(1 < p < \infty)$.
10. Топологические пространства. Топологии. Открытые и замкнутые множества. Окрестность. Замыкание множества.
11. Сравнение топологий. Подпространства. Индуцированные топологии.
12. Базы. Аксиомы счетности. Топология метрического пространства.
13. Сходящиеся последовательности. Непрерывные отображения. Открытые и замкнутые отображения. Гомеоморфизмы.
14. Связность. Достаточные условия связности. Связные множества на прямой и в конечномерном пространстве. Непрерывные отображения связных пространств.
15. Аксиомы отделимости. Большая лемма Урысона и теорема Титце-Урысона.
16. Различные способы задания топологии. Метризуемость.
17. Компактность в топологических пространствах. Непрерывные отображения компактных пространств.
18. Линейные топологические пространства.
19. Нормированные пространства. Банаховы пространства.
20. Фактор-пространства. Коразмерность.
21. Линейные функционалы и их геометрическая интерпретация.
22. Выпуклые множества и выпуклые тела. Выпуклые и однородно-выпуклые функционалы.
23. Функционал Минковского.
24. Теорема Хана-Банаха (вещественный и комплексный варианты).
25. Отделимость выпуклых множеств.
26. Евклидовы и унитарные пространства. Существование ортонормированных базисов в сепарабельных пространствах.

27. Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем равномерном приближении в гильбертовом пространстве.

28. Ортогональное проектирование на замкнутое подпространство. Ортогональные дополнения. Разложение гильбертова пространства в ортогональную сумму подпространств.

29. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Ряд Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.

30. Теорема Рисса-Фишера.

31. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

32. Характеристическое свойство евклидовых (унитарных) пространств.

33. Линейные операторы. Ограниченность и непрерывность линейного операто-ра. Норма ограниченного линейного оператора.

34. Пространство $L(X;Y)$ и его полнота.

35. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее следствия.

36. Обратный оператор. Достаточные условия ограниченности обратного оператора. Теорема Банаха об обратном операторе. Ряд Неймана.

37. Линейные функционалы не нормированных пространствах. Теорема Хана-Банаха в нормированных пространствах и ее следствия.

38. Сопряженное пространство. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

39. Теорема об общем виде линейного непрерывного функционала в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$**.**

40. Слабая сходимость и ее свойства.

41. Второе сопряженное пространство. Оператор естественного вложения. Рефлексивные пространства.

42. Слабая полнота рефлексивного пространства. Слабая компактность единичного шара.

43. Слабая топология и ее связь со слабой сходимостью.

44. * - слабая сходимость, ее свойства, связь с сильной и слабой сходимостью.

45. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Сопряженный оператор. Вполне непрерывные операторы.

46. Интегральный оператор с ядром Гильберта-Шмидта.

47. Теория Фредгольма. Применение к интегральным уравнениям.

48. Спектр линейного оператора. Резольвента. Собственные значения и собственные векторы. Точечный спектр, непрерывный спектр. Резольвентное множество. Спектр. Оценка спектрального радиуса.

49. Спектр вполне непрерывного оператора.

50. Теорема Гильберта-Шмидта.
51. Преобразование Фурье функций из $L_1(R^m)$ и его свойства.
52. Обратное преобразование Фурье. Условие Дини.
53. Преобразование Фурье функций из $S^\infty(R^m)$.
54. Преобразование Фурье свертки.
55. Преобразование Фурье-Планшереля функций из $L_2(R^m)$. Равенство Парсеваля.
56. Абстрактные функции (функции со значениями в банаховом пространстве.) Непрерывность абстрактной функции. Дифференцируемость по Фреше. Сильная производная и сильный дифференциал. Дифференцирование сложной функции.
57. Слабая производная (производная Гато) и слабый дифференциал. Оценка приращения дифференцируемой функции.
58. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.
59. Теорема о неявной функции.
60. Экстремальные задачи. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия экстремума функционала. Экстремальные задачи с ограничениями.
61. Интегрирование абстрактных функций.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
2. Бакушинский А.Б., Худак Ю.И. Элементы функционального анализа. М.: ACADEMIA, 2013.
3. Иосида К. Функциональный анализ. Изд. 3-е. М.: ЛКИ, 2007.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; Лань, 2008.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 1.. М: Академия, 2012.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 2. М.: Академия, 2012.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Изд-во “Лань”, 2009.

Дополнительная литература:

8. Банах С. Теория линейных операций. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

9. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I: Общая теория. – Эдиториал УРСС, 2004.

10. Канторович Л.В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Изд. 4-е. М.: BHV, 2004.

11. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2004.

12. Эванс Л.К., Гариэпи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. – Новосибирск. Изд –во “Научная книга”, 2002.