НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе

_________________________ Драгунов В.К.

«_22_» _декабря_ 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление <u>01.06.01 – «Математика и механика»</u>

Направленность (специальность) <u>01.01.07 – «Вычислительная математика»</u>

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Дополнительные главы уравнений с частными производными»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.4.1

Всего: 108 часов

Семестр 7 , в том числе 6 часов – контактная работа,
84 часа – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866, и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по специальным разделам современной теории уравнений с частными производными.

Задачами дисциплины являются: изучение теории обобщенных функций, освоение ряда результатов нелинейного функционального анализа, теории функций со значениями в банаховом пространстве, теории обобщенных решений краевых и начально-краевых задач, а также освоение основных положений теории потенциала.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях (УК-1).

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);

– способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);

– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5);

– способность разрабатывать новые методы исследования и решения дифференциальных уравнений, применять для этого методы теории функций и функционального анализа (ПК-6).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основные положения теории обобщенных функций (ОПК-1);

– теоремы о неподвижной точке, применяемые в теории дифференциальных уравнений (ПК-1);

– вариационный метод и метод монотонных операторов (ПК-1);

– основные факты теории абстрактных функций (ПК-2);

– результаты теории обобщенных решений гиперболических уравнений (ПК-2);

– классические результаты теории потенциала (ПК-1);

уметь:

– использовать теорию обобщенных функций для исследования дифференциальных уравнений (УК-1);

– применять теоремы о неподвижной точке для исследования разрешимости краевых и начально-краевых задач (ПК-5);

– применять вариационный метод и метод монотонных операторов для исследования разрешимости краевых задач (ПК-6);

– применять результаты теории абстрактных функций (ПК-5);

– использовать методы функционального анализа для исследования гиперболических уравнений (ОПК-2);

– применять теорию потенциала для решения краевых и начально-краевых задач (ПК-2);

владеть:

– методами современной теории дифференциальных уравнений с частными производными (УК-2).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Обобщенные функции

Пространство основных функций. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Дифференцирование обобщенных функций. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции. Регуляризация степенных особенностей.

Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций. Свертка обобщенных функций.

Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.

Решение простейших дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.

Дополнительные сведения из нелинейного функционального анализа

Принципы неподвижной точки и их применение к доказательству разрешимости краевых задач. Принцип сжимающих отображений и обобщенный принцип сжимающих отображений. Теорема Брауэра. Принцип Шаудера. Теорема Лере-Шаудера. Теорема Лакса-Мильграма.

Условие Каратеодори. Оператор Немыцкого и его свойства.

Вариационный метод и метод монотонных операторов

Примеры краевых задач, приводящих к операторным уравнениям вида A(u)=f. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов. Дифференцируемость по Гато и Фреше. Необходимые и достаточные условия существования точки минимума. Слабо полунепрерывные снизу функционалы и их минимизация. Потенциальные операторы. Критерии потенциальности. Применение вариационного метода для доказательства разрешимости краевых задач.

Монотонные операторы. Критерии монотонности. Свойства монотонных операторов. Монотонные потенциальные операторы. Разрешимость уравнения A(u)=f с монотонным и потенциальным оператором. Лемма "об остром угле".

Основная теорема теории монотонных операторов.

Функции со значениями в банаховых пространствах

Обобщенные функции со значениями в банаховом пространстве. Регулярные функции со значениями в банаховом пространстве. Сильно измеримые и слабо измеримые функции со значениями в банаховом пространстве.

Интеграл Бохнера и его свойства.

Дифференцируемость и слабая дифференцируемость функций со значениями в банаховом пространстве.

Пространство $\mathrm{W}_{p_0,p_1}(\mathrm{a},\mathrm{b};\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_1)$ и его свойства. Вложение пространства $\mathrm{W}_{p_0,p_1}(\mathrm{a},\mathrm{b};\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_1)$ в $\mathrm{C}([\mathrm{a},\mathrm{b}];\mathrm{X}_1)$, компактность вложения. Теорема Обэна о компактности вложения $\mathrm{W}_{p_0,p_1}(\mathrm{a},\mathrm{b};\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_1)$ в $\mathrm{L}_p(\mathrm{a},\mathrm{b};\mathrm{X})$. Вложение пространства $W_{p_0,p_1}(a,b;V,V')$ в $C([a,b];H)$.

Исследование разрешимости нестационарных нелинейных задач

Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.

Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о глобальной разрешимости.

Задача на собственные значения для оператора Лапласа и ее свойства.

Использование метода компактности для доказательства разрешимости нелинейной начально-краевой задачи для параболического уравнения.

Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.

Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения $u' + A(u) = f$ с монотонным оператором A.

Гиперболические уравнения 2-го порядка. Обобщенные решения

Обобщенные решения из энергетического класса начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка с не зависящими от t коэффициентами и самосопряженной эллиптической частью. Теорема существования (метод Фаэдо-Галеркина): построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая, предельный переход. Теорема единственности обобщенного решения из энергетического класса. Сильные обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность. Слабые обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность. Метод Фурье для гиперболической начально-краевой задачи.

Теория потенциала

Ньютонов потенциал и его свойства. Уравнение Пуассона и ньютонов потенциал.

Объемный параболический потенциал и его свойства. Потенциал Пуассона и его свойства. Волновые потенциалы и их свойства. Решение задачи Коши для параболического и гиперболического уравнений методом потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоя и их свойства. Формула скачка для производной потенциала простого слоя. Формула скачка для потенциала двойного слоя. Решение краевых задач для параболических и эллиптических уравнений методом потенциалов.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

7 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Пространство основных функций.
2. Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями.
3. Дифференцирование обобщенных функций.
4. Локальные свойства обобщенных функций. Носитель обобщенной функции.
5. Обобщенные функции многих переменных. Прямое произведение обобщенных функций.
6. Свертка обобщенных функций.
7. Обобщенные функции медленного роста и преобразование Фурье.
8. Решение простейших дифференциальных уравнений в обобщенных функциях.
9. Принцип сжимающих отображений и обобщенный принцип сжимающих отображений.
10. Теорема Брауэра. Принцип Шаудера.
11. Теорема Лере-Шаудера.
12. Теорема Лакса-Мильграма.
13. Условие Каратеодори. Оператор Немыцкого и его свойства.
14. Примеры краевых задач, приводящих к операторным уравнениям вида $A(u)=f$.
15. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов. Дифференцируемость по Гато и Фреше.
16. Необходимые и достаточные условия существования точки минимума.
17. Слабо полунепрерывные снизу функционалы и их минимизация.
18. Потенциальные операторы. Критерии потенциальности.
19. Применение вариационного метода для доказательства разрешимости краевых задач.
20. Монотонные операторы. Критерии монотонности. Свойства монотонных операторов.

21. Монотонные потенциальные операторы. Разрешимость уравнения A(u)=f с монотонным и потенциальным оператором.

22. Лемма "об остром угле".

23. Основная теорема теории монотонных операторов.

24. Обобщенные функции со значениями в банаховом пространстве.

25. Сильно измеримые и слабо измеримые функции со значениями в банаховом пространстве.

26. Интеграл Бохнера и его свойства.

27. Дифференцируемость и слабая дифференцируемость функций со значениями в банаховом пространстве.

28. Пространство $W_{p_0,p_1}(a,b;X_0,X_1)$ и его свойства. Вложение пространства $W_{p_0,p_1}(a,b;X_0,X_1)$ в $C([a,b];X_1)$, компактность вложения.

29. Теорема Обэна о компактности вложения $W_{p_0,p_1}(a,b;X_0,X_1)$ в $L_p(a,b;X)$.

30. Вложение пространства $W_{p_0,p_1}(a,b;V,V')$ в $C([a,b];H)$.

31. Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.

32. Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о глобальной разрешимости.

33. Задача на собственные значения для оператора Лапласа и ее свойства.

34. Использование метода компактности для доказательства разрешимости нелинейной начально-краевой задачи для параболического уравнения.

35. Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.

36. Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения u' + A(u) = f с монотонным оператором A.

37. Обобщенные решения из энергетического класса начально-краевой задачи для гиперболического уравнения 2-го порядка с не зависящими от t коэффициентами и самосопряженной эллиптической частью.

38. Теорема существования (метод Фаэдо-Галеркина): построение приближенных решений, их существование и единственность, равномерная энергетическая, предельный переход.

39. Теорема единственности обобщенного решения из энергетического класса.

40. Сильные обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность.

41. Слабые обобщенные решения гиперболической задачи, их априорная оценка, существование и единственность.

42. Метод Фурье для гиперболической начально-краевой задачи.

43. Ньютонов потенциал, его свойства и связь с уравнением Пуассона.

44. Использование метода потенциалов для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

45. Использование метода потенциалов для решения задачи Коши для волнового уравнения.

46. Теоремы о скачке для потенциалов простого и двойного слоя.

47. Использование метода потенциалов для решения краевых задач для эллиптического и параболического уравнений.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

2. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 2006.

3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: Физматлит, 2009.

4. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

5. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

6. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

7. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 1. М.: Академия, 2012.

8. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 2. М.: Академия, 2012.

9. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ. 2014.

Дополнительная литература:

10. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

11. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Эдиториал УРСС, 2002.

12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2-е изд. М.: Наука. 1983.

13. Ладыженская О.А. Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

14. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004.