НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

______________________ Драгунов В.К.

«22» декабря 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Теория функций и функциональные пространства»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.3.1

Всего: 72 часа

Семестр 5 , в том числе 6 часов – контактная работа,
48 часов – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по теории функций и функциональным пространствам.

Задачами дисциплины являются: изучение теории меры, измеримых функций и пространств Лебега, освоение теории функций ограниченной вариации и абсолютно непрерывных функций, изучение пространств Соболева и Орлича, получение базовых знаний по теории обобщенных функций.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

– готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);

– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5);

– способность разрабатывать новые методы исследования и решения дифференциальных уравнений, применять для этого методы теории функций и функционального анализа (ПК-6).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основные результаты теории меры, измеримых функций и интеграла Лебега (ОПК-1);
– основные свойства пространств Лебега (ОПК-2);
– основные свойства пространств Соболева и Орлича (ОПК-1);
– основы теории обобщенных функций (УК-2);

уметь:

– исследовать свойства функций, используя теорию пространств Лебега (УК-3);
– исследовать свойства функций, используя теорию пространств Соболева и Орлича (ПК-6);
– применять теорию обобщенных функций (ПК-2);

владеть:

– методами и результатами современной теории функций вещественного переменного (ПК-5).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Мера, измеримые функции и интеграл Лебега и тонкие свойства функций

Мера промежутка, мера открытого множества. Внешняя мера. Измеримые множества и их свойства. Свойства меры Лебега. Существование неизмеримых множеств.

Измеримые функции и их свойства. Арифметические операции над измеримыми функциями. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Теорема Лузина. Пределы последовательностей измеримых функций. Сходимость по мере и сходимость почти всюду. Теорема Рисса. Теорема Егорова. Измеримость интегрируемой по Риману функции.

Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры и его свойства. Связь с интегрируемостью по Риману. Интеграл Лебега от неограниченной функции. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.

Последовательности суммируемых функций. Сходимость в $L(E)$. Неравенство Чебышева. Теорема Лебега о мажорированной сходимости. Теоремы Б. Леви и Фату. Связь между различными видами сходимости.

Произведение мер, теорема Фубини.

Теоремы о покрытии. Меры Радона. Дифференцирование мер Радона. Максимальная функция и ее свойства. Дифференцирование интегралов в R^n. Точки Лебега локально суммируемой функции. Теорема о множестве точек Лебега.

Аппроксимативная непрерывность. Теорема Рисса о представлении. Слабая сходимость и компактность для мер Радона.

Мера Хаусдорфа. Определение и элементарные свойства. Размерность Хаусдорфа. Изопериметрическое неравенство. Плотности. Мера Хаусдорфа и элементарные свойства функций.

Формулы площади и коплощади. Липшицевы функции и теорема Радемахера. Линейные отображения и якобианы. Формула площади. Формула коплощади.

Функции ограниченной вариации и абсолютно непрерывные функции

Функции ограниченной вариации и их свойства. Интеграл Стилтьеса и интеграл Лебега-Стилтьеса.

Абсолютно непрерывные функции и их свойства.

Первообразные суммируемых функций одной переменной. Теоремы о классической и обобщенной производной функции, представимой неопределенным интегралом Лебега. Связь пространства абсолютно непрерывных функций и пространства Соболева функций одной переменной.

Пространства Лебега $L_p(E)$.

Пространства $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского. Обобщенное неравенство Минковского. Обратное неравенство Минковского. Неравенство Харди. Полнота пространства $L_p(E)$. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества простых функций, множества непрерывных и непрерывных финитных функций. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.

Пространство $L_\infty(E)$ и его полнота. Взаимосвязь пространств Лебега с конечным и бесконечным показателями суммируемости.

Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.

Критерий Рисса предкомпактности в $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$.

Пространства Соболева и Орлича

Определение обобщенной производной и ее свойства. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в пространствах Соболева. Пространства $\overset{0}{W}{}_p^{\,l}$ и их свойства. Продолжение функций из пространств Соболева.

Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега. Пространства Гельдера. Неравенство Морри. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.

Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

Дифференцируемость функций из пространств Соболева на почти всех прямых.

N-функции, дополнительные N-функции. Пространства Орлича. Аналог неравенства Гельдера. Норма Люксембурга. Связь пространств Орлича с пространствами Лебега и Соболева.

Обобщенные функции

Пространство основных функций. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Регуляризация степенных особенностей.

Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.

Свертка обобщенных функций.

Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

5 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Мера промежутка, мера открытого множества. Внешняя мера.
2. Измеримые множества и их свойства. Свойства меры Лебега.
3. Существование неизмеримых множеств.
4. Измеримые функции и их свойства. Арифметические операции над измеримыми функциями. Измеримость функции, непрерывной почти всюду.
5. Теорема Лузина.
6. Сходимость по мере и сходимость почти всюду.
7. Теорема Рисса.
8. Теорема Егорова.
9. Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции на множестве конечной меры и его свойства.
10. Интеграл Лебега от неограниченной функции.
11. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
12. Абсолютная непрерывность и счетная аддитивность интеграла Лебега.
13. Неравенство Чебышева.
14. Теорема Лебега о мажорированной сходимости.
15. Теоремы Б. Леви и Фату.
16. Связь между различными видами сходимости.
17. Произведение мер, теорема Фубини.
18. Меры Радона. Дифференцирование мер Радона.
19. Максимальная функция и ее свойства.
20. Дифференцирование интегралов в R^n.
21. Точки Лебега локально суммируемой функции. Теорема о множестве точек Лебега.
22. Аппроксимативная непрерывность.
23. Мера Хаусдорфа. Определение и элементарные свойства.
24. Размерность Хаусдорфа. Изопериметрическое неравенство. Плотности. Мера Хаусдорфа и элементарные свойства функций.
25. Формулы площади и коплощади.
26. Липшицевы функции и теорема Радемахера.
27. Функции ограниченной вариации и их свойства.
28. Интеграл Стилтьеса и интеграл Лебега-Стилтьеса.
29. Абсолютно непрерывные функции и их свойства.
30. Связь пространства абсолютно непрерывных функций и пространства Соболева функций одной переменной.
31. Пространства $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$. Неравенства Гельдера и Минковского.
32. Обобщенное неравенство Минковского.
33. Обратное неравенство Минковского.

34. Неравенство Харди.

35. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества простых функций, множества непрерывных и непрерывных финитных функций.

36. Свойство непрерывности функций из $L_p(E)$ относительно сдвига.

37. Пространство $L_\infty(E)$ и его свойства.

38. Взаимосвязь пространств Лебега с конечным и бесконечным показателями суммируемости.

39. Усреднение функций из $L_p(E)$. Средние функции и их свойства.

40. Плотность в $L_p(E)$ $(1 \le p < \infty)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций.

41. Критерий Рисса предкомпактности в $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$.

42. Определение обобщенной производной и ее свойства.

43. Пространства Соболева W_p^l и их свойства: полнота, рефлексивность, сепарабельность.

44. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в пространствах Соболева.

45. Пространства $\overset{0}{W}{}_p^l$ и их свойства.

46, Продолжение функций из пространств Соболева.

47. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега.

48. Пространства Гельдера. Неравенство Морри.

49. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.

50. Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций.

51. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

52. Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

53. Дифференцируемость функций из пространств Соболева на почти всех прямых.

54. N-функции, дополнительные N-функции. Пространства Орлича. Аналог неравенства Гельдера. Норма Люксембурга.

55. Связь пространств Орлича с пространствами Лебега и Соболева.

56. Пространство основных функций.

57. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций.

58. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Регуляризация степенных особенностей.

59. Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.
60. Свертка обобщенных функций.
61. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.; Лань, 2008.
5. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.
6. Бакушинский А.Б., Худак Ю.И. Элементы функционального анализа. М.: ACADEMIA, 2011.
7. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.
8. Треногин В.А. Функциональный анализ. В 2-х т. М.: Академия, 2012.
9. Салофф-Кост Л. Аспекты неравенств Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2008.
10. Эбей Э. Нелинейный анализ на многообразиях. Пространства и неравенства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2008.

Дополнительная литература:

11. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Физматлит, 1996.
12. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М. Наука. 1988.
13. Эванс Л.К., Гариэпи Р.Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. – Новосибирск. Изд –во “Научная книга”, 2002.
14. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

ПРОГРАММУ СОСТАВИЛИ:

Зав. кафедрой ММ,