НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной работе
_____ Драгунов В.К.
«__» декабря 2017 г.

Программа аспирантуры

Направление 01.06.01 – «Математика и механика»

Направленность (специальность) 01.01.07 – «Вычислительная математика»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

дисциплины по выбору

«Методы решения нелинейных краевых задач»

Индекс дисциплины по учебному плану: Б1.В.ДВ.4.2

Всего: 108 часов

Семестр 7 , в том числе 6 часов – контактная работа,
84 часа – самостоятельная работа,
18 часов – контроль

Программа составлена на основе федерального государственного образовательного стандарта высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика, утвержденного приказом Минобрнауки России от 30 июля 2014 г. № 866 , и паспорта специальности, указанной в номенклатуре специальностей научных работников, 01.01.07 «Вычислительная математика», утвержденной приказом Минобрнауки России от 25 февраля 2009 г. № 59.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины является получение обучающимися базовых знаний по современной теории методов решения нелинейных краевых задач.

Задачами дисциплины являются: изучение специальных разделов нелинейного функционального анализа, теории функции со значениями в банаховых пространствах, освоение основных методов исследования разрешимости операторных уравнений, стационарных и нестационарных нелинейных краевых задач.

В процессе освоения дисциплины **формируются следующие компетенции**:

– способность проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки (УК-2);

– готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач (УК-3);

– способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1);

– готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования (ОПК-2);

– способность формулировать цели и задачи научных исследований в области дифференциальных уравнений и вычислительной математики (ПК-1);

– способность применять современные методы построения и исследования математических моделей (ПК-2);

– способность применять методы вычислительной математики и разрабатывать алгоритмы численной реализации математических моделей (ПК-3);

– способность анализировать результаты теоретических исследований и готовить научные публикации (ПК-5).

ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБРАЗОВАНИЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать:

– основные принципы неподвижной точки (ПК-1);

– основы современной теории вариационного исчисления (ОПК-1);

– основные результаты теории метода монотонных операторов (ПК-1);

– теорию функций со значениями в банаховых пространствах (ПК-1);

– подходы к исследованию разрешимости нелинейных операторных и операторных дифференциальных уравнений (УК-2);

уметь:

– формулировать краевые и начально-краевые задачи как операторные и операторные дифференциальные уравнения (ОПК-2);

– применять принципы неподвижной точки для исследования разрешимости краевых задач (ПК-2);

– применять результаты вариационного исчисления для исследования разрешимости краевых задач (ПК-2);

– применять теорию метода монотонных операторов для исследования разрешимости краевых задач (ПК-2);

– применять метод компактности к исследованию разрешимости нелинейных операторных и операторных дифференциальных уравнений (УК-3);

владеть:

– основами современной теории исследования разрешимости краевых и начально-краевых задач (ПК-3);

– методами доказательства однозначной разрешимости операторных и операторных дифференциальных уравнений (ПК-5).

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ ДИСЦИПЛИНЫ

Дополнительные сведения из нелинейного функционального анализа

Принципы неподвижной точки и их применение к доказательству разрешимости краевых задач. Принцип сжимающих отображений и обобщенный принцип сжимающих отображений. Теорема Брауэра. Принцип Шаудера. Теорема Лере-Шаудера. Теорема Лакса-Мильграма.

Условие Каратеодори. Оператор Немыцкого и его свойства.

Вариационный метод

Примеры краевых задач, приводящих к операторным уравнениям вида $A(u)=f$. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов. Дифференцируемость по Гато и Фреше. Необходимые и достаточные условия существования

точки минимума. Слабо полунепрерывные снизу функционалы и их минимизация. Потенциальные операторы. Критерии потенциальности.

Применение вариационного метода для доказательства разрешимости краевых задач. Задача о минимальной поверхности.

Уравнения с монотонными операторами

Монотонные операторы. Критерии монотонности. Свойства монотонных операторов. Монотонные потенциальные операторы. Разрешимость уравнения A(u)=f с монотонным и потенциальным оператором. Лемма "об остром угле".

Основная теорема теории монотонных операторов. Теоремы о разрешимости уравнений с операторами, обладающими свойством M и уравнений с операторами "вариационного исчисления". Отображение двойственности и его свойства.

Функции со значениями в банаховых пространствах

Обобщенные функции со значениями в банаховом пространстве. Регулярные функции со значениями в банаховом пространстве. Сильно измеримые и слабо измеримые функции со значениями в банаховом пространстве.

Интеграл Бохнера и его свойства.

Дифференцируемость и слабая дифференцируемость функций со значениями в банаховом пространстве.

Пространство $W = W_{p_0,p_1}(a,b;X_0,X_1)$ и его свойства. Вложение пространства W в $C([a,b];X_1)$, компактность вложения. Теорема Обэна о компактности вложения W в $L_p(a,b;X)$. Теорема Дубинского о компактности.

Вложение пространства $W_{p_0,p_1}(a,b;V,V')$ в $C([a,b];H)$.

Исследование разрешимости нестационарных нелинейных задач

Начально-краевые задачи как операторные дифференциальные уравнения.

Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о глобальной разрешимости.

Задача на собственные значения для оператора Лапласа и ее свойства.

Использование метода компактности для доказательства разрешимости нелинейной начально-краевой задачи для параболического уравнения.

Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.

Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения $u' + A(u) = f$ с монотонным оператором A.

Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения.

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБРАЗОВАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины:

7 семестр – дифференцированный зачет.

Вопросы для самоконтроля и проведения зачета

1. Принцип сжимающих отображений и обобщенный принцип сжимающих отображений.
2. Принцип Шаудера.
3. Теорема Лере-Шаудера.
4. Теорема Лакса-Мильграма.
5. Условие Каратеодори. Оператор Немыцкого и его свойства.
6. Сильная и слабая дифференцируемость функционалов. Дифференцируемость по Гато и Фреше.
7. Необходимые и достаточные условия существования точки минимума.
8. Слабо полунепрерывные снизу функционалы и их минимизация.
9. Потенциальные операторы. Критерии потенциальности.
10. Монотонные операторы. Критерии монотонности.
11. Свойства монотонных операторов. Монотонные потенциальные операторы.
12. Разрешимость уравнения $A(u)=f$ с монотонным и потенциальным оператором.
13. Лемма "об остром угле".
14. Основная теорема теории монотонных операторов.

15. Теоремы о разрешимости уравнений с операторами, обладающими свойством M и уравнений с операторами "вариационного исчисления".

16. Отображение двойственности и его свойства.

17. Обобщенные функции со значениями в банаховом пространстве.

18. Сильно измеримые и слабо измеримые функции со значениями в банаховом пространстве.

19. Интеграл Бохнера и его свойства.

20. Дифференцируемость и слабая дифференцируемость функций со значениями в банаховом пространстве.

21. Пространство $W = W_{p_0,p_1}(a,b;X_0,X_1)$ и его свойства.

22. Вложение пространства W в $C([a,b];X_1)$, компактность вложения.

23. Теорема Обэна о компактности вложения W в $L_p(a,b;X)$.

24. Вложение пространства $W_{p_0,p_1}(a,b;V,V')$ в $C([a,b];H)$.

25. Теорема Каратеодори о локальной разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о глобальной разрешимости.

26. Задача на собственные значения для оператора Лапласа и ее свойства.

27. Использование метода компактности для доказательства разрешимости нелинейной начально-краевой задачи для параболического уравнения.

28. Использование метода монотонности для доказательства разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения.

29. Существование и единственность решения начальной задачи для эволюционного операторного уравнения $u' + A(u) = f$ с монотонным оператором A.

30. Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения.

Критерии оценки за освоение дисциплины определены в Инструктивном письме И-23 от 14 мая 2012 г.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Адамс Р.А., Фурнье Дж. Ф. Пространства Соболева. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2009.

2. Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань, Изд-во КГУ. 2012.

3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.

4. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2008.

5. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 1. М.: Академия, 2012.

6. Треногин В.А. Функциональный анализ. Т. 2. М.: Академия, 2012.

7. Треногин В.А. Уравнения в частных производных. М. Физматлит. 2013.

8. Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики. Казань: Изд-во КГУ, 2014.

Дополнительная литература:

9. Эванс Л.К. Уравнения с частными производными. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская. 2003.

10. Гаевский Х, Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

11. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972.

12. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Изд. 3-е. М.: УРСС, 2002.