НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
_________________ Драгунов В.К.
«22» декабря 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Методы функционального анализа в математической физике»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.3.2

Всего: 72 часа

Семестр 5 , в том числе
6 часов – контактная работа,
48 часов – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866 , и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по современным методам функционального анализа в математической физике.

Задачами дисциплины являются: изучение теории пространств Соболева, освоение теории обобщенных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, теории обобщенных решений начально-краевых задач для параболических уравнений второго порядка.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

– готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);

– способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);

– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5);

– способность разрабатывать новые методы исследования и решения дифференциальных уравнений, применять для этого методы теории функций и функционального анализа (ПК-6).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основные свойства пространств Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ (ОПК-1);

– основы теории обобщенных решений эллиптических краевых задач (ПК-1);

– основы теории обобщенных решений параболических начально-краевых задач (ПК-2);

уметь:

– формулировать обобщенные постановки краевых и начально-краевых задач (УК-1);

– применять для исследования разрешимости краевых задач метод Галеркина (ПК-5);

– применять для исследования разрешимости начально-краевых задач метод Фаэдо-Галеркина (ПК-6);

– применять для исследования краевых и начально-краевых задач методы функционального анализа (ОПК-2);

владеть:

– методами исследования краевых и начально-краевых задач с применением методов функционального анализа (УК-2);

– основными результатами теории обобщенных решений дифференциальных уравнений (УК-3).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Пространства Соболева

Определение обобщенной производной и ее свойства. Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ и их свойства. Гильбертовость $H_0^1(\Omega)$. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Теорема Реллиха. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в простран-ствах Соболева. Продолжение функций из пространств Соболева.

Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега. Пространства Гельдера. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.

Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

Эллиптические уравнения. Обобщенные решения из $H^1(\Omega)$

Задача Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Классическая и обобщенная постановки. Связь между ними.

Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Теорема Реллиха. Гильбертовость $H_0^1(\Omega)$. Понятие о теоремах вложения. Первое основное неравенство для эллиптических операторов.

Теорема существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Редукция обобщенной постановки задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения к операторному уравнению Фредгольма в гильбертовом пространстве. Вспомогательная теорема существования и единственности для несамосопряженного эллиптического уравнения. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

Обобщенная постановка задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Простейшие свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

Вариационные свойства и минимаксный принцип для собственных значений.

Краевая задача для эллиптического уравнения с неоднородным условием Дирихле. Вариационная постановка неоднородной задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Связь между обобщенной и вариационной постановками. Вариационный метод доказательства теоремы существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$.

Эллиптические уравнения. Другие обобщенные решения и методы исследования

Обобщенное решение из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Второе основное неравенство для эллиптических операторов; преобразование и оценки слагаемых по области и по ее границе. Первая краевая задача для эллиптического уравнения в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Априорная оценка решения. Применение метода продолжения по параметру. Теорема существования и единственности решения из $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле в пространстве $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Свойство локальной зависимости гладкости решения эллиптической краевой задачи от гладкости данных. Теорема Лакса-

Мильграма-Вишика и метод Галеркина. Обобщенные решения из $L_2(\Omega)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения, их существование и единственность.

Параболические уравнения. Обобщенные решения из энергетического класса

Начально-краевая задача для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка. Классическое решение. Обобщенное решения из $V_2(Q_T)$. Леммы Гронуолла и Гронуолла-Беллмана. Теорема существования решения из $V_2(Q_T)$ и метод Фаэдо-Галеркина: построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая оценка, предельный переход. Дробная гладкость по t обобщенного решения из $V_2(Q_T)$. Оператор Div и запись параболического уравнения с его использованием. Теорема единственности решения из $V_2(Q_T)$.

Параболические уравнения. Другие обобщенные решения и методы исследования

Обобщенные решения из $W(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность. Обобщенные решения из $H_2^{2,1}(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность. Свойство локальной зависимости гладкости решения параболической начально-краевой задачи от гладкости данных. Сопряженный параболический оператор и начально-краевая задача.

Обобщенные решения из $L_2(Q_T)$, их существование и единственность. Метод Фурье для параболического уравнения с не зависящими от t коэффициентами. Доказательство энергетической оценки методом Фурье (включая вывод обобщенного неравенства Минковского). Использование теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве: построение замыкания параболического оператора, замкнутость его образа, анализ ортогонального дополнения.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

5 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Определение обобщенной производной и ее свойства.
2. Пространства Соболева $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ и их свойства.
3. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса. Теорема Реллиха.

4. Усреднение функций из пространств Соболева. Аппроксимация гладкими функциями. Плотность гладких функций в пространствах Соболева.

5. Продолжение функций из пространств Соболева.

6. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Лебега.

7. Пространства Гельдера. Теорема вложения пространства Соболева в пространство Гельдера.

8. Компактность вложения пространства Соболева в пространство Лебега и в пространство непрерывных функций.

9. Эквивалентность норм в пространстве Соболева. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса.

10. Следы функций из пространств Соболева. Теоремы о следах.

11. Задача Дирихле для общего линейного эллиптического уравнения 2-го порядка. Классическая и обобщенная постановки. Связь между ними.

12. Первое основное неравенство для эллиптических операторов.

13. Теорема существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения.

14. Разрешимость по Фредгольму в $H_0^1(\Omega)$ задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения.

15. Обобщенная постановка задачи на собственные значения для самосопряженного эллиптического оператора в $H_0^1(\Omega)$. Простейшие свойства собственных значений, теорема разложения в ряд по собственным функциям.

16. Вариационные свойства и минимаксный принцип для собственных значений.

17. Вариационная постановка неоднородной задачи Дирихле для самосопряженного эллиптического уравнения. Связь между обобщенной и вариационной постановками.

18. Вариационный метод доказательства теоремы существования и единственности обобщенного решения из $H_0^1(\Omega)$.

19. Обобщенное решение из $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$. Второе основное неравенство для эллиптических операторов; преобразование и оценки слагаемых по области и по ее границе.

20. Первая краевая задача для эллиптического уравнения в пространстве $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$. Априорная оценка решения.

21. Теорема существования и единственности решения из $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$.

22. Фредгольмова разрешимость задачи Дирихле в пространстве $H^2(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega)$.

23. Свойство локальной зависимости гладкости решения эллиптической краевой задачи от гладкости данных.

24. Теорема Лакса-Мильграма-Вишика и метод Галеркина.

25. Обобщенные решения из $L_2(\Omega)$ задачи Дирихле для эллиптического уравнения, их существование и единственность.

26. Начально-краевая задача для общего линейного параболического уравнения 2-го порядка. Классическое решение. Обобщенное решения из $V_2(Q_T)$.

27. Леммы Гронуолла и Гронуолла-Беллмана.

28. Теорема существования решения из $V_2(Q_T)$ и метод Фаэдо-Галеркина: построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая оценка, предельный переход.

29. Дробная гладкость по t обобщенного решения из $V_2(Q_T)$.

30. Теорема единственности решения из $V_2(Q_T)$.

31. Обобщенные решения из $W(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность.

32. Обобщенные решения из $H_2^{2,1}(Q_T)$, их априорная оценка, существование и единственность.

33. Свойство локальной зависимости гладкости решения параболической начально-краевой задачи от гладкости данных.

34. Сопряженный параболический оператор и начально-краевая задача.

35. Обобщенные решения из $L_2(Q_T)$, их существование и единственность.

36. Метод Фурье для параболического уравнения с не зависящими от t коэффициентами. Доказательство энергетической оценки методом Фурье (включая вывод обобщенного неравенства Минковского).

37. Использование теории неограниченных операторов в гильбертовом пространстве: построение замыкания параболического оператора, замкнутость его образа, анализ ортогонального дополнения.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.

2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

3. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 2006.

4. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.

5. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

6. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

7. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 1. М.: Академия, 2012.

9. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 2. М.: Академия, 2012.

10. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ, 2014.

Дополнительная литература:

11. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.

13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Эдиториал УРСС, 2002.