МЕЖДУНАРОДНАЯ МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТОЭ

2026

Группа II

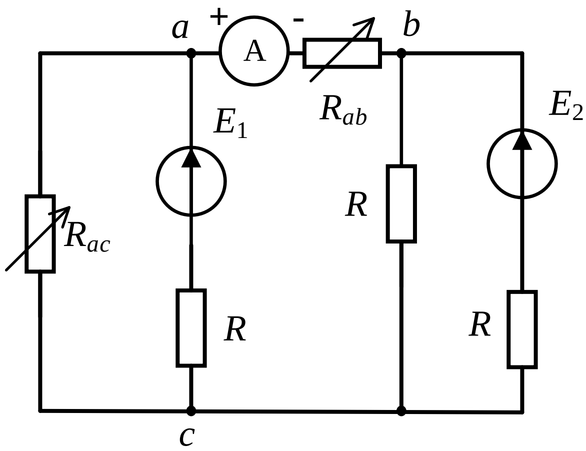
Задача 1 (10 баллов)

В цепи постоянного тока сопротивления ветвей R_{ab} и R_{ac} могут меняться. Были проведены измерения в следующих режимах:

1) если $R_{ac} = R$, то при изменении R_{ab} показание амперметра не меняется;

2) если $R_{ab} = R$ и $R_{ac} \to \infty$, показание амперметра равно 1,2 А.

Найти показание амперметра, если $R_{ac} = 0$ и $R_{ab} = R$.



Решение. Для первого режима при $R_{ac} = R$ ток амперметра может быть определен методом эквивалентного генератора:

$$I = \frac{U_{\text{хх}ab}}{R_{ab} + R_{\text{вх}}},$$

где $U_{\text{хх}ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{E_1}{2R}R - \frac{E_2}{2R}R$.

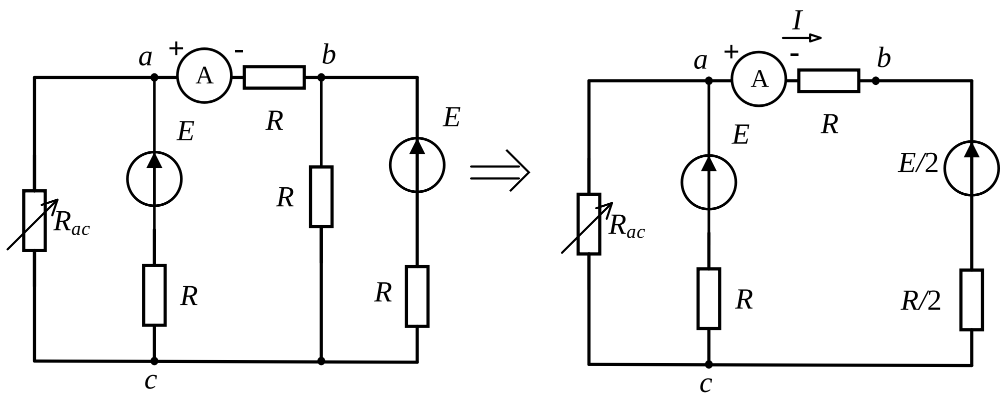
Ток не меняется при изменении R_{ab}, только если $U_{\text{хх}ab} = 0$. Следовательно, $E_1 = E_2 = E$. **(4 б)**

Для второго режима при $R_{ab} = R$ расчетная схема (см. рисунок ниже) может быть упрощена. При $R_{ac} \to \infty$ ток амперметра:

$$I = \frac{E - \frac{E}{2}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{E}{5R} = 1{,}2 \text{ А}, \ \frac{E}{R} = 6. \quad \textbf{(4 б)}$$

При $R_{ac} = 0$:

$$I = \frac{-\frac{E}{2}}{R + \frac{R}{2}} = -\frac{E}{3R} = -2 \text{ А}. \quad \textbf{(2 б)}$$



Расчетные схемы к задаче 1

Ответ: –2 А

Задача 2 (15 баллов)

На рис. 1 и рис. 2 приведены векторные диаграммы (ВД) для некоторой цепи при замкнутом и разомкнутом ключе соответственно. Синим цветом обозначены векторы напряжений (комплексные действующие значения напряжения), красным – векторы тока (комплексные действующие значения тока) источника. Токи других элементов не изображены.

Электрическая цепь состоит из одного индуктивного, одного емкостного, двух резистивных элементов и источника напряжения.

Предложите один вариант схемы такой цепи, определите сопротивления ее элементов и комплексную ЭДС источника.

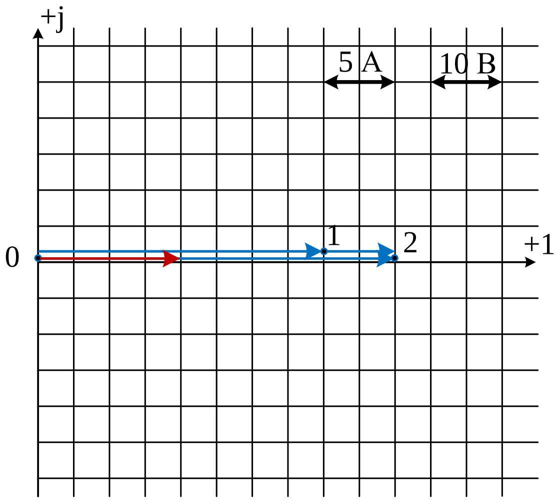


Рисунок 1

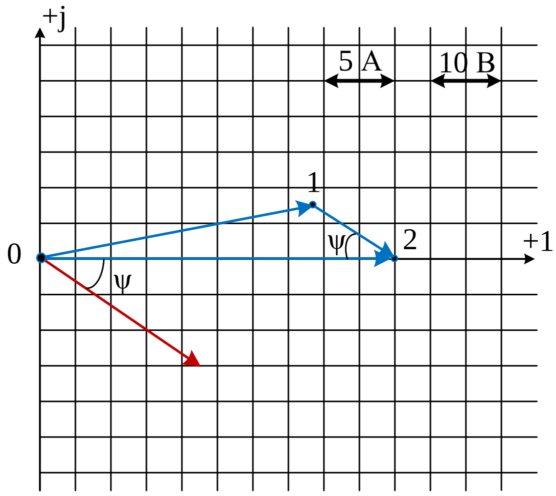


Рисунок 2

Решение

Возможный вариант топологии цепи представлен на рисунке **(10 б, не требует обоснования)**

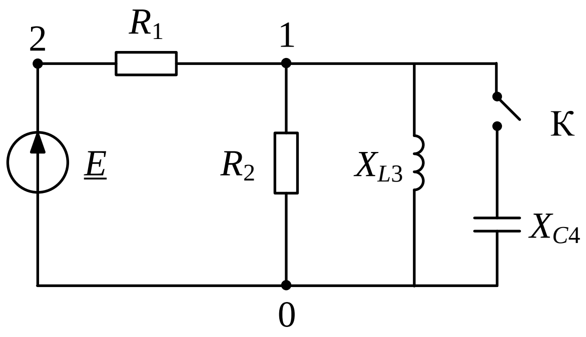


Рисунок 3

Из рис. 1 и рис. 3 следует, что при замкнутом ключе в цепи имеет место резонанс. Тогда $X_{L3} = X_{C4}$, а токи резистивных элементов равны друг другу. Сопротивления резисторов определяются в соответствии с векторной диаграммой на рис. 1:

$$R_1 = \frac{10}{10} = 1\text{ Ом},\ \ R_2 = \frac{40}{10} = 4\text{ Ом}. \qquad \textbf{(2 б)}$$

В соответствии с векторными диаграммами ЭДС источника составляет $\underline{E} = \underline{U}_{20} = 50\angle 0°$ В. **(1 б)**

При разомкнутом ключе ток емкостного элемента равен нулю. По векторной диаграмме на рис. 2 определяются комплексы тока источника и напряжения на катушке:

$$\underline{I} = 13{,}9\angle -33{,}7°\text{ А},\ \ \underline{U}_{10} = 39{,}2\angle 11{,}3°\text{ В}.$$

Сопротивление катушки определяется из выражения:

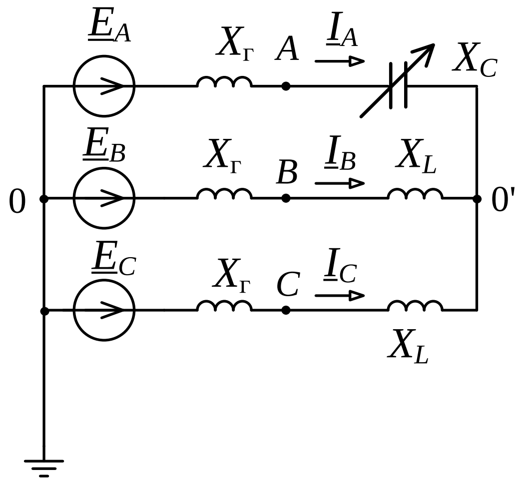
$$\frac{R_2 \mathrm{j}X_{L3}}{R_2 + \mathrm{j}X_{L3}} = \frac{4\cdot \mathrm{j}X_{L3}}{4 + \mathrm{j}X_{L3}} = \frac{\underline{U}_{10}}{\underline{I}} = 2{,}82\angle 45° \approx \frac{4}{\sqrt{2}}\angle 45° \to X_{L3} = 4\text{ Ом}. \qquad \textbf{(1 б)}$$

Из условия резонанса токов сопротивления конденсатора и катушки были равны $X_{C4} = X_{L3} = 4$ Ом. **(1 б)**

Ответ: $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $X_{L3} = X_{C4} = 4$ Ом.

Задача 3 (15 баллов)

На рис. 9 представлена трехфазная цепь с несимметричным приемником. Источник – симметричный прямой последовательности. $E_ф = 220$ В, $X_г = 10$ Ом. В фазах B и C несимметричного приемника индуктивная нагрузка $X_L = 40$ Ом, в фазе A – емкостная нагрузка, $X_C = \mathrm{var}$. При каком значении X_C линейные токи нельзя определить (задача не имеет решения)?



Решение. Определим ток в фазе A с изменяющейся нагрузкой методом эквивалентного генератора. При $X_C \to \infty$ напряжение смещения нейтрали $\underline{U}_{0'0} = -110$ В, напряжение $\underline{U}_{хх} = \underline{U}_{A0'}\big|_{X_C \to \infty} = 330$ В. Входное сопротивление $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{вхA0'} = \mathrm{j}35$ Ом **(10 б)**. Линейный (фазный ток) в фазе A $\underline{I}_A = \dfrac{\underline{U}_{хх}}{\underline{Z}_{вх} - \mathrm{j}X_C} = \dfrac{330}{\mathrm{j}35 - \mathrm{j}X_C}$. **(5 б)** При $X_C = 35$ Ом задача не имеет решения.

Ответ. $X_C = 35$ Ом

Указания к оцениванию задания:

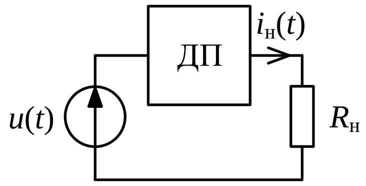
– 15 баллов выставляется за корректный ответ;

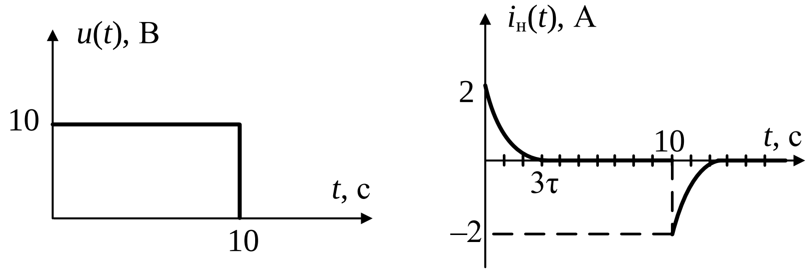
– (5-8) + 5 = 10-13 баллов выставляется в том случае, если ход решения задачи верный, но в расчете параметров ЭГ имеются ошибки;

– 0 баллов выставляется, если ответ $X_C = X_г$ или $X_C \to \infty$ получен из условия равенства нулю напряжения смещения нейтрали.

Задача 4 (15 баллов)

На вход цепи без начального запаса энергии подается прямоугольный импульс. Пассивный двухполюсник (ДП) состоит из одного резистивного и одного реактивного элемента.
График мгновенного значения тока резистора с сопротивлением $R_н = 1$ Ом представлен ниже.
Определить схему соединения элементов ДП и найти их параметры.
Считать, что практическое время переходного процесса равно 3τ.





Решение (операторный метод, авторское решение)

1) В цепи отсутствует начальный запас энергии, т.е. начальные условия НУЛЕВЫЕ. **(1 б)**

2) Входная проводимость:

$$\boldsymbol{Y_{вх}(p) = \frac{I_{вх}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{I_н(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{1}{Z_{ДП} + R_н} = \frac{1}{Z_{ДП} + 1}}; \ (*) \qquad \textbf{(2 б)}$$

3) Изображение входного сигнала: $\boldsymbol{U_{вх}(p) = \frac{10}{p}(1 - e^{-10p})}$; **(2 б)**

2) Из графика тока (рис. б) следует, что постоянная времени **τ = 1с**, т.е. собственная частота цепи $\boldsymbol{p_1 = -1}$ **с$^{-1}$**, тогда:

Изображение реакции: $\boldsymbol{I_н(p) = \frac{2}{p+1}(1 - e^{-10p})}$ **(3 б)**

С учетом (*): $\boldsymbol{Y_{вх}(p) == \frac{I_н(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{0{,}2p}{p+1} = \frac{1}{Z_{ДП} + 1}}$ **(**)** **(1 б)**

3) из (**) =>

При $\boldsymbol{p = 0: Y_{вх}(0) = \frac{1}{Z_{ДП} + 1} = 0}$ => $\boldsymbol{Z}$ $_{ДП}$ **= ∞** => в ДП накопитель – это ***C***-элемент, так как при $\boldsymbol{p = 0:}$ $\boldsymbol{Z_L = 0}$ **(*L* ≡ КЗ), а $\boldsymbol{Z_C = \infty}$ (*C* ≡ ХХ).** **(2 б)**

4) из (2) =>

При $\boldsymbol{p=\infty}$: $\boldsymbol{Y_{вх}(\infty)=\frac{1}{Z_{ДП}+1}=0{,}2}$, но при $\boldsymbol{p=\infty}$ $\boldsymbol{Z_C}$ **= 0 (*C* ≡ КЗ)**. => $\boldsymbol{Z}$ $_{\text{дп}}$ **= 4** => в ДП потребитель – это сопротивление ***R* = 4** Ом, которое включено последовательно с накопителем, который эквивалентен **КЗ.**

Таким образом, делаем вывод, что **ДП -** последовательное соединение ***R***- элемента (потребителя) и ***C*** – элемента (накопителя). **(2 б)**

5) Характеристическое уравнение: $\boldsymbol{Z(p)=R+R_{Н}+1/pC=5+1/pC=0}$ =>

собственная частота цепи $\boldsymbol{p_1=-\frac{1}{5C}=-1}$ с$^{-1}$, откуда находим ***C* = 1/5** Ф. **(2 б)**

Ответ: 1) ДП: последовательное соединение ***R***- элемента и ***C***-элемента;
2) ***R* = 4** Ом; ***C*** = **1/5** Ф.

Решение (классический метод)

1) Отсутствию начального запаса энергии соответствуют нулевые независимые начальные условие (напряжение конденсатора или ток катушки ДП равны нулю; обоснование необязательно). **(1 б)**

2) Так как установившаяся составляющая тока для t < 10 с равна нулю, двухполюсник содержит последовательно соединенные емкостной и резистивный элементы. Другие варианты соединения не удовлетворяют условию задачи. **(6 б)**

3) Сопротивление резистивного элемента двухполюсника определяется по начальному условию для тока $i_{\text{н}}(0_+) = 2\text{ А}$:

$$i_{\text{н}}(0_+) = \frac{U_{\max}}{R_{\text{н}}+R} = \frac{10}{1+R} = 2 \to R = 4\text{ А}.$$ **(3 б)**

4) Постоянная времени определяется графически, $\tau = 1\,\text{с}$. Корень ХУ равен

$p = -1\,\text{с}^{-1}$ **(3 б)**

5) Емкость конденсатора определяется по характеристическому уравнению:

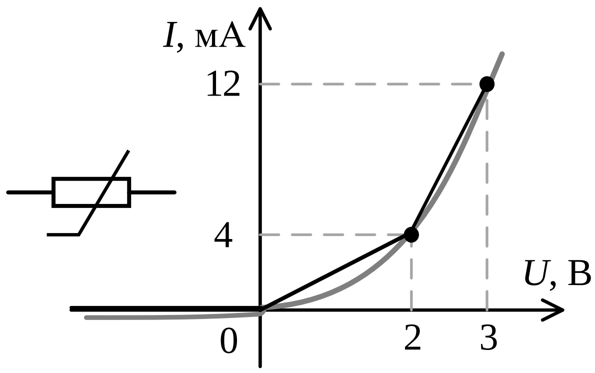
$$R + R_{\text{н}} + \frac{1}{pC} = 0 \to C = \frac{1}{p\left(R+R_{\text{н}}\right)} = \frac{1}{5}\,\Phi.$$ **(2 б)**

Ответ: схема ДП – *RC*-ветвь, $R = 4\,\text{Ом}$, $C = 1/5\,\Phi$.

Задача 5

Вариант 1 (15 баллов)

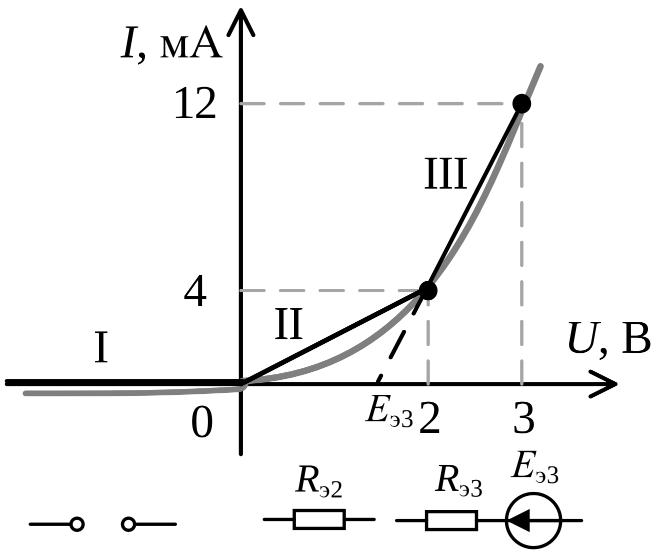
Вольт-амперная характеристика (ВАХ) нелинейного элемента (НЭ) задана графически. Предложить схемную реализацию диодного аппроксиматора – цепи, состоящей из идеальных диодов, линейных резисторов и источников (источника) напряжения. Определить параметры элементов предложенной цепи. Диодный аппроксиматор должен иметь ВАХ, совпадающую с кусочно-линейной аппроксимацией ВАХ реального НЭ на участке $0 \le I \le 12$ мА, $0 \le U \le 3$ В.



ВАХ НЭ и кусочно-линейная аппроксимация рабочего участка

Решение. Для участков линейности (рис. 8.2) рассчитаем параметры схем замещения:

- I участок ($U \le 0$, $I = 0$) – разрыв; **(1 б)**
- на II участке ($0 \le I \le 4$ мА, $0 \le U \le 2$ В) схема замещения НЭ – резистор $R_{э2} = \dfrac{\Delta U}{\Delta I} = 500$ Ом; **(1 б)**
- на III участке (4 мА $\le I \le 12$ мА, 2 В $\le U \le 3$ В) схема замещения НЭ состоит из последовательно соединенных резистора и источника ЭДС. **(2 б)**



Схемы замещения НЭ на участках линейности

Для резистивного элемента на III участке получим $R_{э3} = 125$ Ом, а для источника напряжения – $E_{э3} = 1,5$ В, удовлетворяющие уравнению прямой III участка **(1 б)**. Точки (2; 0,004) и (3; 0,012) должны быть на этой прямой. «Переключение» с одного участка линейности на другой будет осуществляться за счет открытия идеальных диодов.

Ниже представлена схемная реализация диодного аппроксиматора. **(5 б)**

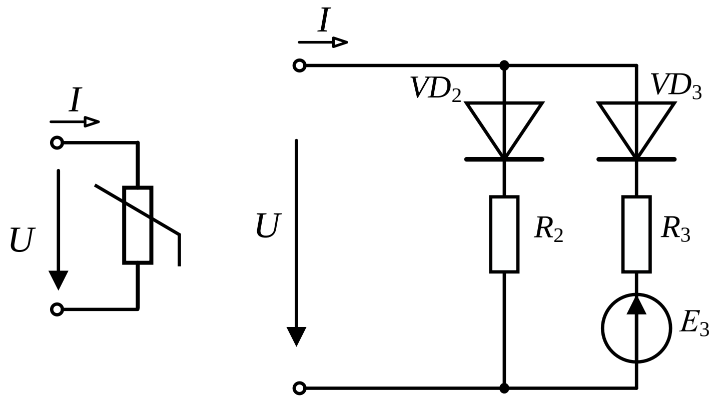


Рис. 8.3. Схема диодного аппроксиматора

При $U \le 0$ все диоды закрыты, $I = 0$.

На II участке $0 \le U \le 2$ В диод VD_2 открывается. На этом участке диод VD_3 должен быть закрыт, ток НЭ будет меняться в пределах $0 \le I \le 4$ мА если $R_2 = 500$ Ом. **(1 б)**

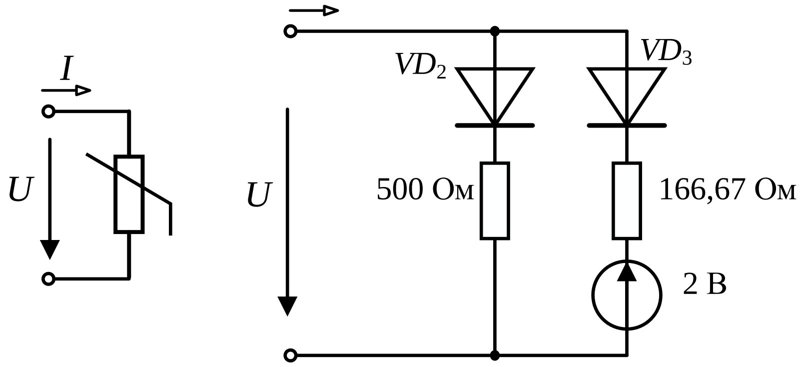
Диод VD_3 открывается при $U = 2$ В (переходе на III участок), тогда $E_3 = 2$ В. **(2 б)**

На III участке напряжение меняется в пределах $2\text{ В} \le U \le 3\text{ В}$, оба диода открыты. Сопротивление R_3 определяется из соотношения:

$$\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_{э3}, \ \frac{500 R_3}{500 + R_3} = 125, \ R_3 = 166{,}67 \text{ Ом}. \qquad \textbf{(2 б)}$$

При $R_3 = 166{,}67$ Ом ток меняется в пределах $4\text{ мА} \le I \le 12\text{ мА}$.

Ответ: Схема диодного аппроксиматора



Задача 5

Вариант 2 (25 баллов)

Для цепи, приведенной на рисунке, $R = 10$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 1$ мФ. Потенциал узла 0 принимается равным нулю $\varphi_0 = 0$. При замыкании ключа K операторное изображение потенциала узла $k = 2026$ определяется выражением

$$\varphi_{2026}(p) = \frac{1}{p\left(1 + \frac{100p}{p^2 + 10^4}\right)^{2025}}.$$

Определите мгновенное значение ЭДС источника $e(t)$.

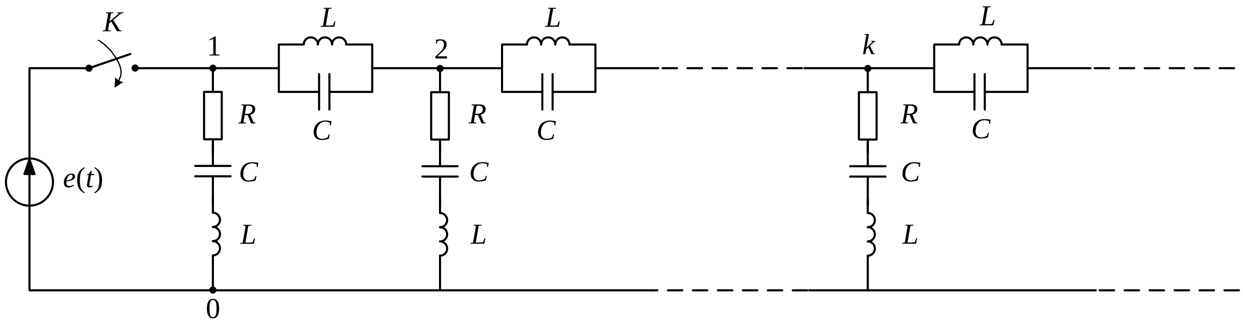


Рисунок 5.1

Примечание.

Сумма первых n членов геометрической прогрессии определяется в соответствии с выражением:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

где b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

Решение задачи основано на явлении безразличного резонанса, операторном методе расчета переходных процессов и выводе рекуррентных соотношений.

Обратим внимание, что $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Представленная на рисунке 5.1 схема состоит из одинаковых Г-образных звеньев. В таком случае входное сопротивление цепи относительно выводов источника на некоторой частоте не изменится, если к источнику подключить еще одно звено (см. рис. 5.1) **(5 б)**

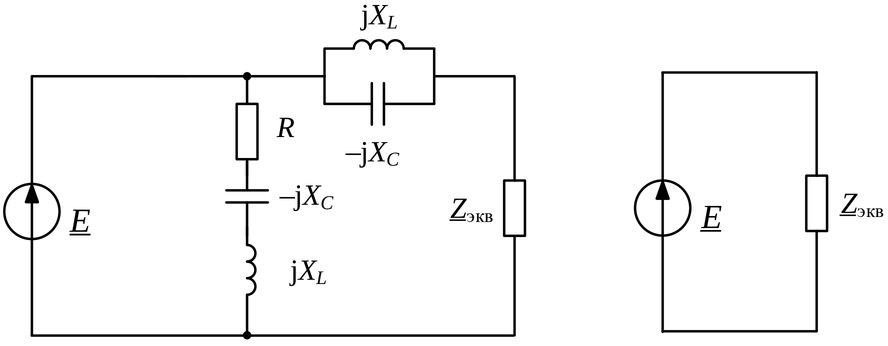


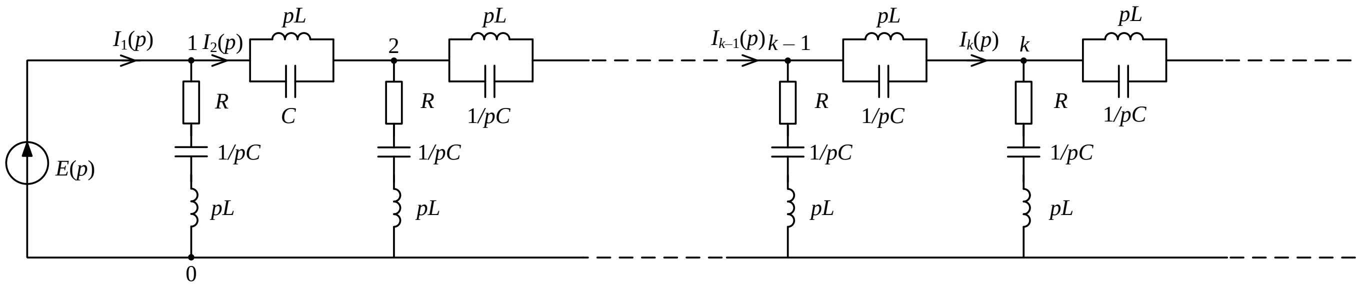
Рисунок 5.2

При сопоставлении схем замещения на некоторой частоте ω, приведенных на рисунке ниже, определяется сопротивление цепи $\underline{Z}_э = R_э = R$, не зависящее от частоты (безразличный резонанс). Действительно, при $\underline{Z}_э = R$ выражение для входного сопротивления цепи, приведенной на рис. 5.2, имеет вид:

$$\underline{Z}_э = \frac{\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(\underline{Z}_э + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right)}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R + \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}} = \left\{\omega L - \frac{1}{\omega C} = X\right\} = \frac{(R + jX)\left(R - j\frac{\frac{L}{C}}{X}\right)}{2R + jX - j\frac{\frac{L}{C}}{X}} =$$

$$= R\frac{(R + jX)\left(1 - j\frac{R}{X}\right)}{2R + jX - j\frac{R^2}{X}} = R\frac{2R + jX - j\frac{R^2}{X}}{2R + jX - j\frac{R^2}{X}} = R. \qquad (\mathbf{5}\text{ б})$$

Операторная схема замещения для определения рекуррентных соотношений имеет вид, представленный на рисунке 5.3.



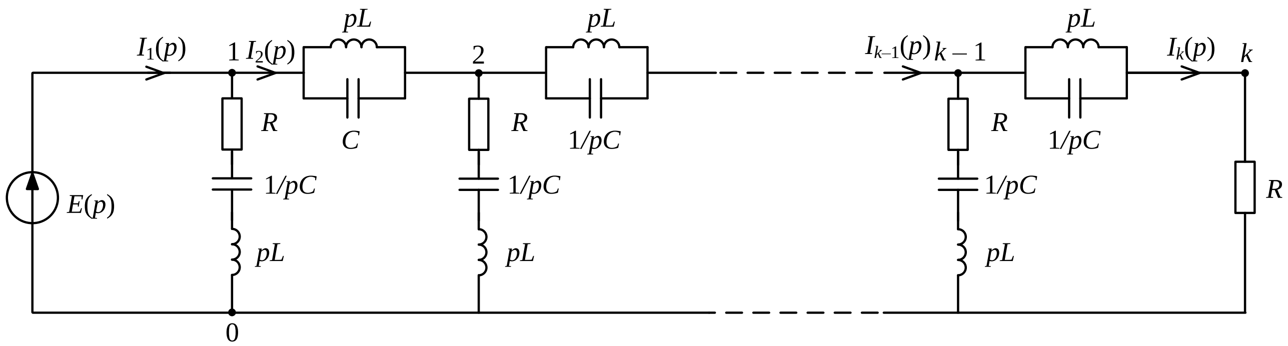


Рисунок 5.3

Выражения в соответствии с законом Ома и формулой разброса в операторной форме имеют вид **(2 б + 3 б)**:

$$\varphi_{k-1}(p) - \varphi_k(p) = I_k(p) \cdot \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}},$$

$$I_k(p) = I_{k-1}(p)\frac{R + pL + \frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC} + \frac{pL \cdot \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} + R} = I_{k-1}(p)\frac{R + Z(p)}{R + Z(p) + \frac{R^2}{Z(p)} + R} = I_{k-1}(p)\frac{1}{1 + \frac{R}{Z(p)}}.$$

С помощью формулы разброса и соотношения $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ может быть получено выражение, связывающее ток k-й и m-й ветвей:

$$I_k(p) = I_m(p) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}}\right)^{k-m} \leftrightarrow I_m(p) = I_k(p)\left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-m} \qquad (\mathbf{1}\text{ б})$$

В соответствии с рекуррентным выражением для потенциалов определяется потенциал первого узла, равный напряжению источника $E(p)$:

$$\varphi_1(p) = \varphi_k(p) + \frac{R^2}{pL + \frac{1}{pC}} \sum_{m=2}^{k} I_m = \qquad (\mathbf{1}\text{ б})$$

$$= \varphi_k(p) + \frac{R^2}{pL + 1/pC} \cdot \sum_{m=2}^{k} (I_2(p) + I_3(p) + \cdots + I_{k-1}(p) + I_k(p)) =$$

$$= \varphi_k(p) + \frac{R^2 I_k(p)}{pL + 1/pC} \sum_{m=2}^{k} \left[\left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-2} + \left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-3} + \cdots + \left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-(k-1)} + \left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-k}\right]. \qquad (\mathbf{2}\text{ б})$$

Данное выражение представляет сумму $k-1$ первых членов геометрической прогрессии со знаменателем **(1 б)**:

$$q = 1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}$$

и первым членом **(1 б)**:

$$b_1 = \left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)^{k-k} = 1.$$

Тогда выражение для потенциала первого узла имеет вид **(1 б)**:

$$\varphi_1(p) = \varphi_k(p) + \frac{R^2 I_k(p)}{pL + 1/pC} \cdot \frac{1 \cdot (1 - q^{k-1})}{1 - \left(1 + \frac{R}{pL + \frac{1}{pC}}\right)} = \varphi_k(p) - R I_k(p)[1 - q^{k-1}].$$

Ток источника связан с током ветви k и с ЭДС источника в соответствии с законом Ома **(1 б)**:

$$I_1(p) = I_k(p) \cdot q^{k-1} = \frac{E(p)}{R} \to I_k(p) = \frac{E(p)}{R} q^{1-k}.$$

Подставляя данное выражение в формулу для потенциала источника, получаем **(1 б)**:

$$E(p) = \varphi_k(p) - R\frac{E(p)}{R} q^{1-k}[1 - q^{k-1}] \to E(p) = \varphi_k(p) q^{k-1}.$$

С учетом $k = 2026$, выражений для $\varphi_k(p)$ и q получаем **(1 б)**:

$$E(p) = \frac{1}{p\left(1 + \frac{100p}{p^2 + 10^4}\right)^{2025}} \cdot \left(1 + \frac{10}{p \cdot 100 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{p \cdot 10^{-3}}}\right)^{2026-1} =$$

$$= \frac{1}{p\left(1 + \frac{100p}{p^2 + 10^4}\right)^{2025}} \cdot \left(1 + \frac{100p}{p^2 + 10^4}\right)^{2025} = \frac{1}{p} \to e(t) = 1 \text{ В}.$$

Ответ: $e(t) = 1$ В.

Примечание. Решение может быть получено более коротким путем, если учесть соотношение:

$$\varphi_{k-1}(p) = \varphi_k(p) \cdot \frac{\underline{Z}_э}{pL \cdot \frac{1}{pC} + \underline{Z}_э} = \varphi_k(p) \cdot \frac{R}{pL \cdot \frac{1}{pC} + R},$$

Задача 6 (20 баллов)

На входе цепи, представленной на рисунке, действует источник синусоидальной ЭДС. Сопротивления резисторов $R = 100$ Ом, $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 1000$ Ом. При $u(t) > 0$ замкнут ключ К2 (К1 разомкнут). При $u(t) < 0$ замкнут ключ К1 (К2 разомкнут). Амперметр A_1 и вольтметр V_1 – магнитоэлектрической системы. Произведение показаний этих приборов равно 400 ВА. Определить показания амперметра A_2 и вольтметра V_2 электромагнитной системы.

Примечание. Приборы электромагнитной системы измеряют действующее значение, а магнитоэлектрической – среднее.

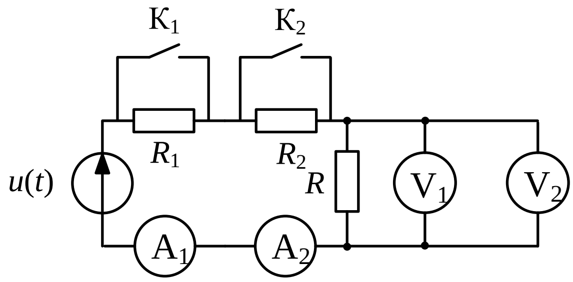


Схема к задаче 6

Решение. Постоянная составляющая несинусоидального напряжения на резисторе U_0 и постоянная составляющая тока I_0 связаны соотношением:

$$U_0 = I_0 R. \qquad \textbf{(1 б)}$$

По условию задачи $U_0 I_0 = I_0^2 R = 400$, следовательно, $I_0^2 = \dfrac{400}{100} = 4$. Постоянная составляющая тока равна $I_0 = 2$ А. **(4 б)**

Ток резистора R является кусочно-синусоидальным:

$$i(t) = \begin{cases} I_{m1} \sin \omega t, & 0 \le t \le T/2 \\ I_{m2} \sin \omega t, & T/2 \le t \le T \end{cases}. \qquad \textbf{(1 б)}$$

Амплитуда тока на положительной и отрицательной полуволнах соответственно:

$$I_{m1} = \frac{U_m}{R_1 + R}, \; I_{m2} = \frac{U_m}{R_2 + R}, \qquad (*) \; \textbf{(1 б)}$$

где U_m – амплитуда входного синусоидального напряжения.

Постоянная составляющая тока:

$$I_0 = \frac{I_{m1}}{\pi} - \frac{I_{m2}}{\pi} = \frac{U_m}{\pi}\left(\frac{1}{R_1 + R} - \frac{1}{R_2 + R}\right). \quad (**) \qquad \textbf{(5 б)}$$

После подстановки численных значений получим:

$$\frac{U_m}{\pi}\left(\frac{1}{10+100} - \frac{1}{1000+100}\right) = 2, \qquad (**)$$

следовательно, амплитуда входного напряжения $U_m = 767{,}9$ В. **(1 б)**

В соответствии с (*) и рассчитанным U_m амплитуда тока на положительной полуволне $I_{m1} = 6{,}98$ А, на отрицательной полуволне $I_{m1} = 0{,}698$ А. **(2 б)**

Действующее значение тока (показание амперметра электромагнитной системы A_2):

$$I = \sqrt{\left(\frac{I_{m1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{I_{m2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{6{,}9791}{2}\right)^2 + \left(\frac{0{,}6978}{2}\right)^2} = 3{,}51 \text{ А}. \qquad \textbf{(4 б)}$$

Действующее значение напряжения на резисторе (показание вольтметра электромагнитной системы V_2) $U = IR = 351$ В. **(1 б)**

Ответ: 3,51 А; 351 В

Примечание. Выражение для среднего значения (**) может быть получено выводом по определению или из литературы.