

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

Драгунов В.К.



«22» октября 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Теория разностных схем»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.2.1

Всего: 108 часов

Семестр 3, в том числе

6 часов – контактная работа,  
84 часа – самостоятельная работа,  
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

## **ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Целью** изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по теории разностных схем.

**Задачами** дисциплины являются: изучение основных понятий теории разностных схем, итерационных методов, применяемых для численной реализации разностных схем, а также получение базовых знаний по разностным схемам для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений второго порядка.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции:**

- способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).
- способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);
- готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);
- способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);
- готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);
- способность к критическому анализу и оценке современных научных
- способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

- способность применять методы вычислительной математики и разрабатывать алгоритмы численной реализации математических моделей (ПК-3);
- способность к проведению вычислительного эксперимента и компьютерного моделирования с применением современных компьютерных технологий и математических методов (ПК-4);
- способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5).

## **ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

### **знать:**

- основные понятия теории разностных схем (ОПК-1);
- простейшие разностные схемы, используемые для решения эллиптических уравнений и их свойства (ПК-2);
- простейшие разностные схемы, используемые для решения параболических уравнений и их свойства (ПК-2);
- простейшие разностные схемы, используемые для решения гиперболических уравнений и их свойства (ПК-2);
- итерационные методы, предназначенные для реализации разностных схем (ПК-3);

### **уметь:**

- строить разностные схемы для решения задач математической физики и исследовать их свойства (УК-3);
- строить простейшие разностные схемы, используемые для решения эллиптических уравнений и исследовать их свойства (ПК-4);
- строить простейшие разностные схемы, используемые для решения параболических уравнений и исследовать их свойства (ПК-4);
- строить простейшие разностные схемы, используемые для решения гиперболических уравнений и исследовать их свойства (ПК-4);
- строить итерационные методы, предназначенные для реализации разностных схем (УК-2);

### **владеть:**

- терминологией и методами теории разностных схем (ПК-5);
- методами исследования разностных схем (УК-1);
- методами реализации разностных схем (ОПК-2).

## **КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Основные понятия**

Разностная схема для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Принцип максимума и теоремы сравнения. Априорная оценка решения, его существование и единственность. Погрешность аппроксимации. Оценка погрешности в равномерной норме. Разностная схема повышенного порядка точности и ее свойства. Разностная схема для уравнения Пуассона на неравномерной сетке и ее свойства. Случай области, составленной из прямоугольников. Способы аппроксимации третьего краевого условия и их погрешность.

### **Сеточный метод Фурье**

Сеточный метод Фурье в одномерном случае. Метод Фурье для двумерного сеточного оператора Лапласа и сеточной задачи Дирихле. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, основанные на разложении решения в двукратную и однократную суммы Фурье. Сеточные нормы, связанные с двумерным сеточным оператором Лапласа, формулы и неравенства для них. Оценки решения сеточной задачи Дирихле.

### **Методы аппроксимации**

Обобщенная и вариационная постановки краевой задачи для эллиптического уравнения. Интегральное тождество и функционал энергии. Связь между постановками. Свойства билинейной формы и линейного функционала в обобщенной постановке. Разностные аналоги обобщенной и вариационной постановок краевой задачи (метод сумматорных тождеств). Связь между этими постановками. Модифицированная сеточная обобщенная постановка, ее алгебраическая форма записи. Существование и единственность решения. Свойства сеточных билинейной формы и линейного функционала. Оценка разностного решения. Разностная форма записи. Структура и свойства матрицы соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

### **Итерационные методы**

Свойства метода Холецкого, метода простой итерации (с постоянным параметром) и  $k$ -шагового итерационного метода в применении к системам сеточных эллиптических уравнений. Эквивалентность матриц по спектру. Двухступенчатые (неявные) итерационный метод с постоянным параметром и (неявный)  $k$ -шаговый итерационный метод. Обобщенная алгебраическая задача

на собственные значения. Неявный аналог итерационного метода скорейшего спуска. Понятие о методе сопряженных градиентов и его неявном аналоге.

### **Разностные схемы**

#### **для параболических и гиперболических уравнений**

Начально-краевая задача для параболических уравнений. Полудискретный метод ее решения. Двухслойные разностные схемы (явная, неявная, симметричная, с весом). Их погрешность аппроксимации. Устойчивость явной и чисто неявной разностных схем для параболической задачи в равномерной норме. Спектральный метод исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весами. Энергетический метод исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весом. Приложения.

Начально-краевая задача для гиперболических уравнений 2-го порядка. Трехслойные явная разностная схема и схема с весом. Их реализация. Погрешность аппроксимации. Энергетический метод исследования устойчивости трехслойной разностной схемы с весом.

### **Экономичные методы**

Экономичные методы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Метод переменных направлений, его вычислительная реализация, устойчивость и погрешность. Метод приближенной факторизации и его свойства. Метод с расщепляющимся оператором. Локально-одномерные методы и их свойства.

## **ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

3 семестр – дифференцированный зачет.

### **Вопросы для самоконтроля и проведения зачета**

1. Разностная схема для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Принцип максимума и теоремы сравнения. Априорная оценка решения, его существование и единственность.

2. Разностная схема для задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике. Погрешность аппроксимации. Оценка погрешности в равномерной норме.

3. Разностная схема повышенного порядка точности для задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ее свойства.

4. Разностная схема для уравнения Пуассона на неравномерной сетке и ее свойства. Случай области, составленной из прямоугольников.

5. Способы аппроксимации третьего краевого условия и их погрешность.

6. Сеточный метод Фурье в одномерном случае.

7. Метод Фурье для двумерного сеточного оператора Лапласа и сеточной задачи Дирихле. Методы решения сеточной задачи Дирихле для уравнения Пуассона, основанные на разложении решения в двукратную и однократную суммы Фурье.

8. Сеточные нормы, связанные с двумерным сеточным оператором Лапласа, формулы и неравенства для них. Оценки решения сеточной задачи Дирихле.

9. Обобщенная и вариационная постановки краевой задачи для эллиптического уравнения. Интегральное тождество и функционал энергии. Связь между постановками.

10. Свойства билинейной формы и линейного функционала в обобщенной постановке. Разностные аналоги обобщенной и вариационной постановок краевой задачи (метод сумматорных тождеств). Связь между этими постановками.

11. Модифицированная сеточная обобщенная постановка, ее алгебраическая форма записи. Существование и единственность решения.

12. Свойства сеточных билинейной формы и линейного функционала. Оценка разностного решения. Разностная форма записи. Структура и свойства матрицы соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

13. Свойства метода Холецкого, метода простой итерации (с постоянным параметром) и  $k$ -шагового итерационного метода в применении к системам сеточных эллиптических уравнений.

14. Эквивалентность матриц по спектру. Двухступенчатые (неявные) итерационный метод с постоянным параметром и (неявный)  $k$ -шаговый итерационный метод.

15. Обобщенная алгебраическая задача на собственные значения.

16. Неявный аналог итерационного метода скорейшего спуска.

17. Понятие о методе сопряженных градиентов и его неявном аналоге.

18. Начально-краевая задача для параболических уравнений. Полудискретный метод ее решения.



19. Двухслойные разностные схемы (явная, неявная, симметричная, с весом). Их погрешность аппроксимации.

20. Устойчивость явной и чисто неявной разностных схем для параболической задачи в равномерной норме. Спектральный метод исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весами.

21. Энергетический метод исследования устойчивости абстрактной разностной схемы с весом. Приложения.

22. Начально-краевая задача для гиперболических уравнений 2-го порядка. Трехслойные явная разностная схема и схема с весом. Их реализация. Погрешность аппроксимации.

23. Энергетический метод исследования устойчивости трехслойной разностной схемы с весом.

24. Экономичные методы для уравнения теплопроводности с несколькими пространственными переменными. Метод переменных направлений, его вычислительная реализация, устойчивость и погрешность.

25. Метод приближенной факторизации и его свойства. Метод с расщепляющимся оператором.

26. Локально-одномерные методы и их свойства.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

## **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА**

### **Основная литература:**

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы. – СПб: Изд-во "Лань", 2014.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

3. Злотник А.А. Введение в теорию разностных схем. Учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ. 2012.

4. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. 3-е изд., М.: Физматлит, 2008.

5. Калиткин Н.Н. Численные методы. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014.

6. Олышанский О.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М. Физматлит, 2005.

### **Дополнительная литература:**

7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003.

8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М. Наука, 1989.
9. Самарский А.А. Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, 1978.
10. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
11. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа. 1987.