

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

В.П. Чирков, Е.В. Позняк

**КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Учебное пособие

по дисциплине «Аналитическая динамика и теория колебаний»
для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика»

Москва

Издательский дом МЭИ

2026

УДК
531
Ч-651

Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»

*Подготовлено на кафедре робототехники, мехатроники,
динамики и прочности машин им. В.В. Болотина*

Рецензенты: канд. техн. наук, доцент А.И. Смирнов,
канд. техн. наук **В.Н. Симбиркин**

Чирков В.П., Позняк Е.В.

Ч-651 Колебания систем с сосредоточенными параметрами: Учебное пособие по дисциплине «Аналитическая динамика и теория колебаний». – М.: Издательский дом МЭИ, 2026. – 53 с.

Учебное пособие включает основные теоретические сведения (определения и формулы) по курсу «Аналитическая динамика и теория колебаний», а также задания и расчетные схемы для выполнения курсового проекта. Предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная механика».

© НИУ Московский энергетический институт, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.....	3
2. ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ	30
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	52
Приложение 1	53
Приложение 2	53

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Аналитическая механика – это учение об общих дифференциальных уравнениях движения произвольных механических систем и их исследовании.

Механическая система – совокупность конечного или бесконечного числа материальных точек и (или) материальных тел, взаимодействующих между собой.

Виды связей

Система называется *свободной*, если на перемещения, скорости и ускорения ее точек не наложено ограничений, кроме требований дифференцируемости и ограниченности. Система называется *несвободной*, если на перемещения, скорости и ускорения ее точек наложены ограничения. Эти ограничения называются *связями*.

Связи, уравнения которых задаются в виде равенств относительно координат и скоростей точек системы, называются *двухсторонними*. Если связи задаются в виде неравенств, то они называются *односторонними*.

Если время не входит в уравнение связи, то связь называется *стационарной* или *склерономной*. В противном случае связь *нестационарная* или *реономная*.

Связь называется *геометрической* или *позиционной*, если она накладывает ограничения только на координаты. В противном случае связь называется *кинематической* или *дифференциальной*.

Связь называется *голономной*, если она является геометрической или интегрируемой кинематической.

Связь называется *идеальной*, если ее реакция не совершает работы на виртуальных перемещениях.

Принцип Даламбера

Уравнения динамики механической системы формально совпадают с уравнениями равновесия (статики), если к действующим активным силам и реакциям связей добавить фиктивные (даламберовы) силы инерции.

Общее уравнение динамики (уравнение Даламбера – Лагранжа)

Движение механической системы происходит таким образом, что в любой момент времени сумма работ всех активных и реактивных сил, а также даламберовых сил инерции на любых N виртуальных перемещениях равна нулю. Математическая запись этого утверждения имеет вид

$$\sum_{j=1}^N (\mathbf{F}_j + \mathbf{R}_j + \mathbf{I}_j) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0,$$

где $\mathbf{F}_j$ и $\mathbf{R}_j$ - внешние активные и реактивные силы; $\mathbf{I}_j$ - даламберовы силы инерции; $\delta \mathbf{r}_j$ - виртуальное перемещение.

Для систем с идеальными связями уравнение Даламбера – Лагранжа в проекциях на координатные оси принимает вид

$$\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \delta x_j + \frac{d^2 y_j}{dt^2} \delta y_j + \frac{d^2 z_j}{dt^2} \delta z_j \right) = \sum_{j=1}^N (X_j \delta x_j + Y_j \delta y_j + Z_j \delta z_j),$$

где m_j - сосредоточенная масса с соответствующими ей вектором перемещений $(x_j \ y_j \ z_j)$ и вектором внешних сил $(X_j \ Y_j \ Z_j)$.

Если внешние силы имеют *потенциал* $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N)$, где $\mathbf{r}_j = (x_j \ y_j \ z_j)$, то

$$X_j = \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad Y_j = \frac{\partial U}{\partial y_j}, \quad Z_j = \frac{\partial U}{\partial z_j}.$$

Функция $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N)$ называется также *силовой функцией*. Для консервативных сил с точностью до знака и постоянной составляющей она равна потенциальной энергии системы Π : $U = -\Pi + \text{const}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial U}{\partial z_j} \delta z_j \right) = \delta U = -\delta \Pi,$$

а уравнение Даламбера – Лагранжа примет вид

$$\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{d^2 x_j}{dt^2} \delta x_j + \frac{d^2 y_j}{dt^2} \delta y_j + \frac{d^2 z_j}{dt^2} \delta z_j \right) = \delta U = -\delta \Pi,$$

то есть виртуальная работа даламберовых сил инерции равна вариации потенциальной энергии системы: $\sum_{j=1}^N \mathbf{I}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j = \delta \Pi$.

Уравнения Лагранжа первого рода

$$\begin{aligned} X_j - m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j} &= 0, & Y_j - m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_j} &= 0, \\ Z_j - m_j \frac{d^2 z_j}{dt^2} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_j} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

Для замыкания системы уравнений нужно добавить s уравнений связей $f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0$, λ_k – неопределенные множители Лагранжа. Число уравнений $3N$, неизвестных $3N + s$: x_j, y_j, z_j, λ_k .

Обобщенные координаты

Минимальное число $n = 3N - s$ независимых переменных, однозначно определяющих конфигурацию системы материальных точек в любой момент времени, называется *числом степеней свободы*.

Функции от $n = 3N - s$ переменных $\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \dots, \xi_{3N}$:

$$q_j = q_j(\xi_{s+1}, \xi_{s+2}, \dots, \xi_{3N}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

достаточные для описания динамического поведения системы в любой момент времени, называются *обобщенными координатами*.

Основные пространства аналитической механики

1. *Пространство конфигураций* – n -мерное пространство с обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$.

2. *Пространство состояний* (расширенное пространство конфигураций) – $(n+1)$ -мерное пространство с обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$ и временем t .

3. *Фазовое пространство* – $2n$ -мерное пространство с обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$ и обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$.

4. *Пространство событий* (расширенное фазовое пространство) – $(2n+1)$ -мерное пространство с обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, обобщенными скоростями $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, и временем t .

Кинетическая энергия в обобщенных координатах

Кинетическая энергия системы T определяется как квадратичная форма обобщенных скоростей

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \text{где } a_{jk} = \sum_{l=1}^N m_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} \right) -$$

инерционные коэффициенты, образующие квадратную матрицу $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ размерностью $n \times n$, которая называется инерционной матрицей или матрицей масс. Эта матрица обладает следующими свойствами:

1. $\mathbf{A} \succ 0$ – положительная определенность следует из положительности кинетической энергии $T > 0$.

2. $a_{jk} = a_{kj}$ – симметричность следует из определения.

3. $a_{jj} > 0$ – следует из определения.

4. $\det \mathbf{A} > 0$ – следует из свойства (1) (признак Сильвестра – все главные миноры > 0).

5. $a_{jk} a_{kj} < a_{jj} a_{kk} \ (j \neq k)$ – также следует из свойства (1).

6. $\exists \mathbf{A}^{-1}, \det \mathbf{A}^{-1} > 0$ – также следует из свойства (1).

Виртуальная работа, виртуальные перемещения и обобщенные силы

Виртуальная работа сил равна

$$\delta' A = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j,$$

где $\delta \mathbf{r}_j$ – виртуальное перемещение: $\delta \mathbf{r}_j = \tilde{\mathbf{r}}_j(t) - \mathbf{r}_j(t)$ – перемещение на смежном движении, совместимом со связями, в тот же момент времени (изохронная вариация, то есть время не варьируется).

Возможное перемещение – перемещение на смежном движении, совместимом со связями, за малый отрезок времени: $\delta \mathbf{r}_j^t = \tilde{\mathbf{r}}_j(t + dt) - \mathbf{r}_j(t)$.

Если связи стационарные, то понятия виртуальных и возможных перемещений совпадают.

Виртуальная работа в обобщенных координатах

$$\delta' A = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k,$$

где коэффициенты $Q_k = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, называются

обобщенными силами. Обобщенные силы Q_k есть коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении для виртуальной работы.

Обобщенные силы через проекции сил на координатные оси X_j , Y_j , Z_j задаются выражением

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \left(X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right).$$

Если силы имеют потенциал, то есть существует U – силовая функция, в общем случае зависящая от координат и времени, виртуальная работа и обобщенные силы равны

$$\delta' A = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \delta x_j + \frac{\partial U}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial U}{\partial z_j} \delta z_j \right) = \delta U.$$

$$Q_k = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Если система консервативная, то $\delta U = -\delta \Pi$, где $\Pi = -U + \text{const}$ имеет смысл потенциальной энергии системы. Тогда

$$Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}.$$

Сила называется *консервативной*, если работа, совершаемая этой силой при переходе от одной точки (A) в другую (B) не зависит от формы пути перехода между точками, а зависит только от положения этих точек. Таким образом, понятие консервативной силы есть частный случай потенциальной силы. Для систем с идеальными стационарными связями эти понятия совпадают.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия Π является функцией обобщенных координат $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$. В случае малых отклонений от положения равновесия ее можно представить в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k,$$

где c_{jk} – квазиупругие коэффициенты, образующие матрицу квазиупругих коэффициентов или матрицу жесткости $\mathbf{C} = [c_{jk}]$. Эта матрица обладает свойствами, аналогичными свойствам инерционной матрицы $\mathbf{A}$ (положительная определенность, симметрия, положительность определителя, $c_{jk}c_{kj} < c_{jj}c_{kk}$ ($j \neq k$), существование обратной матрицы).

Вариационный принцип Гамильтона – Остроградского

Отклонение смежного движения от истинного $\delta q_j(t) = \tilde{q}_j(t) - q_j(t)$ называются вариациями по Гамильтону. Они должны удовлетворять условиям:

1. Малость (бесконечная малость), дифференцируемость по времени, совместимость со связями.

2. Изохронность (время не варьируется).

3. Переставимость операций варьирования и дифференцирования по времени: $\frac{d}{dt}(\delta q_j) = \delta \dot{q}_j = \delta \left(\frac{d}{dt} q_j \right)$.

4. $\delta q_j(t_0) = \delta q_j(t_1) = 0$, т.е. в начале временного отрезка $[t_0, t_1]$ и в конце (в точках A и B) истинное и смежные движения совпадают.

Принцип Гамильтона – Остроградского (принцип наименьшего действия): истинное движение системы с идеальными голономными двухсторонними связями на временном отрезке $[t_0, t_1]$ происходит так, что

из всех движений, варьируемых по Гамильтону, только для истинного движения выполняется условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' A) dt = 0.$$

Здесь δT – вариация кинетической энергии системы, $\delta' A$ – сумма виртуальных работ всех сил (внешних и внутренних) на вариациях $\delta q_j(t)$.

В частных случаях потенциальных и консервативных сил принцип Гамильтона – Остроградского принимает вид

$$\delta S = 0,$$

где $S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi) dt$ – действие по Гамильтону. В этом случае

принцип Гамильтона – Остроградского формулируется так:

Истинное движение системы на отрезке $[t_0, t_1]$ происходит так, что из всех движений, варьируемых по Гамильтону, только для истинного движения действие по Гамильтону принимает стационарное значение.

Системы, удовлетворяющие этому принципу, называются *гамильтоновыми системами*.

Функционал $L = T + U$ для гамильтоновых систем, $L = T - \Pi$ для консервативных систем называется *лагранжианом* или *функцией Лагранжа*.

Уравнения Лагранжа второго рода

Для системы с n степенями свободы с идеальными голономными двухсторонними связями уравнение Лагранжа второго рода записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

для случая потенциальных сил $Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T + U)}{\partial q_j} = 0,$$

или через лагранжиан

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

для консервативной системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0.$$

Циклические координаты

Обобщенные координаты называются *циклическими*, если они не входят в выражение для функции Лагранжа. Уравнений Лагранжа второго рода для циклических координат принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

Здесь $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j$ – обобщенный импульс, из условия $dp_j / dt = 0$ следует, что

$p_j = \text{const}$, то есть система в направлении циклических координат движется с постоянной скоростью. Таким образом, в системе с ν циклическими координатами порядок уравнений движения можно понизить на ν , рассматривая только уравнения для оставшихся координат.

Основные понятия аналитической статики

Аналитическая статика – это учение о равновесии механических систем при записи основных соотношений в обобщенных координатах. Уравнения аналитической статики можно получить из уравнений динамики, положив $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = \dots = \ddot{q}_n = 0$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_n = 0$, при этом кинетическая энергия $T \equiv 0$.

Общее уравнение динамики Даламбера – Лагранжа, эквивалентное принципу виртуальных перемещений в сочетании с принципом Даламбера, в декартовых координатах применительно к задачам статики принимает вид

$$\sum_{j=1}^N (X_j \delta x_j + Y_j \delta y_j + Z_j \delta z_j) = 0.$$

Это – *принцип виртуальных перемещений* для задач статики. В обобщенных координатах этот принцип имеет вид

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j = 0.$$

Так как вариации обобщенных координат независимые и произвольные, то получим необходимые и достаточные условия равновесия $Q_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

В частном случае, когда система консервативная,

$$\delta \Pi = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \delta q_j = 0,$$

то есть в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия принимает стационарное значение $\delta \Pi = 0$. Характер стационарности определяется второй вариацией $\delta^2 \Pi$:

если в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум, то есть $\delta^2 \Pi > 0$, то такое положение равновесия устойчиво (теорема Лагранжа – Дирихле).

Если $\delta^2 \Pi < 0$, то положение равновесия неустойчиво.

Если $\delta^2 \Pi = 0$, то имеет место безразличное положение равновесия.

Теория линейных колебаний

Процесс изменения обобщенных координат, который характеризуется многократным поочередным возрастанием и убыванием во времени, называется *колебательным процессом*, а соответствующая система – *колебательной системой*.

Колебания называются *свободными*, если они происходят при отсутствии внешних воздействий, за счет начальных условий.

Колебания называются *периодическими*, если значения колеблющихся величин повторяются через равные промежутки времени. Колебания называются *гармоническими*, если они описываются тригонометрическими функциями (синус или косинус).

Кинетическая и потенциальная энергия системы с n степенями свободы в случае малых колебаний

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k,$$

где

$$a_{jk} = a_{jk}(q_1, q_2, \dots, q_n) \Big|_{\mathbf{q}=0} = \sum_{l=1}^N m_l \left(\frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_k} \right) \Big|_{\mathbf{q}=0}, \quad c_{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{\mathbf{q}=0}$$

инерционные и квазиупругие коэффициенты.

В скалярной и в матричной формах

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}, \quad \Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q},$$

Инерционная матрица $\mathbf{A}$ и матрица квазиупругих коэффициентов или матрица жесткости $\mathbf{C}$ обладают следующими общими свойствами:

1. $a_{jk} = a_{kj}, c_{jk} = c_{kj}$ – симметричность следует из определения.
2. $a_{jj} > 0, c_{jj} > 0$ – следует из определения.
3. $\mathbf{A} \succ 0, \mathbf{C} \succ 0$ – положительная определенность следует из положительности кинетической и потенциальной энергии $T > 0, \Pi > 0$.
4. $\det \mathbf{A} > 0, \det \mathbf{C} > 0$ – следует из свойства (3) (признак Сильвестра – все главные миноры > 0).
5. $a_{jk}a_{kj} < a_{jj}a_{kk}, c_{jk}c_{kj} < c_{jj}c_{kk} (j \neq k)$ – также следует из свойства (3).
6. $\exists \mathbf{A}^{-1}, \det \mathbf{A}^{-1} > 0, \exists \mathbf{C}^{-1}, \det \mathbf{C}^{-1} > 0$ – также следует из свойства (3).

Уравнения малых свободных колебаний консервативных систем

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Матричная форма записи

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \text{ или } \mathbf{F}\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}$ – матрица податливостей.

Решение уравнений ищется в виде $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} \cos(\omega t - \varphi)$, где $\mathbf{v}$ – вектор амплитуд, характеризующий форму колебаний; ω – круговая частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний. Тогда

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega^2)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ или } \sum_{k=1}^n (c_{jk} - \omega^2 a_{jk})v_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Частотное уравнение

$$\det(\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega^2) = 0$$

в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \cdots & c_{1n} - \omega^2 a_{1n} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & \cdots & c_{2n} - \omega^2 a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} - \omega^2 a_{n1} & c_{n2} - \omega^2 a_{n2} & \cdots & c_{nn} - \omega^2 a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения называются *собственными частотами*. Упорядоченная по возрастанию совокупность собственных частот $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ называется *спектром собственных частот*.

Уравнение $(\mathbf{C} - \mathbf{A}\omega_j^2)\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$ служит для определения форм колебаний. Одно из уравнений нужно отбросить. Совокупность собственных частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и соответствующих им собственных форм колебаний $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ образует *спектр колебаний*.

Собственные частоты и формы в Matlab определяются с помощью оператора eig :

$$[v, d] = \text{eig}(C, A); \quad d = \text{diag}[\omega_k^2], \quad v = [v_{jk}].$$

Формула Рэлея

Квадрат частоты собственных колебаний по форме $\mathbf{v}$ равен

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{C}\mathbf{v}, \mathbf{v})}{(\mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}} = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} v_j v_k}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} v_j v_k}.$$

Числитель дроби Рэлея с точностью до 1/2 равен максимальному во времени значению потенциальной энергии, а знаменатель с точностью до $\omega^2 / 2$ равен максимальному во времени значению кинетической энергии.

Свойства собственных частот и форм колебаний

1. Собственные частоты положительны и действительны.
2. Собственные формы колебаний, соответствующие различным собственным частотам, попарно ортогональны с весом матрицы инерции и с весом матрицы жесткости:

$$(\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0, (\mathbf{C}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0, j \neq k$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} v_{\alpha j} v_{\beta k} = 0, \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta} v_{\alpha j} v_{\beta k} = 0, j \neq k.$$

(условия ортогональности по кинетической и по потенциальной энергии).

3. Собственные формы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ линейно независимы и образуют полный базис в n -мерном векторном пространстве конфигураций.

Главные (нормальные) координаты

Главные (нормальные) координаты $q_k^*(t)$ получаются при ортогональном преобразовании с помощью матрицы собственных форм $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n)$:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{q}^*(t), \quad \mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k q_k^*(t), \quad q_j(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k^*(t).$$

В главных координатах уравнения движения разделяются:

$$a_j^* \ddot{q}_j^* + c_j^* \dot{q}_j^* = 0, \quad \ddot{q}_j^* + \omega_j^2 q_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\omega_j^2 = \frac{c_j^*}{a_j^*}, \quad a_j^* = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j), \quad c_j^* = (\mathbf{C}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j), \quad \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V} = \text{diag}[\omega_j^2].$$

Решение в главных координатах имеет вид

$$q_j^*(t) = B_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t = A_j \cos(\omega_j t - \varphi_j),$$

$$A_j^2 = B_j^2 + D_j^2, \quad \text{tg} \varphi_j = D_j / B_j.$$

Общее решение уравнений свободных колебаний

Общее решение уравнений свободных колебаний с заданными начальными условиями имеет вид:

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j q_j^*(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j (B_j \cos \omega_j t + D_j \sin \omega_j t),$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0 = \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{v}_j, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}^0 = \sum_{j=1}^n \omega_j D_j \mathbf{v}_j,$$

$$\mathbf{A}\mathbf{q}^0 = \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j, \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^0 = \sum_{j=1}^n \omega_j D_j \mathbf{A}\mathbf{v}_j,$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{q}^0, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^n B_j (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k), \quad (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^0, \mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^n \omega_j D_j (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k),$$

$$B_k = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{q}^0, \mathbf{v}_k)}{(\mathbf{A}\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)}, \quad D_k = \frac{(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}^0, \mathbf{v}_k)}{\omega_k (\mathbf{A}\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)}.$$

Колебания консервативной системы с одной степенью свободы

Уравнение движения:

$$a\ddot{q} + cq = 0, \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Решение для заданных начальных условий:

$$q(t) = B \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t - \varphi) = q_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

$$g_1(t) = \cos \omega_0 t, \quad g_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad - \text{фундаментальная система Коши,}$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ \dot{g}_1(t) & \dot{g}_2(t) \end{bmatrix} - \text{матрица Коши, } \mathbf{G}(0) = \mathbf{E}.$$

Колебания консервативной системы с двумя степенями свободы

Уравнение движения:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0. \end{cases}$$

Частотное уравнение:

$$\det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{A}) = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 a_{11} & c_{12} - \omega^2 a_{12} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12} \mp \sqrt{(a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - 2a_{12}c_{12})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}$$

Собственные формы колебаний:

$$\frac{v_{2\alpha}}{v_{1\alpha}} = -\frac{c_{11} - \omega_\alpha^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_\alpha^2 a_{12}} = -\frac{c_{21} - \omega_\alpha^2 a_{21}}{c_{22} - \omega_\alpha^2 a_{22}}.$$

Условия ортогональности собственных форм:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} v_{j\alpha} v_{k\beta} = 0, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} v_{j\alpha} v_{k\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Если известна матрица податливости $\mathbf{F}$, уравнения движения принимают вид:

$$\mathbf{FA}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_{11}m_1\ddot{u}_1 + f_{12}m_2\ddot{u}_2 + u_1 = 0, \\ f_{21}m_1\ddot{u}_1 + f_{22}m_2\ddot{u}_2 + u_2 = 0. \end{cases}$$

Частотное уравнение ($\mathbf{E}$ – единичная матрица)

$$\det(\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{FA}) = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 m_1 f_{11} & -\omega^2 m_2 f_{12} \\ -\omega^2 m_1 f_{21} & 1 - \omega^2 m_2 f_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные частоты:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_1 f_{11} + m_2 f_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 f_{11} - m_2 f_{22}}{2}\right)^2 + m_1 m_2 f_{12}^2}}}.$$

Компоненты $v_{1\alpha}, v_{2\alpha}$ векторов собственных форм $\mathbf{v}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{v_{2\alpha}}{v_{1\alpha}} = \frac{1 - \omega_\alpha^2 m_1 f_{11}}{\omega_\alpha^2 m_2 f_{12}} = \frac{\omega_\alpha^2 m_1 f_{21}}{1 - \omega_\alpha^2 m_2 f_{22}}.$$

Парциальные системы и парциальные частоты

Системы, получаемые из заданной системы путем наложения ограничений $q_j \neq 0, q_k = 0 (j \neq k)$, называются *парциальными системами*, а соответствующие частоты

$$\omega_j = \sqrt{\frac{c_{jj}}{a_{jj}}}, j = 1, 2, \dots, n$$

– *парциальными частотами*. Переход к парциальным системам осуществляется путем наложения дополнительных связей. Низшая собственная частота всегда меньше (или равна) меньшей парциальной частоты, а высшая частота всегда больше (или равна) большей парциальной частоты. Иначе: собственные частоты всегда расположены вне или на границе интервала, ограниченного парциальными частотами.

Диаграмма Вина (рис.1) позволяет исследовать поведение собственных частот системы с двумя степенями свободы в зависимости от соотношения парциальных частот ω_{II} / ω_I , при этом снимается ограничение $\omega_I \leq \omega_{II}$.

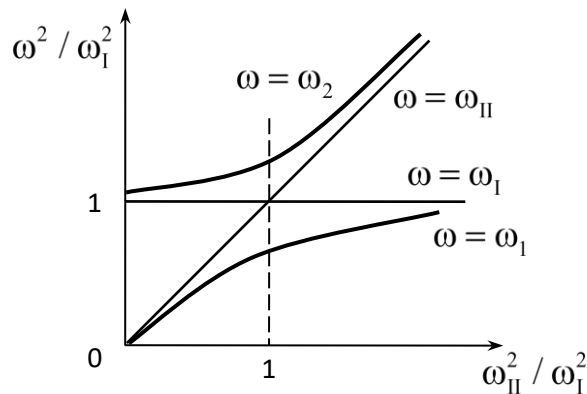


Рис.1. Диаграмма Вина

Классификация линейных систем

$$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0.$$

1. Обобщенные силы, соответствующие симметричной матрице B_1 , называются *диссипативными силами*.

1а). Если матрица B_1 положительно определенная, то говорят, что соответствующие силы обладают *полной диссипацией*.

1б). Если матрица B_1 положительно полуопределенная, то говорят, что соответствующие силы обладают *неполной диссипацией*.

1в). Если матрица B_1 отрицательно определенная, то говорят, что соответствующие силы являются силами с *отрицательной диссипацией*, или *ускоряющими силами*.

2. Обобщенные силы, соответствующие антисимметричной матрице B_2 , называются *гироскопическими силами*.

3. Позиционные обобщенные силы, соответствующие симметричной матрице C_1 , называются *консервативными силами*.

4. Позиционные обобщенные силы, соответствующие антисимметричной матрице C_2 , принадлежат к классу неконсервативных сил. Их называют также *циркуляционными, следящими, псевдогироскопическими*.

5. Системы, находящиеся под действием только консервативных позиционных сил, называются *консервативными системами*.

6. Системы, находящиеся под действием только гироскопических или гироскопических и консервативных позиционных сил, называются *гироскопическими системами*. Для таких систем выполняется теорема о сохранении полной механической энергии, поэтому эти системы также консервативные.

7. Все остальные системы, не подходящие под определения 5 и 6, относятся к классу неконсервативных систем.

8. Системы, находящиеся под действием диссипативных сил, называются *диссипативными системами*. В зависимости от типа диссипативных сил различают системы с полной диссипацией, с неполной диссипацией, с отрицательной диссипацией.

8а). Системы с полной диссипацией и системы с неполной диссипацией называются также *пассивными системами*. В пассивных системах возможны либо стационарные, либо затухающие колебания.

8б). Системы с отрицательной диссипацией называются *активными системами*. В активных системах возможно самовозбуждение колебаний (автоколебания).

Характеристики демпфирования

- 1) $\delta = \ln \frac{f_k}{f_{k+1}} = \varepsilon T_\varepsilon = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \approx \frac{2\pi\varepsilon}{\omega_0}$ – логарифмический декремент колебаний,
- 2) $\beta = \frac{\varepsilon}{\omega_0}$ – относительное демпфирование,
- 3) $\psi = \frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\omega_0} = 2\delta$ – относительная диссипация энергии за цикл.

Колебания линейной диссипативной системы с одной степенью свободы

Уравнение движения:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0, \quad \ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{c/a}, \quad \varepsilon = b/2a.$$

Решение для случая малого демпфирования $\varepsilon < \omega_0$:

$$q(t) = C_1 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_\varepsilon t + C_2 e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t = A e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_\varepsilon t - \varphi),$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = C_2 / C_1.$$

$$q(t) = q_0 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_\varepsilon t + \frac{\dot{q}_0 + q_0 \varepsilon}{\omega_\varepsilon} e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t = q_0 g_1(t) + \dot{q}_0 g_2(t),$$

$$g_1(t) = e^{-\varepsilon t} \left(\cos \omega_\varepsilon t + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right), \quad g_2(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \quad -$$

фундаментальная система Коши.

Решение для случая большого демпфирования $\varepsilon > \omega_0$:

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} \left[\frac{q_0(\varepsilon + \varepsilon_\omega) + \dot{q}_0}{2\varepsilon_\omega} e^{\varepsilon_\omega t} - \frac{q_0(\varepsilon - \varepsilon_\omega) + \dot{q}_0}{2\varepsilon_\omega} e^{-\varepsilon_\omega t} \right], \quad \varepsilon_\omega = \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_0^2} < \varepsilon.$$

Решение для случая критического демпфирования $\varepsilon = \omega_0$:

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} [q_0 + (\dot{q}_0 + \varepsilon q_0)t].$$

Фазовые траектории (фазовые портреты)

Фазовая плоскость – плоскость с координатами $q(t)$ и $\dot{q}(t)$.

Фазовая траектория – зависимость между $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, изображенная на фазовой плоскости.

$$q(t) = A e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_\varepsilon t - \varphi), \quad \dot{q} = -A e^{-\varepsilon t} [\varepsilon \cos(\omega_\varepsilon t - \varphi) + \omega_\varepsilon \sin(\omega_\varepsilon t - \varphi)].$$

Свободные колебания диссипативных систем со многими степенями свободы

Уравнение движения:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \sum_{k=1}^n (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$R = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k - \text{диссипативная функция Релея.}$$

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0 - \text{характеристическое уравнение.}$$

$$\text{Закон движения: } \mathbf{q}(t) = \sum_{k=1}^n e^{-\varepsilon_k t} (F_k \mathbf{u}_k \cos \omega_{k\varepsilon} t + G_k \mathbf{v}_k \sin \omega_{k\varepsilon} t).$$

Приведение к главным координатам:

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{q}^*(t) \Rightarrow$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{q}^* = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V} = \text{diag}[\omega_j^2], \quad \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V} = 2[\varepsilon_{jk}].$$

Модели демпфирования:

1. Внешнее трение $\mathbf{B} = 2\varepsilon \mathbf{A}$

2. Внутреннее трение $\mathbf{B} = 2\eta \mathbf{C}$.

3. Случай малой диссипации $\|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}\|^2 \ll \|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}\| \Rightarrow \varepsilon_{jk} \ll \varepsilon_{jj} = \varepsilon_j,$

$$\ddot{q}_j^* + 2\varepsilon_j \dot{q}_j^* + \omega_j^2 q_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Установившиеся вынужденные колебания системы с одной степенью свободы без диссипации

$$\text{Уравнение движения: } a\ddot{q} + cq = Q(t), \quad \ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{Q(t)}{a}.$$

1) Случай внешней гармонической силы $Q(t) = P \cos \theta t$:

$$q(t) = f \cos \theta t, \quad f = \frac{P}{a(\omega_0^2 - \theta^2)} = \frac{f_{cm}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}, \quad k_\theta = \left| \frac{f}{f_{cm}} \right| = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2} \right|}.$$

2) Случай кинематического воздействия $q_0(t) = A \cos \theta t$

$$f = \frac{A\theta^2}{\omega_0^2 - \theta^2} = \frac{A}{\frac{\omega_0^2}{\theta^2} - 1},$$

$$k_\partial = \left| \frac{f}{A} \right| = \frac{1}{\left| \frac{\omega_0^2}{\theta^2} - 1 \right|}.$$

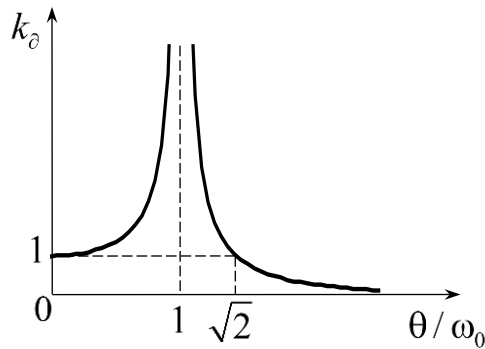


Рис.2. Коэффициент динамичности k_∂ (внешняя гармоническая сила)

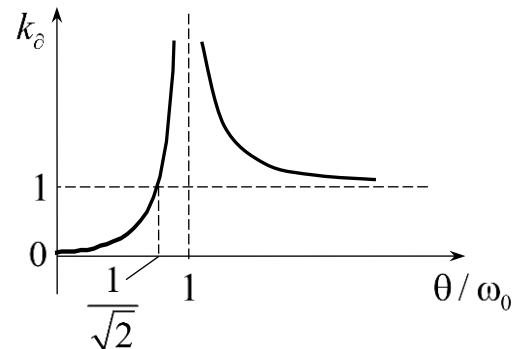


Рис.3. Коэффициент динамичности k_∂ (кинематическое воздействие)

3) Случай периодической внешней силы $Q(t) = Q(t + T)$:

$$Q(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta t + B_k \sin k\theta t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t),$$

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T Q(t) \cos k\theta t dt, \quad B_k = \frac{1}{T} \int_{-T}^T Q(t) \sin k\theta t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$q(t) = \frac{1}{c} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k \cos k\theta t + B_k \sin k\theta t}{1 - k^2 \theta^2 / \omega_0^2} \right).$$

Вынужденные колебания диссипативной системы с одной степенью свободы

Уравнение движения:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega_0^2 q = Q(t) / a, \quad Q(t) = P \cos \theta t.$$

Решение для случая периодической вынуждающей силы $Q(t) = Q(t + T)$:

$$Q(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\theta t + B_k \sin k\theta t) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t),$$

$$q(t) = f \cos(\theta t - \varphi), \quad f = \frac{q_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}.$$

$$q(t) = \frac{A_0}{2c} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k \cos(k\theta t - \psi_k)}{c \sqrt{\left(1 - \frac{k^2\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon k\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}, \quad \psi_k = \varphi_k + \arctg \frac{\frac{2\varepsilon k\theta}{\omega_0^2}}{1 - \frac{k^2\theta^2}{\omega_0^2}}, \quad \text{tg} \varphi_k = \frac{B_k}{A_k}.$$

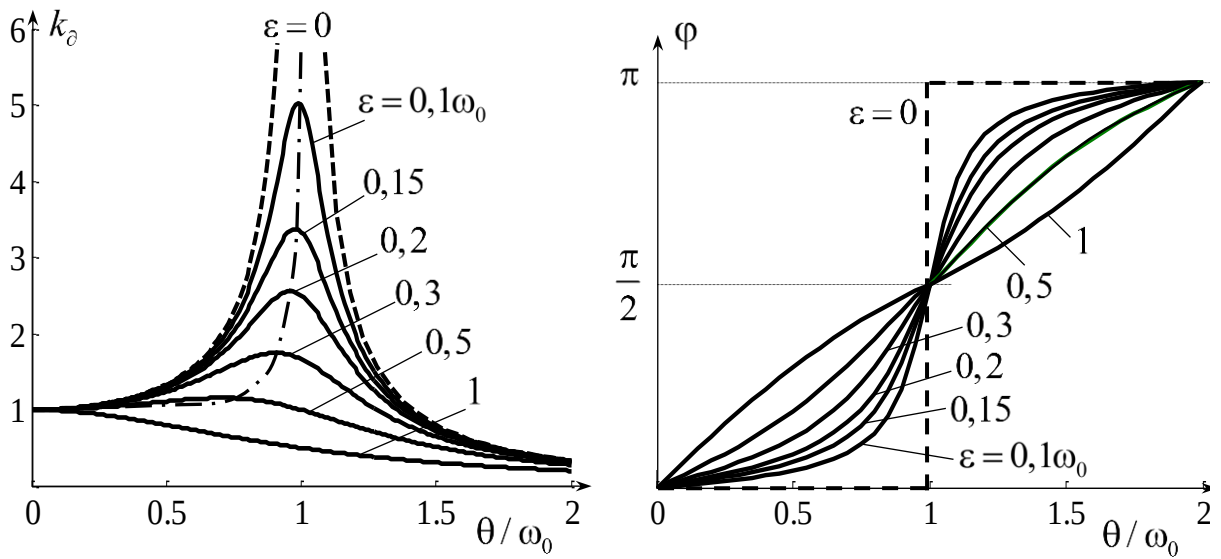


Рис.4. Коэффициент динамичности (слева) и фаза (справа)
для диссипативных систем

Решение методом комплексных амплитуд:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = P \cos \theta t \Rightarrow a\ddot{\tilde{q}} + b\dot{\tilde{q}} + c\tilde{q} = P e^{i\theta t}, \quad q(t) = \text{Re} \tilde{q}(t),$$

$$\tilde{q}(t) = \tilde{f} e^{i\theta t}, \quad \tilde{f} = \frac{q_{\text{ст}}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2} + 2i\varepsilon \frac{\theta}{\omega_0^2}}, \quad f = |\tilde{f}| = \frac{q_{\text{ст}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon \theta}{\omega_0^2}\right)^2}},$$

$$c_{\text{дин}} = \frac{P}{\tilde{f}} = c \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2} + i \frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right) - \text{динамическая жесткость.}$$

Установившиеся вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы без диссипации

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) = \mathbf{P} \cos \theta t, \quad \sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j(t) = P_j \cos \theta t, \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{f} \cos \theta t, \quad (\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A}) \mathbf{f} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = (\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A})^{-1} \mathbf{P}.$$

Применение метода главных координат:

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \Big| \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{P} \cos \theta t, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \mathbf{q}^*(t), \\ \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{q}^* = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \cos \theta t,$$

$$\ddot{q}_j^* + \omega_j^2 q_j^* = q_{\text{ст}j}^* \omega_j^2 \cos \theta t, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad q_j^* = \frac{q_{\text{ст}j}^*}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_j^2}} \cos \theta t,$$

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k^*(t) = f_j \cos \theta t, \quad f_j = \frac{\sum_{k=1}^n v_{jk} q_{\text{ст}k}^* \prod_{l \neq k} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_l^2}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_k^2}\right)} = \frac{p_1(\theta^2)}{p_2(\theta^2)}.$$

Установившиеся вынужденные колебания диссипативной системы с конечным числом степеней свободы

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{P} \cos \theta t, \quad \mathbf{q} = \mathbf{f} \cos \theta t + \mathbf{g} \sin \theta t,$$

$$(\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) \mathbf{f} + \mathbf{B}\mathbf{g}\theta = \mathbf{P},$$

$$-\mathbf{B}\mathbf{f}\theta + (\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) \mathbf{g} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{f} = (\theta \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) \mathbf{g},$$

$$\left[(\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) (\theta \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) + \theta \mathbf{B} \right] \mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{g} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P},$$

$$\mathbf{f} = (\theta \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) \mathbf{g} = (\theta \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{A}\theta^2) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}.$$

Применение метода комплексных амплитуд:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{P} \cos \theta t \Rightarrow \mathbf{A}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{B}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{P} e^{i\theta t},$$

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \tilde{\mathbf{f}} e^{i\theta t}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{C} - \theta^2 \mathbf{A} + i\theta \mathbf{B})^{-1} \mathbf{P}, \quad \mathbf{q}(t) = \text{Re} \tilde{\mathbf{q}}(t).$$

Приведение к главным координатам:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\left|\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\mathbf{q}=\mathbf{P}\cos\theta t,\quad \mathbf{q}(t)=\mathbf{V}\mathbf{q}^*(t)\right.$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^*+2\left[\varepsilon_{jk}\right]\dot{\mathbf{q}}^*+\text{diag}\left[\omega_j^2\right]\mathbf{q}^*=\text{diag}\left[\omega_j^2\right]\mathbf{q}_{cm}^*\cos\theta t$$

$$\ddot{q}_j^*+2\varepsilon_j\dot{q}_j^*+\omega_j^2q_j^*=\omega_j^2q_{jcm}^*\cos\theta t,\quad j=1,2,\dots,n,$$

$$q_j^*=f_j\cos(\theta t-\varphi_j),\quad f_j=\frac{q_{jcm}^*}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega_j^2}\right)^2+\left(\frac{2\varepsilon_j\theta}{\omega_j^2}\right)^2}},\quad \varphi_j=\arctg\frac{2\varepsilon_j\theta/\omega_j^2}{1-\theta^2/\omega_j^2}.$$

$$q_k(t)=\sum_{j=1}^n v_{kj} f_j \cos(\theta t-\varphi_j),\quad k=1,2,\dots,n.$$

Неустановившиеся вынужденные колебания для систем с одной степенью свободы

Система с одной степенью свободы без диссипации:

$$a\ddot{q}+cq=Q(t),\quad \ddot{q}+\omega_0^2q=\frac{1}{a}Q(t),\quad q(0)=q_0,\quad \dot{q}(0)=\dot{q}_0$$

$$q(t)=q_1(t)+q_*(t),\quad q_1(t)=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t,$$

$$q_*(t)=C_1(t)\cos\omega_0t+C_2(t)\sin\omega_0t,$$

$$q_*(t)=C_1(t)\cos\omega_0t+C_2(t)\sin\omega_0t,\quad q_*(t)=\frac{1}{a\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0(t-\tau)Q(\tau)d\tau,$$

$$q(t)=q_0\cos\omega_0t+\frac{1}{\omega_0}\dot{q}_0\sin\omega_0t+\frac{1}{a\omega_0}\int_0^t\sin\omega_0(t-\tau)Q(\tau)d\tau.$$

Процесс установления вынужденных колебаний:

$$\ddot{q}+\omega_0^2q=\frac{1}{a}Q(t),\quad Q(t)=P\cos\theta t,$$

$$q(t)=q_0(t)+q_*(t)=C_1\cos\omega_0t+C_2\sin\omega_0t+\frac{f_0}{1-\frac{\theta^2}{\omega_0^2}}\cos\theta t,$$

$$q(0)=0,\quad \dot{q}(0)=0,$$

$$q(t) = \frac{f_0 (\cos \theta t - \cos \omega_0 t)}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}} = \frac{2 f_0}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}} \sin \frac{(\omega_0 - \theta)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 + \theta)t}{2}.$$

При $\theta \neq \omega_0$ – биения, при $\theta = \omega_0$ $q(t) = \frac{1}{2} f_0 \omega_0 t \sin \omega_0 t$

Прохождение через резонанс:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{a} Q(t), \quad Q(t) = P \cos \theta t, \quad \theta(t) = \alpha t,$$

$$q(t) = \frac{1}{a \omega_0} \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) Q(\tau) d\tau = f_0 \omega_0 \int_0^t \sin \omega_0 (t - \tau) \cos \alpha \tau^2 d\tau.$$

Диссипативная система с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega_0^2 q = Q(t) / a, \quad q(t) = q_1(t) + q_*(t),$$

$$q_1(t) = C_1 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_\varepsilon t + C_2 e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t$$

$$q_*(t) = C_1(t) e^{-\varepsilon t} \cos \omega_\varepsilon t + C_2(t) e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t = \frac{1}{a \omega_\varepsilon} \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_\varepsilon (t - \tau) Q(\tau) d\tau,$$

$$q(t) = e^{-\varepsilon t} \left[q_0 \left(\cos \omega_\varepsilon t + \frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t \right) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_\varepsilon} \sin \omega_\varepsilon t + \frac{1}{a \omega_\varepsilon} \int_0^t e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_\varepsilon (t - \tau) Q(\tau) d\tau \right].$$

Процесс установления вынужденных колебаний

$$\ddot{q} + 2\varepsilon \dot{q} + \omega_0^2 q = Q(t) / a, \quad Q(t) = P \cos \theta t,$$

$$q(t) = q_1(t) + q_*(t), \quad q_1(t) = C_1 e^{-\varepsilon t} \cos \omega_\varepsilon t + C_2 e^{-\varepsilon t} \sin \omega_\varepsilon t,$$

$$q_*(t) = f \cos(\theta t - \varphi),$$

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}, \quad f_0 = \frac{P}{c}.$$

При $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q(t) = f_0 \frac{\cos(\theta t - \varphi) - e^{-\varepsilon t} A \cos(\omega_\varepsilon t - \chi)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right)^2}},$

где $A = \sqrt{\cos^2 \varphi + \frac{(\varepsilon \cos \varphi + \theta \sin \varphi)^2}{\omega_\varepsilon^2}}, \chi = \arctg \left(\frac{\varepsilon}{\omega_\varepsilon} + \frac{\theta}{\omega_\varepsilon} \operatorname{tg} \varphi \right).$

Неустановившиеся колебания для систем с конечным числом степеней свободы

Система без диссипации:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0.$$

Решение в пространстве главных координат:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{q}^*, \quad \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*.$$

$$\ddot{q}_k^* + \omega_k^2 q_k^* = Q_k^*(t), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$q_k^*(t) = q_{0k}^* \cos \omega_k t + \frac{\dot{q}_{0k}^*}{\omega_k} \sin \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t - \tau) Q_k^*(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{q}_0^* = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}_0^* = \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{q}}_0$$

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k^*(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Диссипативные системы:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{V}\mathbf{q}^*,$$

$$\ddot{\mathbf{q}}^* + 2[\varepsilon_{jk}]\dot{\mathbf{q}}^* + \text{diag}[\omega_k^2]\mathbf{q}^* = \mathbf{Q}^*$$

$$\ddot{q}_k^* + 2\varepsilon_k \dot{q}_k^* + \omega_k^2 q_k^* = Q_k^*(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$q_k^*(t) = e^{-\varepsilon_k t} \left[q_{0k}^* \left(\cos \omega_{\varepsilon k} t + \frac{\varepsilon_k}{\omega_{\varepsilon k}} \sin \omega_{\varepsilon k} t \right) \right] + \frac{\dot{q}_{0k}^*}{\omega_{\varepsilon k}} \sin \omega_{\varepsilon k} t + \frac{1}{\omega_{\varepsilon k}} \int_0^t e^{\varepsilon_k \tau} \sin \omega_{\varepsilon k} (t - \tau) Q_k^*(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$q_j(t) = \sum_{k=1}^n v_{jk} q_k^*(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Метод функций Грина

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad \sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{H}(t, \tau) \mathbf{Q}(\tau) d\tau, \quad q_j(t) = \sum_{k=1}^n h_{jk}(t, \tau) Q_k(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Механический смысл функций Грина: функция $h_{jk}(t, \tau)$ – это реакция системы в направлении j -й обобщенной координаты $q_j(t)$ на единичный

импульс $\delta(t - \tau)$, соответствующий обобщенной силе $Q_k(t)$, приложенный в момент времени $t = \tau$.

Применение преобразования Лапласа

Изображение по Лапласу функции-оригинала $q(t)$ задается прямым преобразованием Лапласа:

$$f(p) = \int_0^{\infty} q(t) e^{-pt} dt = L[q(t)].$$

Обратное преобразование Лапласа позволяет получить функцию-оригинал $q(t)$:

$$q(t) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\beta}^{\alpha + i\beta} f(p) e^{pt} dp = L^{-1}[f(p)].$$

Для системы с одной степенью свободы:

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{1}{a} Q(t),$$

$$(p^2 + 2\varepsilon p + \omega_0^2) f(p) = \frac{1}{a} F(p) + p q_0 + \dot{q}_0 + 2\varepsilon q_0,$$

$$f(p) = \frac{\frac{1}{a} F(p) + (p + 2\varepsilon) q_0 + \dot{q}_0}{p^2 + 2\varepsilon p + \omega_0^2}.$$

Для систем со многими степенями свободы:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t),$$

$$\mathbf{A}[p^2 \mathbf{f}(p) - p\mathbf{q}_0 - \dot{\mathbf{q}}_0] + \mathbf{B}[p\mathbf{f}(p) - \mathbf{q}_0] + \mathbf{C}\mathbf{f}(p) = \mathbf{F}(p),$$

$$(\mathbf{A}p^2 + \mathbf{B}p + \mathbf{C})\mathbf{f}(p) = \mathbf{F}(p) + (\mathbf{A}p + \mathbf{B})\mathbf{q}_0 + \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_0.$$

Методы борьбы с вибрациями

- 1) уравнивание (балансировка)
- 2) отстройка от резонанса
- 3) введение демпфирования
- 4) установка динамических гасителей колебаний (рис.5).

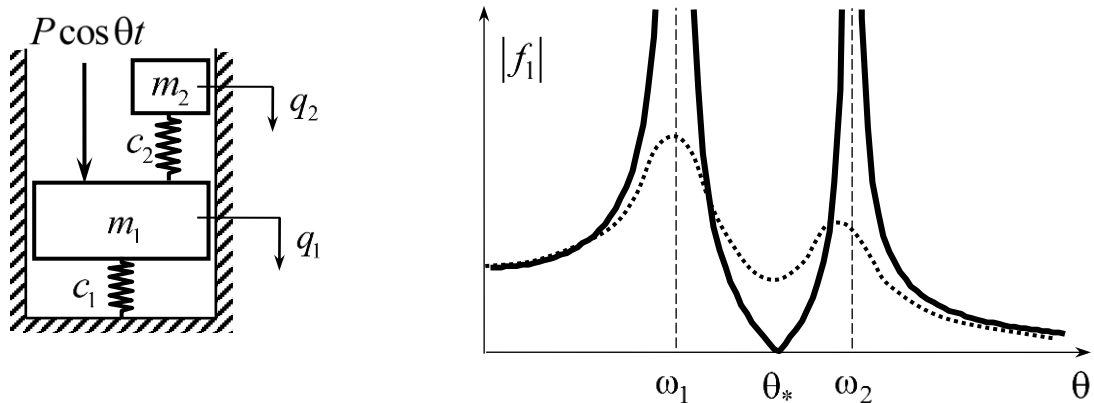


Рис.5. Система с динамическим гасителем (слева) и амплитудно-частотная характеристика

$$f_1 = \frac{(c_2 - m_2 \theta^2) P}{(c_1 + c_2 - m_1 \theta^2)(c_2 - m_2 \theta^2) - c_2^2}, \quad f_2 = \frac{c_2 P}{(c_1 + c_2 - m_1 \theta^2)(c_2 - m_2 \theta^2) - c_2^2}.$$

На частоте $\theta_* = \omega_{II} = \sqrt{c_2 / m_2}$ амплитуда $|f_1| = 0$.

5) Виброизоляция.

5а) Активная виброзащита (рис.6).

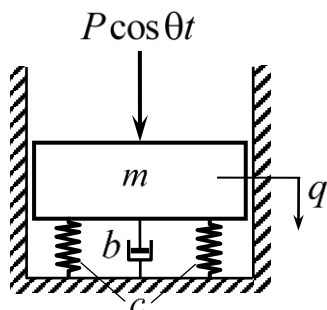


Рис.6.

Требуется снизить уровень вибраций, передаваемых от агрегата на фундамент.

$$Q_f(t) = cq(t) + b\dot{q}(t) = P_f \cos(\theta t - \chi).$$

$$P_f = f \sqrt{c^2 + b^2 \theta^2} = P \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}\right)^2}},$$

$$k_f = \frac{P_f}{P}.$$

5б). Пассивная виброзащита (рис.7). Необходимо виброизолировать прибор, то есть уменьшить влияние вибрации контейнера на прибор.

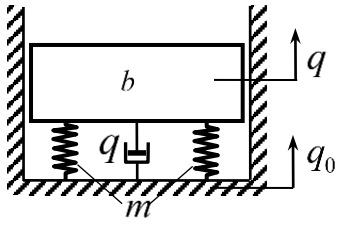


Рис.7.

$$q_0(t) = f_0 \cos \theta t, \quad q(t) = f \cos(\theta t - \varphi),$$

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2} \right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2} \right)^2}},$$

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}} - \arctg \frac{2\varepsilon\theta}{\omega_0^2}, \quad k_f = \frac{f}{f_0}.$$

2. ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К КУРСОВОМУ ПРОЕКТУ

График выполнения курсового проекта

Группа	Студент	Дата выдачи	Срок защиты
			17 неделя
Подпись преподавателя			
Контрольные сроки выполнения			
№ задания	Варианты схем	Срок выполнения	
1		3 неделя	
2		4 неделя	
3		5 неделя	
4		7 неделя	
5		9 неделя	
6		11неделя	
7		13 неделя	
8		15 неделя	
Оформление и сдача отчета по проекту		16 неделя	

Указания по оформлению курсового проекта

1. Текстовая часть пояснительной записки выполняется на листах писчей бумаги форматом А4 (210×297 мм). Листы вместе с бланком задания и титульным листом сшиваются в тетрадь. Листы нумеруются (кроме титульного листа), номер проставляется в правом верхнем углу.

2. Текстовая часть должна представлять последовательное изложение теоретических положений и подробное решение предложенных заданий с пояснениями. Содержание разделов разделяется на подразделы. Разделы нумеруются арабскими цифрами, подразделы снабжаются двойной нумерацией (1.1, 1.2 и т.д.). Каждый раздел и подраздел должен иметь заголовок, отражающий его содержание, например, 2.2. Применение теоремы о движении центра масс для составления уравнения движения.

3. Все используемые обозначения должны быть объяснены. Не допускается приведение формул и вычислений без текстовых комментариев. Формулы снабжаются двойной нумерацией в круглых скобках; например, (2.3). Первая цифра обозначает номер раздела, вторая – порядковый номер в данном разделе.

4. Схемы и графики выполняются средствами компьютерной графики. На графиках следует проставлять обозначения величин с указанием их размерностей. Все иллюстрации именуются рисунками, рисунки нумеруются (например, рис. 2.3) и снабжаются содержательной подписью.

5. В конце пояснительной записки приводится список использованной литературы с указанием авторов, наименования, издательства, года издания и количества страниц.

6. При исправлении проверенного текста не допускается заменять листы с вопросами и замечаниями. Мелкие исправления проводятся в тексте, а крупные – на новых листах. Курсовой проект, оформленный с нарушением настоящих указаний, не принимается.

7. При решении задач **допускается применять ИИ исключительно** для создания программ для построения графиков законов движения. В этом случае обязательно: 1) прикладывать к задаче инструкцию для ИИ и 2) тщательно проверять программные коды. Вывод уравнений движения и их решение, а также анализ полученных результатов выполняются и излагаются студентом самостоятельно. Ответственность за результат всегда лежит на студенте!

Содержание курсового проекта

Задание 1. Закон движения системы

Для приведенной на схеме механической системы составить уравнение движения, используя одну из общих теорем динамики. Для выбранных начальных условий найти закон движения системы. Построить графики изменения во времени обобщенной координаты, скорости и ускорения.

Задание 2. Закон движения системы

Применив одну из общих теорем динамики, составить уравнение движения для заданной механической системы. Определить закон движения для выбранных начальных условий. Построить графики изменения во времени обобщенной координаты, скорости и ускорения.

Задание 3. Уравнения Лагранжа второго рода

Для заданной механической системы определить число степеней свободы, ввести и описать обобщенные координаты. Составить выражения для кинетической, потенциальной энергии или виртуальной работы. Вычислить необходимые частные производные, обобщенные силы и составить уравнения Лагранжа второго рода.

Задание 4. Вывод линеаризованных уравнений движения

Для заданной системы составить выражения для потенциальной и кинетической энергии в квадратичном приближении. Вычислить обобщенные силы. Составить линеаризованные уравнения движения.

Задание 5. Исследование колебаний системы с одной степенью свободы

Для заданной системы вывести уравнение малых колебаний. Определить собственную частоту. С учетом демпфирования при декременте колебаний $\delta = 0,08$ и подобранных начальных условиях получить уравнение фазовой траектории. Результат проиллюстрировать графически.

Задание 6. Исследование свободных колебаний системы с двумя степенями свободы

Для заданной системы вывести уравнения малых колебаний. Получить уравнение собственных частот и определить эти частоты. Определить собственные формы колебаний, дать их геометрическую интерпретацию. Проверить выполнение условий ортогональности по потенциальной и кинетической энергии. Найти закон движения системы, удовлетворяющий выбранным начальным условиям. Построить соответствующие графики.

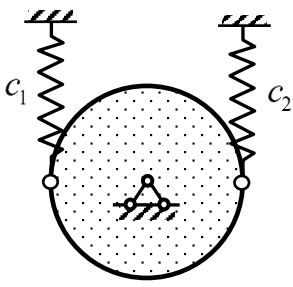
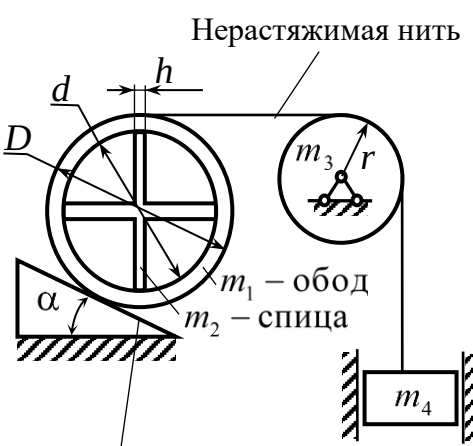
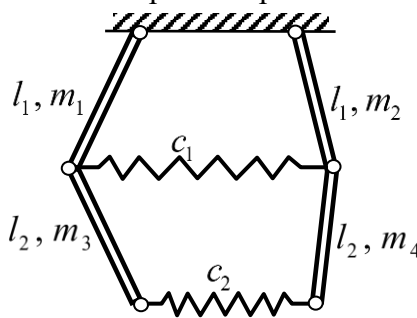
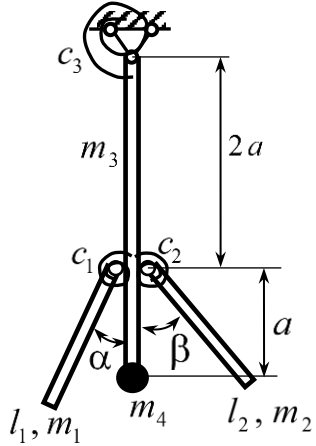
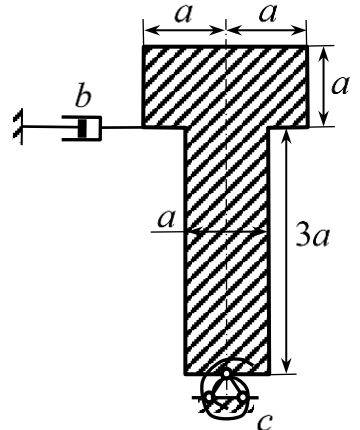
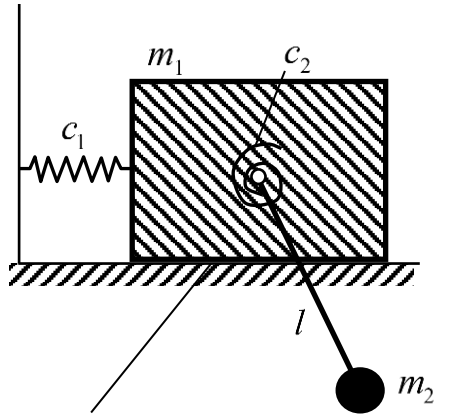
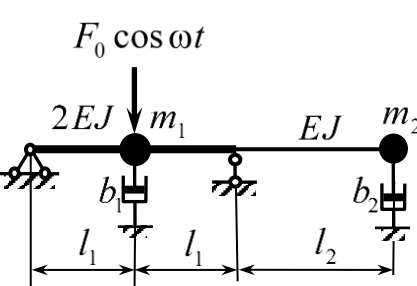
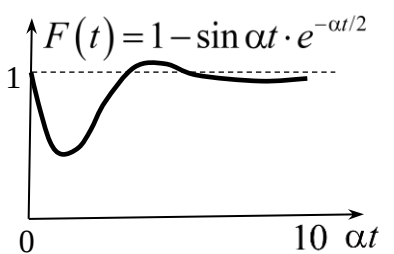
Задание 7. Исследование вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы

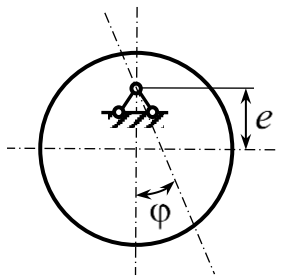
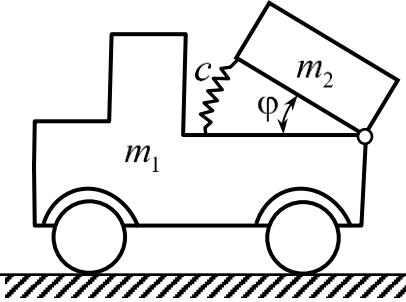
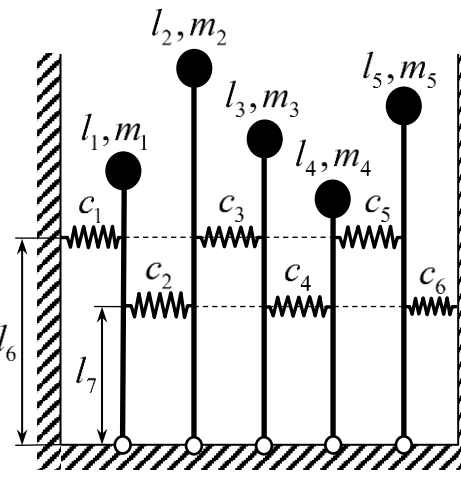
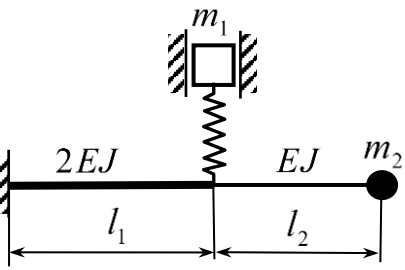
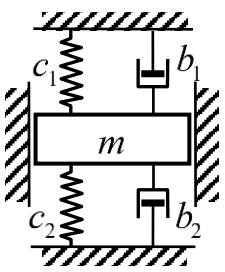
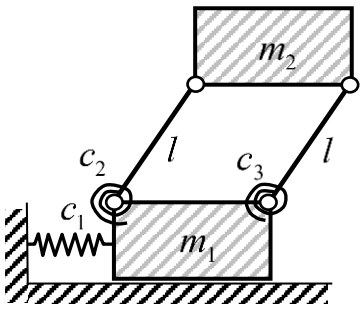
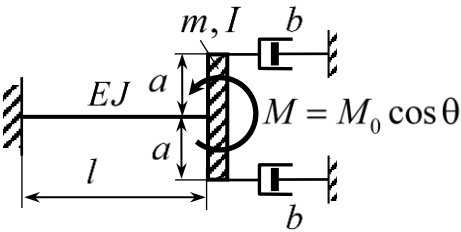
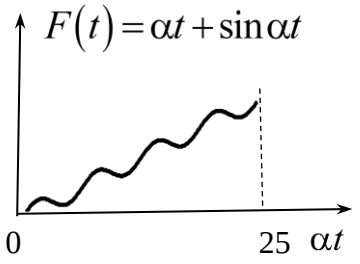
Вывести уравнения малых колебаний системы с учетом демпфирования. Методом комплексных амплитуд получить выражения для амплитуд установившихся вынужденных колебаний. Построить амплитудно-частотные кривые без учета и с учетом демпфирования при $\delta = 0, 1$.

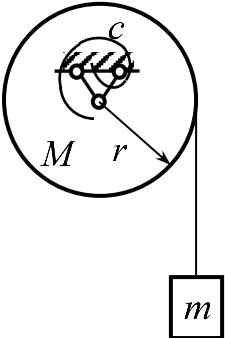
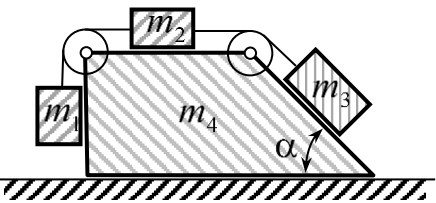
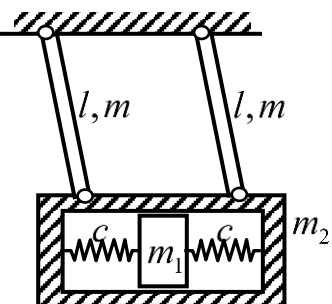
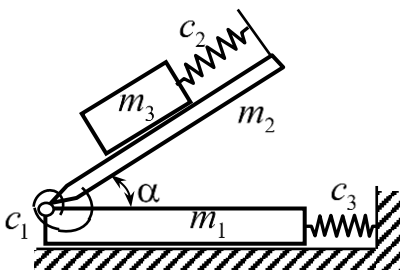
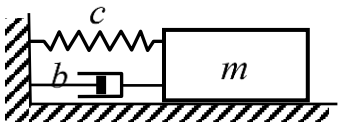
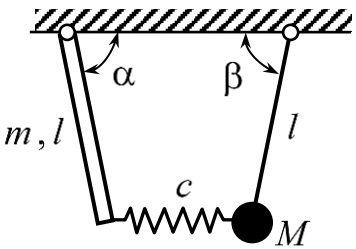
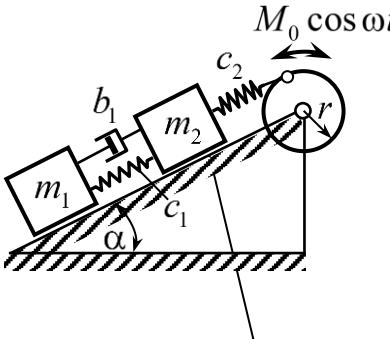
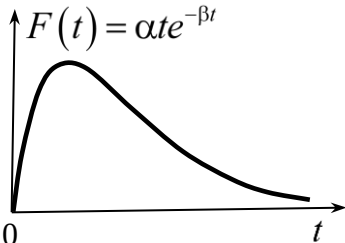
Задание 8. Изучение неустановившихся колебаний

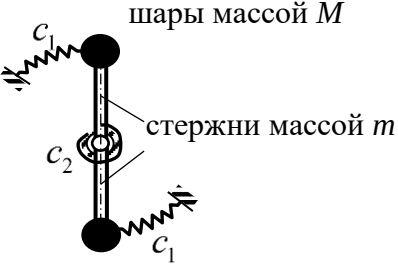
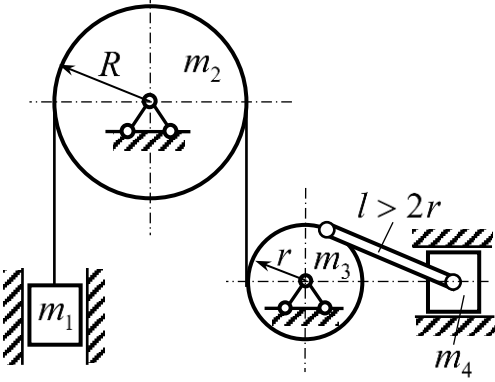
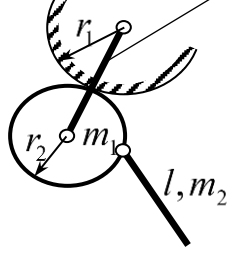
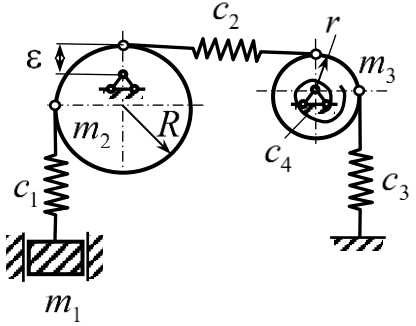
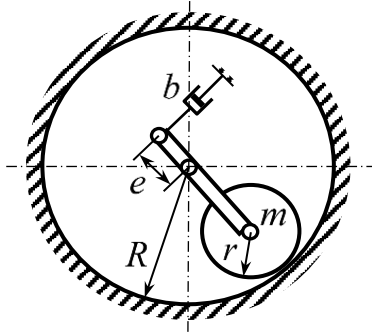
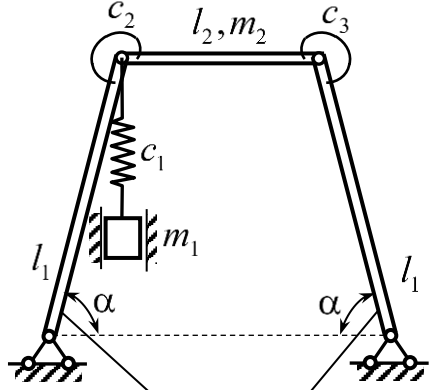
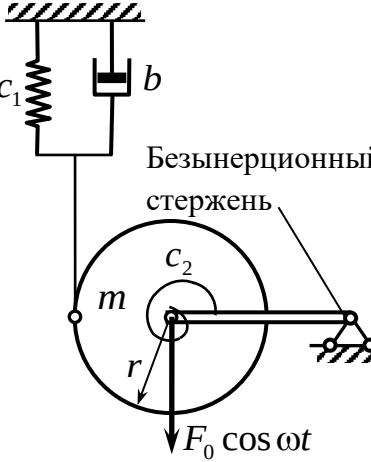
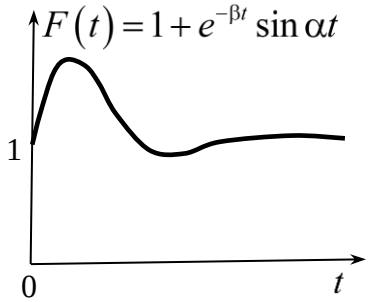
Движение системы описывается уравнением $\ddot{q} + \omega_0^2 q = F(t) / a$. Получить решение уравнения при нулевых начальных условиях. Построить графики $q(t)$ при $\alpha = (0.5, 1, 2)\omega_0$.

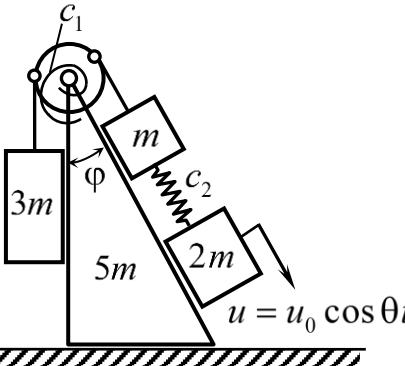
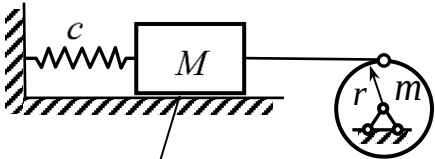
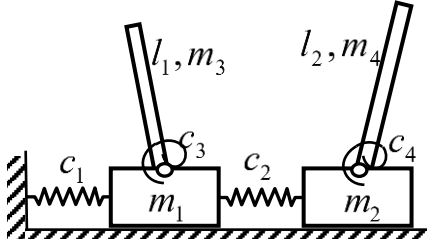
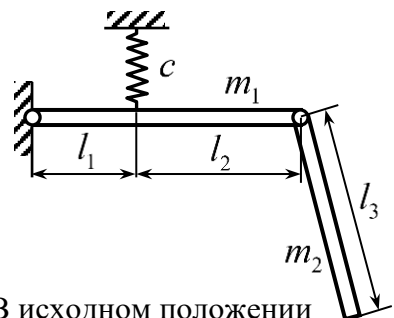
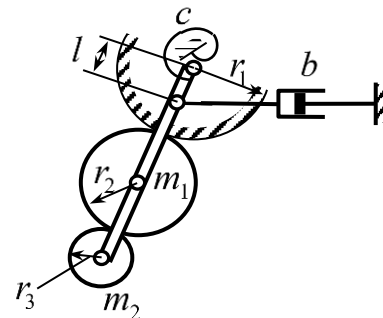
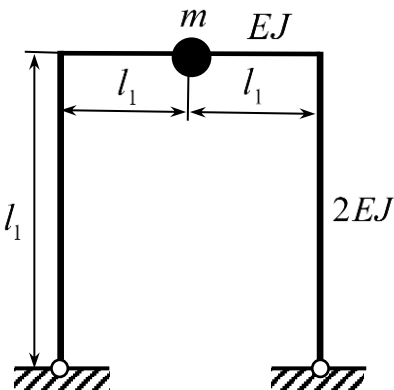
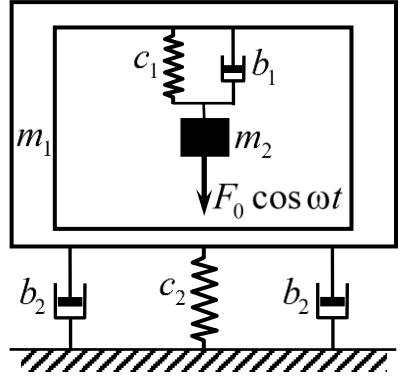
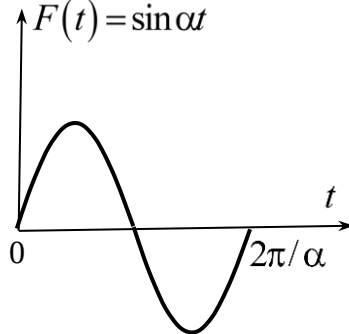
Внимание. Приведенные ниже варианты расчетных схем не снабжены числовыми значениями параметров. Студенту предлагается самостоятельно подобрать эти значения, руководствуясь следующими рекомендациями: масса – 1...100 кг; линейные размеры – 0.1...2 м; жесткости пружин – $10^4 \dots 10^6$ Н/м или $10^5 \dots 10^7$ Нм/рад; сила – $10^3 \dots 10^5$ Н; момент – $10^4 \dots 10^6$ Нм; начальные условия – $q(0) = 0 \dots 0.05$ м ($0 \dots 0.1$ рад), $\dot{q}(0) = 0 \dots 5$ м/с ($0 \dots 0.5$ рад/с). Отрезок времени для построения графиков $[0, t_*]$, $t_* = (5 \dots 10)T_1$, $T_1 = 2\pi / \omega_1$, где ω_1 – низшая собственная частота. Критерием адекватности выбранных числовых значений служит малость перемещений.

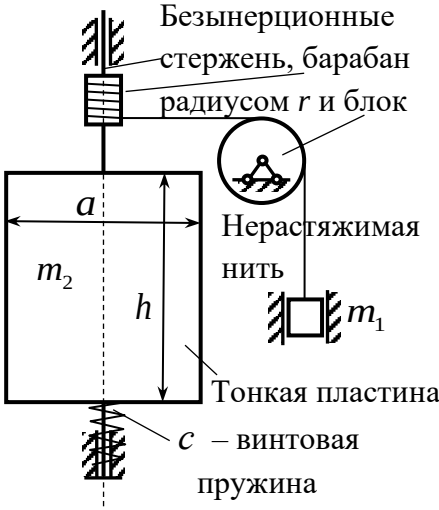
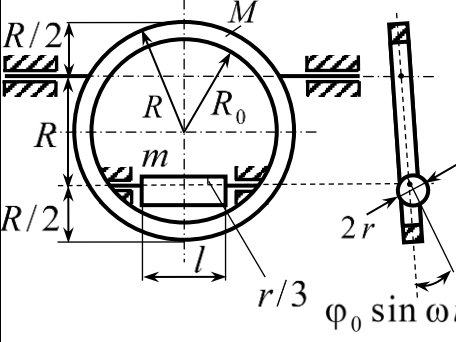
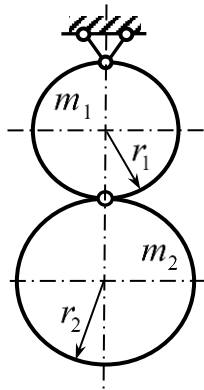
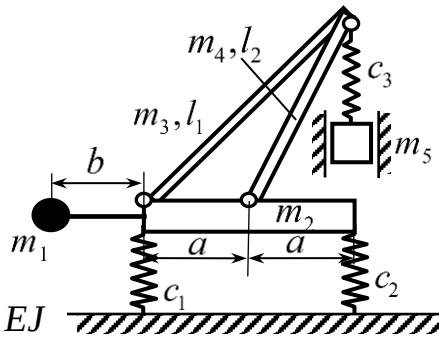
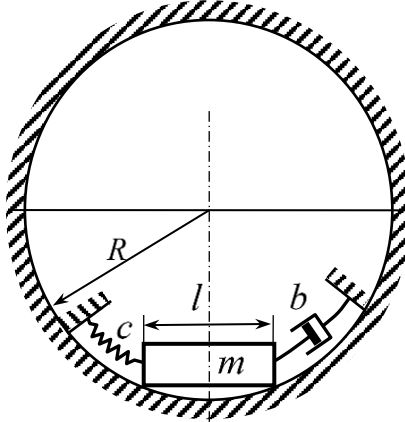
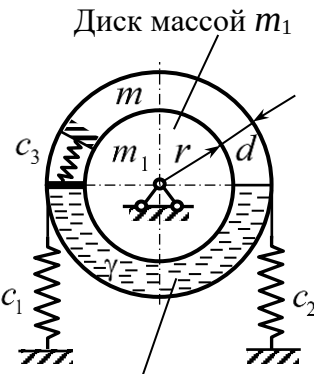
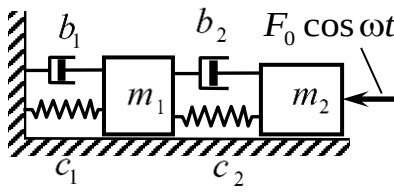
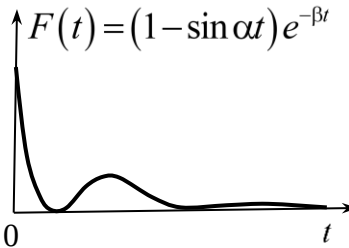
Вариант 1, задание 1  Диск массой M, радиуса R	Вариант 1, задание 2  Нерастяжимая нить m_1 – обод m_2 – спица Шероховатая поверхность	Вариант 1, задание 3 В положении равновесия все стержни вертикальны. 	Вариант 1, задание 4 
Вариант 1, задание 5 	Вариант 1, задание 6  Абсолютно гладкие поверхности, начальное положение стрелы – вертикальное.	Вариант 1, задание 7 	Вариант 1, задание 8  $F(t) = 1 - \sin \alpha t \cdot e^{-\alpha t/2}$

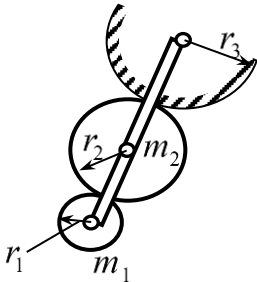
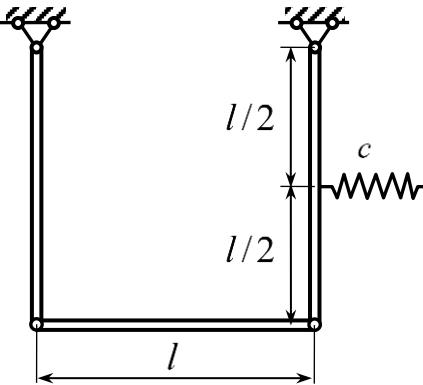
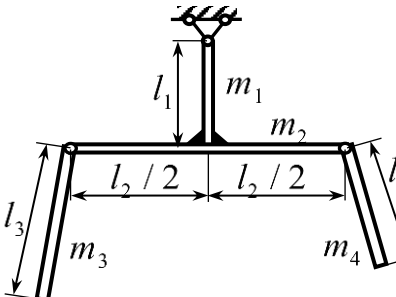
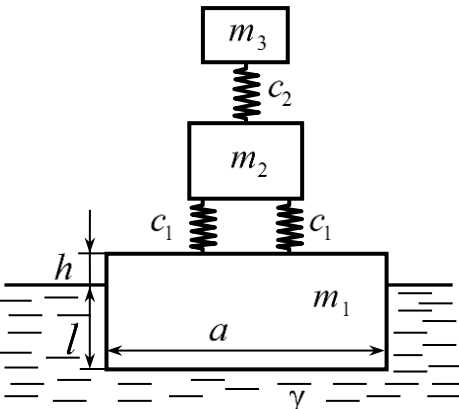
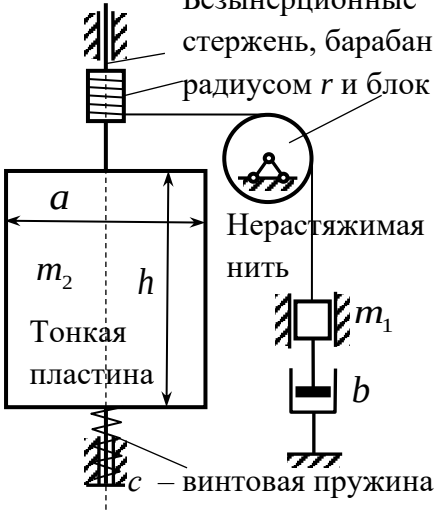
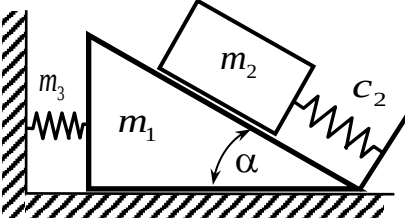
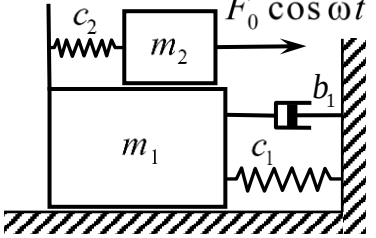
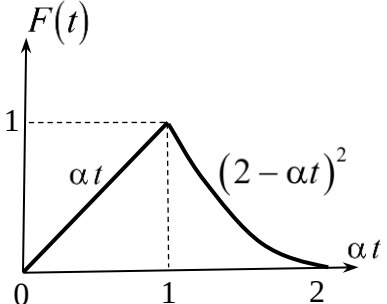
Вариант 2, задание 1  Цилиндр массой M, радиуса r, длиной l	Вариант 2, задание 2 $\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin \omega t$  Движение без трения. Движение груза задано.	Вариант 2, задание 3 	Вариант 2, задание 4  Трением пренебречь.
Вариант 2, задание 5 	Вариант 2, задание 6  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 2, задание 7 	Вариант 2, задание 8 

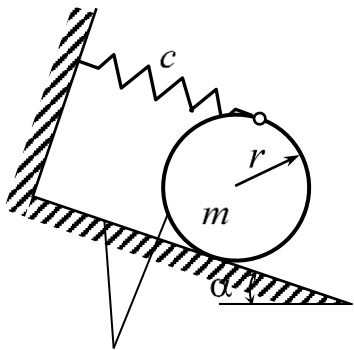
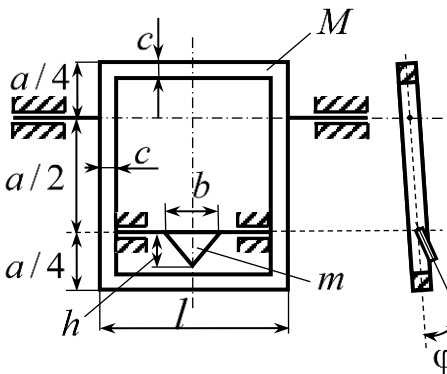
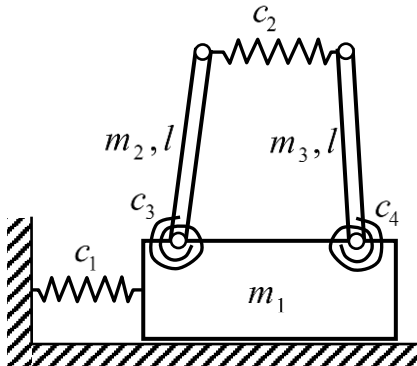
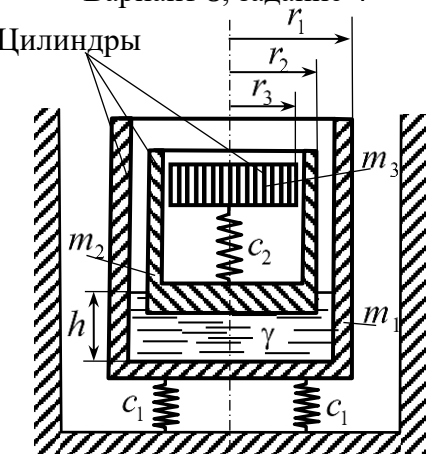
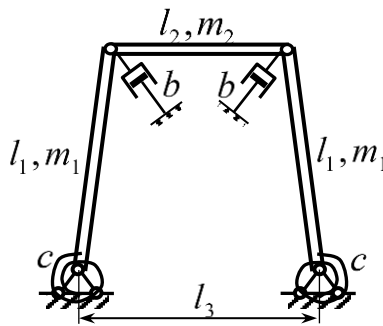
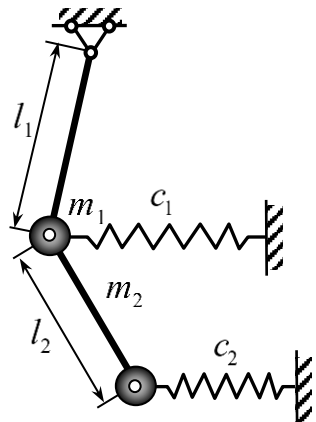
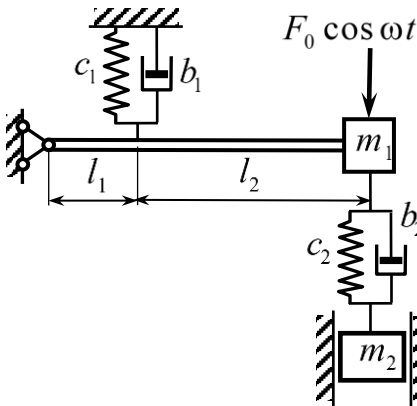
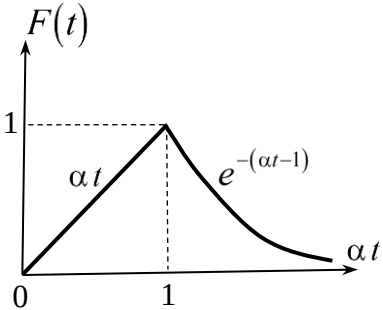
Вариант 3, задание 1 	Вариант 3, задание 2  Абсолютно гладкие поверхности. Невесомые блоки. Нерастяжимая нить.	Вариант 3, задание 3  В положении равновесия стержни вертикальны.	Вариант 3, задание 4  Трением пренебречь.
Вариант 3, задание 5  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 3, задание 6 	Вариант 3, задание 7  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 3, задание 8 

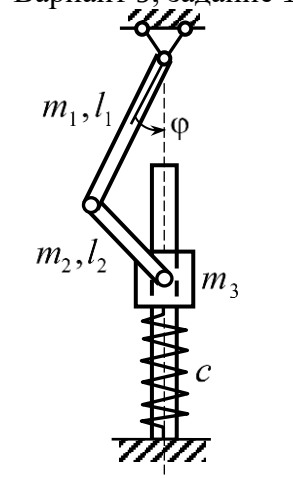
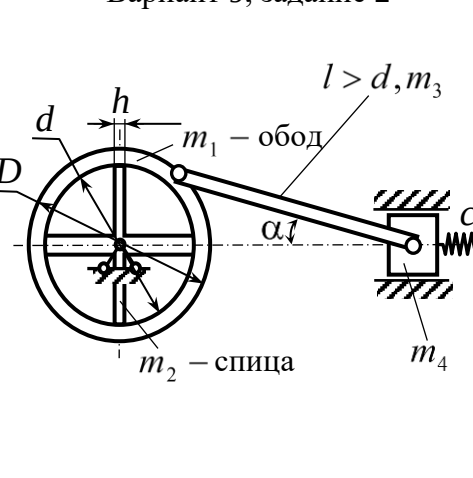
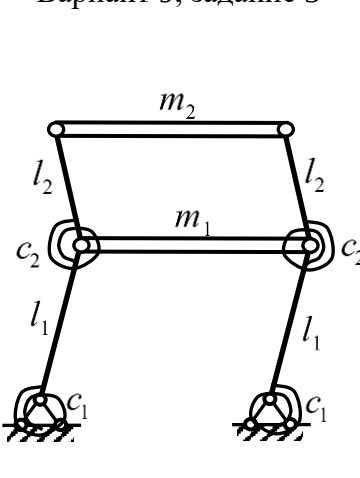
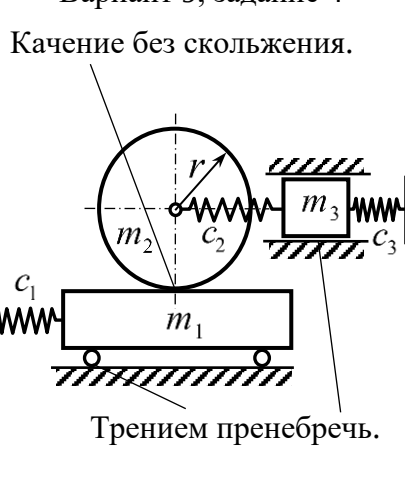
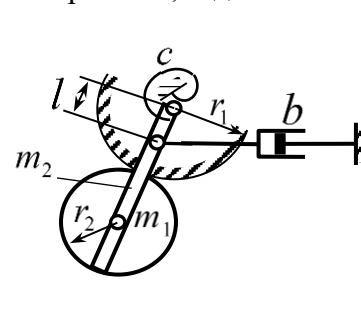
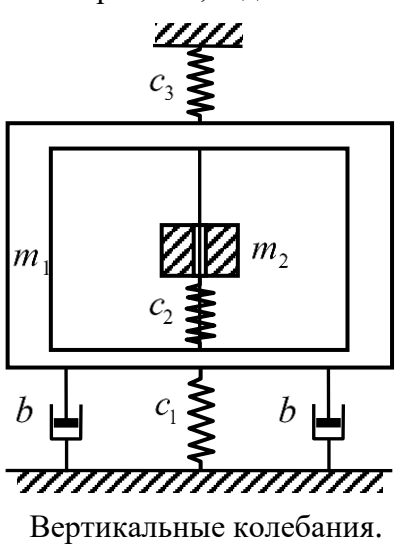
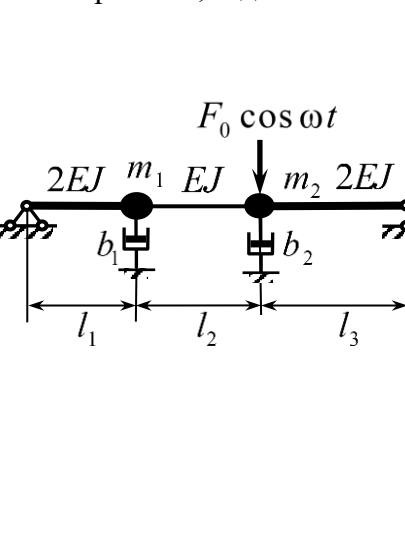
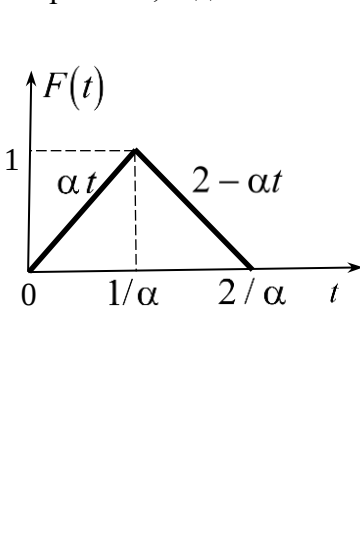
Вариант 4, задание 1  шары массой M стержни массой m	Вариант 4, задание 2 	Вариант 4, задание 3 Безынерционный стержень  В положении равновесия стержни вертикальны. Поверхности абсолютно шероховатые.	Вариант 4, задание 4 
Вариант 4, задание 5  Абсолютно шероховатые поверхности.	Вариант 4, задание 6  Безынерционные стержни	Вариант 4, задание 7  Безынерционный стержень	Вариант 4, задание 8  $F(t) = 1 + e^{-\beta t} \sin \alpha t$

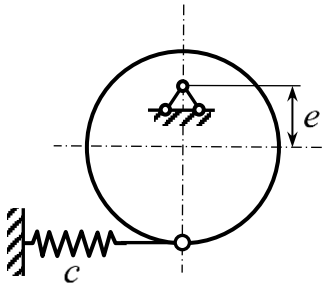
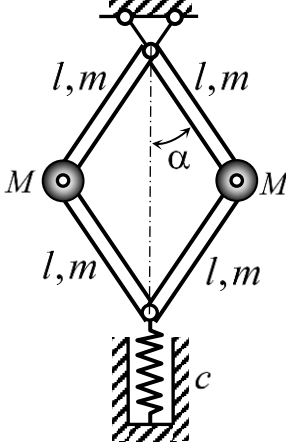
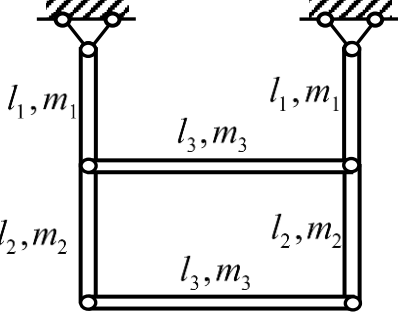
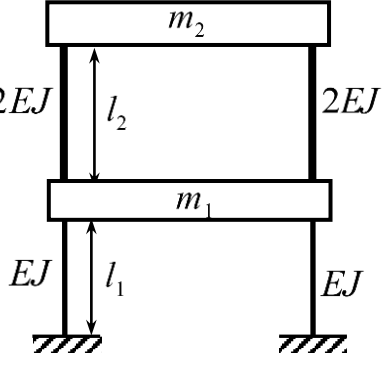
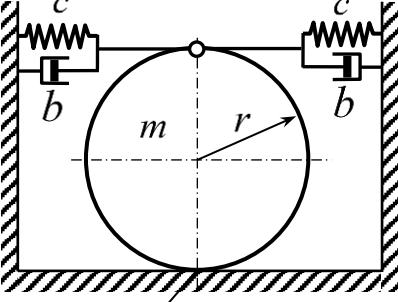
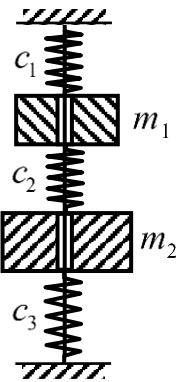
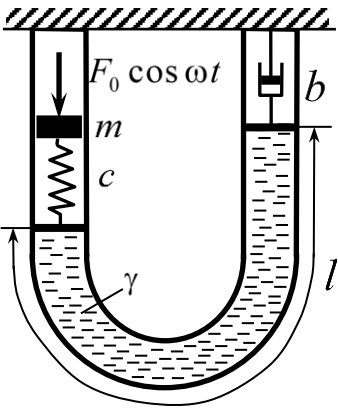
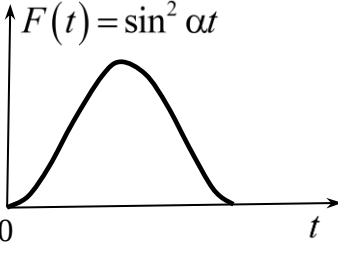
Вариант 5, задание 1  Абсолютно гладкие поверхности. Задано перемещение тела $2m$.	Вариант 5, задание 2  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 5, задание 3  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 5, задание 4  В исходном положении правый стержень вертикален.
Вариант 5, задание 5  В положении равновесия безынерционный стержень вертикален. Поверхности абсолютно шероховатые.	Вариант 5, задание 6 	Вариант 5, задание 7  Вертикальные колебания.	Вариант 5, задание 8 

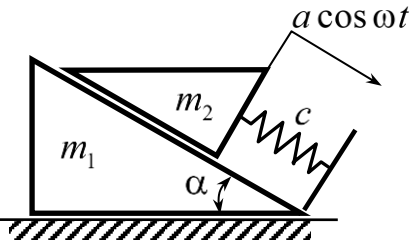
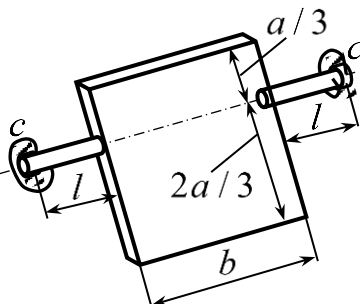
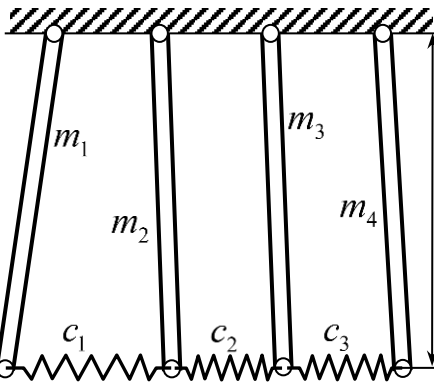
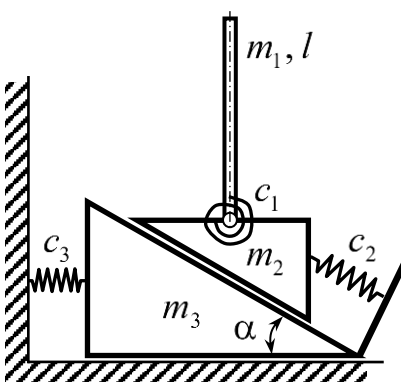
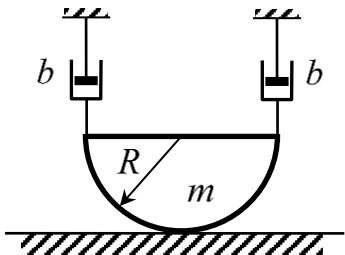
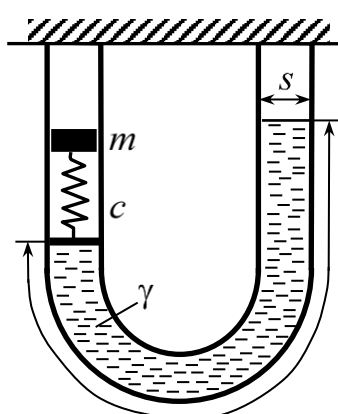
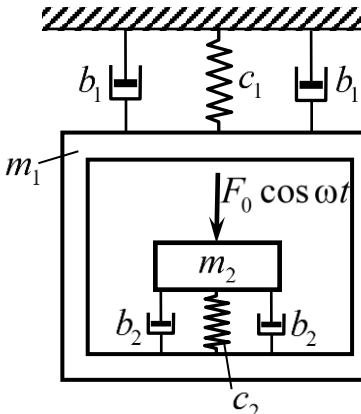
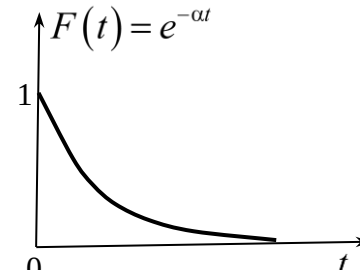
Вариант 6, задание 1  Безынерционные стержень, барабан радиусом r и блок Нерастяжимая нить Тонкая пластина c – винтовая пружина	Вариант 6, задание 2  Задан закон движения цилиндра.	Вариант 6, задание 3 	Вариант 6, задание 4 
Вариант 6, задание 5  Абсолютно гладкая поверхность.	Вариант 6, задание 6  Трубка диаметром d	Вариант 6, задание 7 	Вариант 6, задание 8  $F(t) = (1 - \sin \alpha t) e^{-\beta t}$

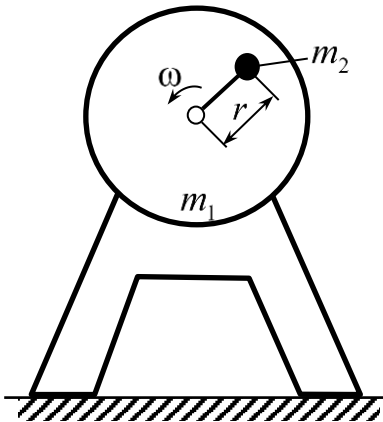
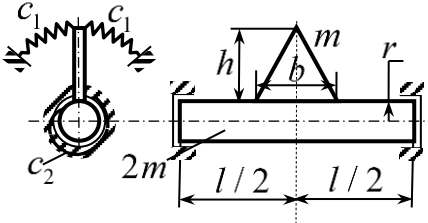
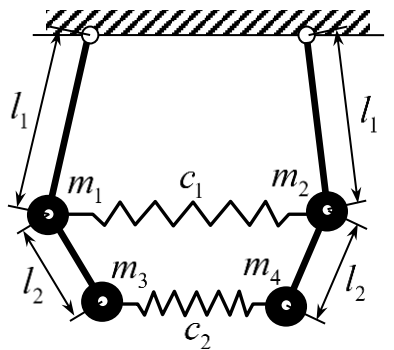
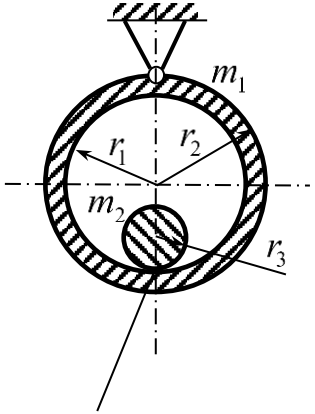
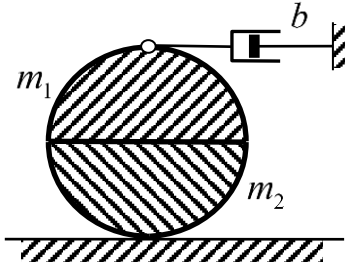
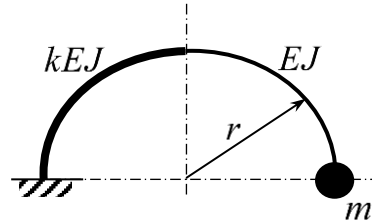
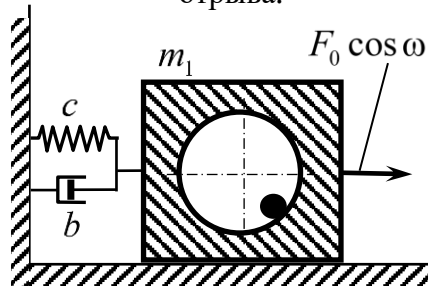
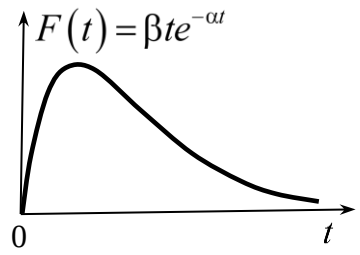
Вариант 7, задание 1  В положении равновесия безынерционный стержень вертикален. Поверхности абсолютно шероховатые	Вариант 7, задание 2  Стержни жесткие, массой m.	Вариант 7, задание 3  В начальном положении боковые стержни вертикальны.	Вариант 7, задание 4  Вертикальные колебания парма с грузами.
Вариант 7, задание 5 Безынерционные стержень, барабан радиусом r и блок  Нерастяжимая нить Тонкая пластина c – винтовая пружина	Вариант 7, задание 6  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 7, задание 7 	Вариант 7, задание 8 

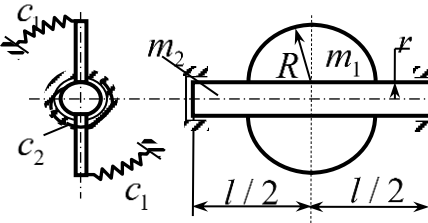
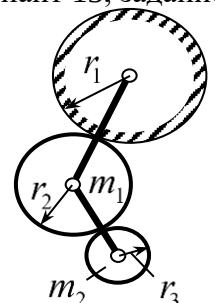
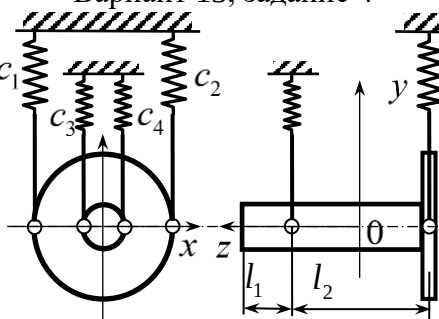
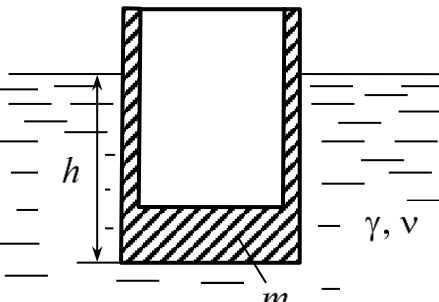
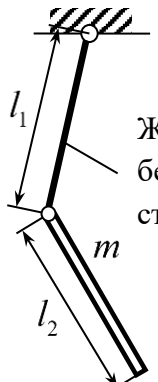
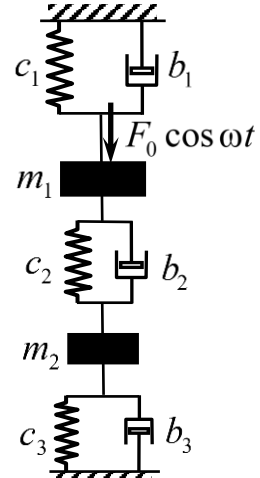
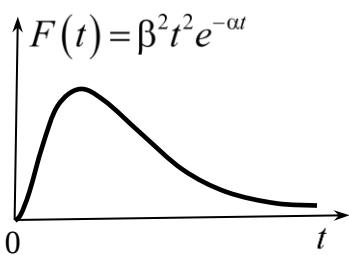
Вариант 8, задание 1  Шероховатые поверхности	Вариант 8, задание 2 	Вариант 8, задание 3  Абсолютно гладкие поверхности	Вариант 8, задание 4  Вертикальные колебания
Вариант 8, задание 5 	Вариант 8, задание 6  В положении равновесия стержни вертикальны.	Вариант 8, задание 7 	Вариант 8, задание 8 

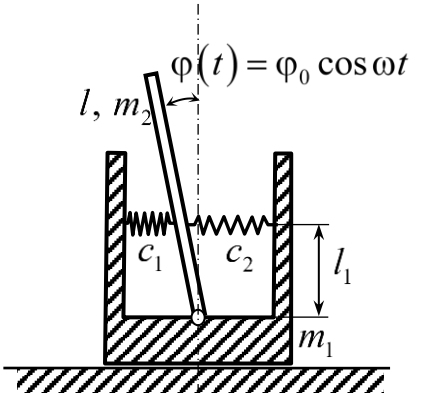
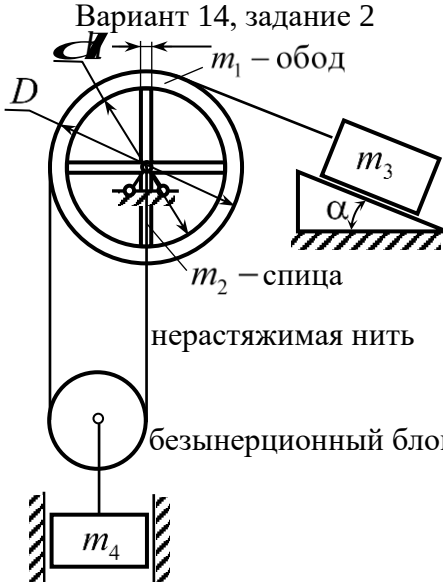
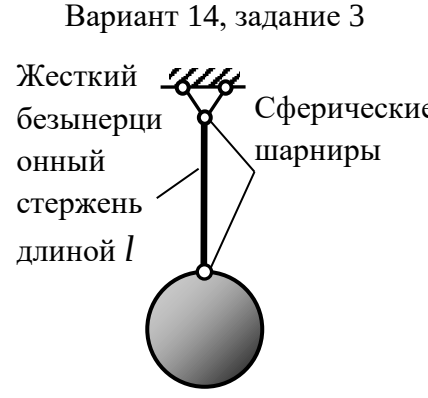
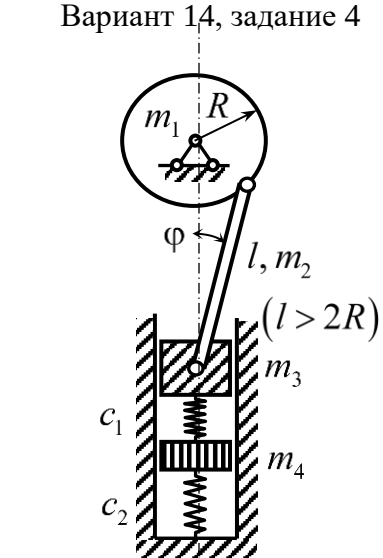
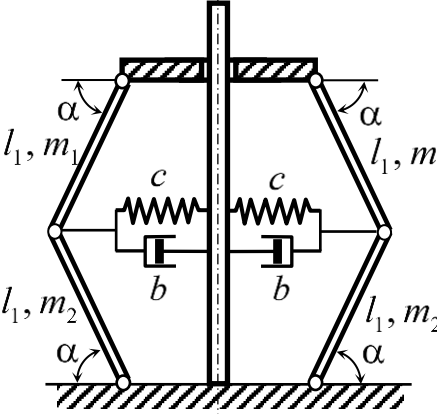
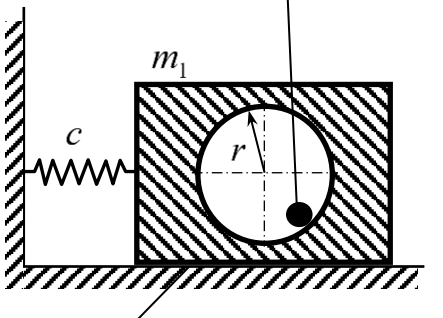
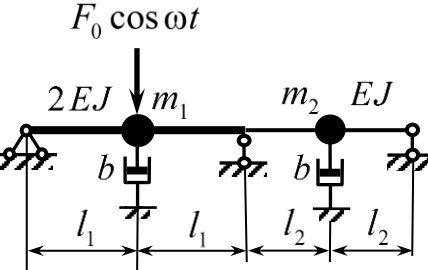
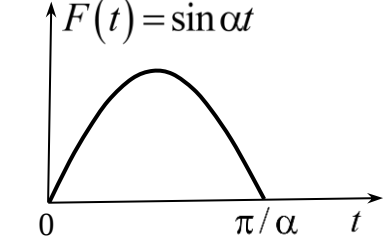
Вариант 9, задание 1  Трением пренебречь.	Вариант 9, задание 2  Трением пренебречь.	Вариант 9, задание 3  Трением пренебречь.	Вариант 9, задание 4 Качение без скольжения.  Трением пренебречь.
Вариант 9, задание 5  В положении равновесия стержень вертикален. Поверхности абсолютно шероховатые.	Вариант 9, задание 6  Вертикальные колебания.	Вариант 9, задание 7  Вертикальные колебания.	Вариант 9, задание 8 

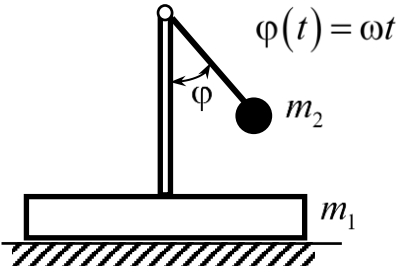
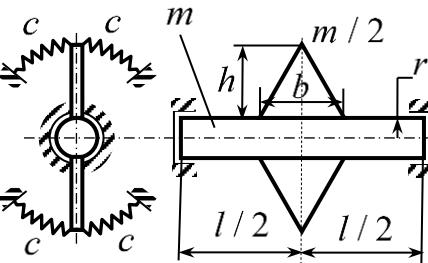
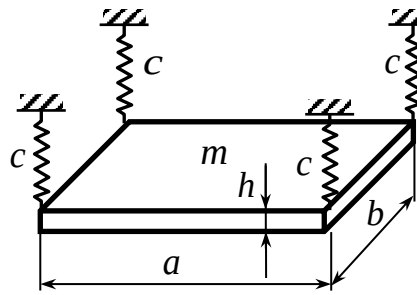
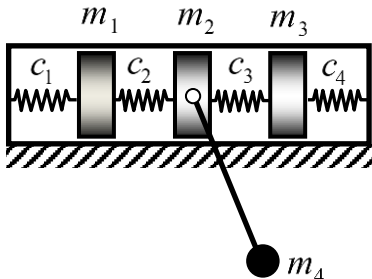
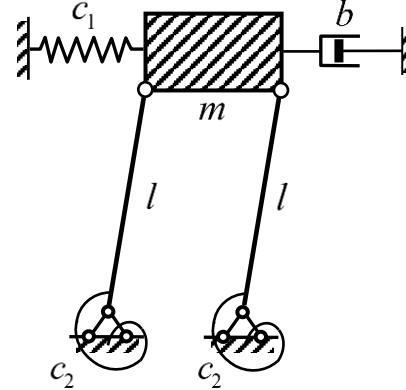
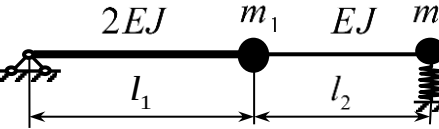
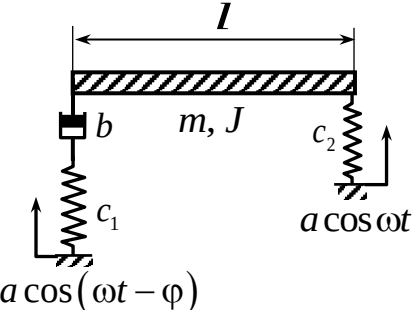
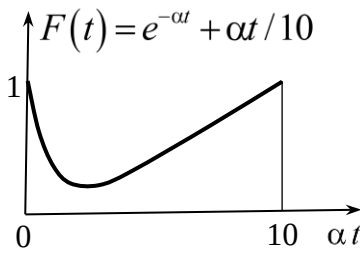
Вариант 10, задание 1  Цилиндр массой M радиусом r длиной L	Вариант 10, задание 2 	Вариант 10, задание 3 	Вариант 10, задание 4 
Вариант 10, задание 5  Скольжение отсутствует	Вариант 10, задание 6 	Вариант 10, задание 7  Трубка диаметром d.	Вариант 10, задание 8 

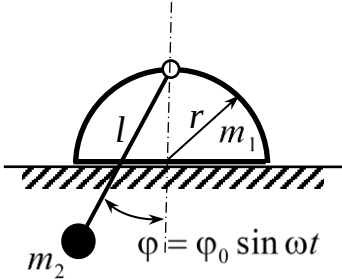
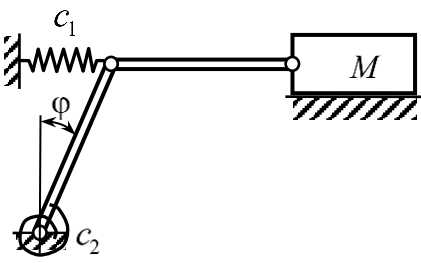
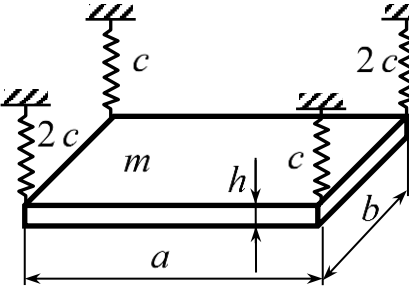
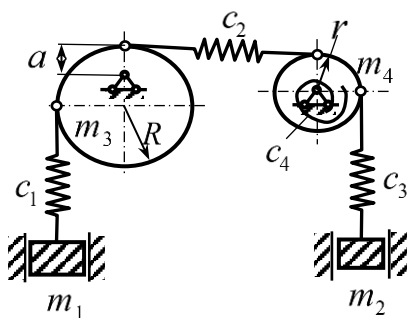
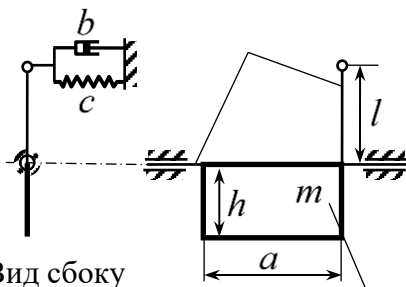
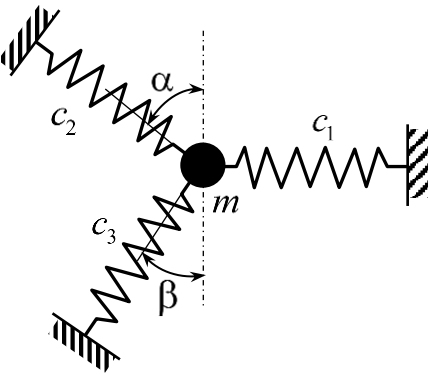
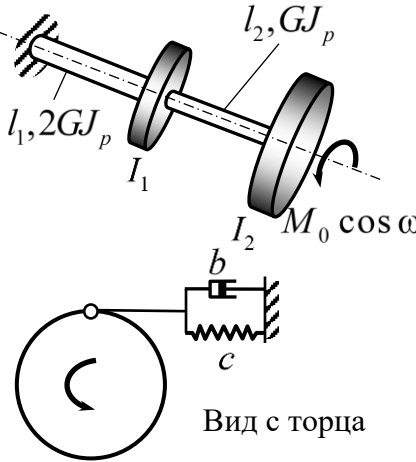
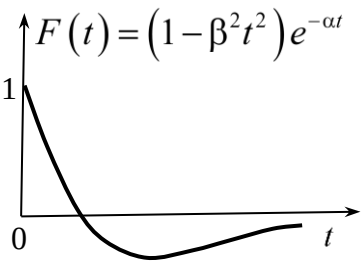
Вариант 11, задание 1  Все поверхности абсолютно гладкие. Задан закон относительного движения второй массы.	Вариант 11, задание 2  Два цилиндра массой m и радиуса r соединены пружинами с неподвижными втулками и с тонкой пластиной массой M.	Вариант 11, задание 3  В положении равновесия все стержни вертикальны.	Вариант 11, задание 4  Трением пренебречь.
Вариант 11, задание 5  Сплошной однородный полудиск движется без проскальзывания.	Вариант 11, задание 6 	Вариант 11, задание 7  Вертикальные колебания.	Вариант 11, задание 8 

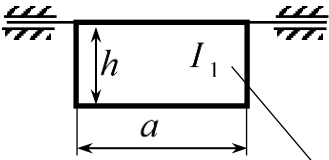
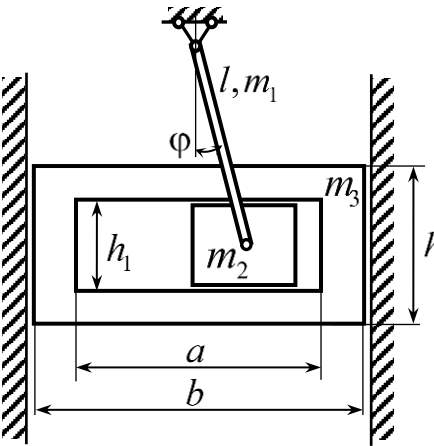
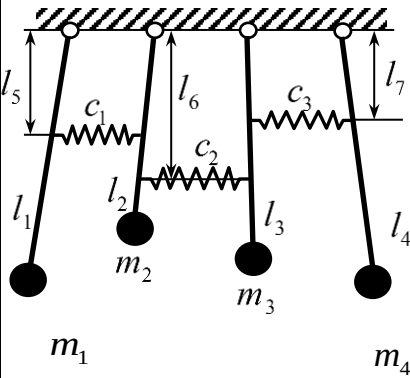
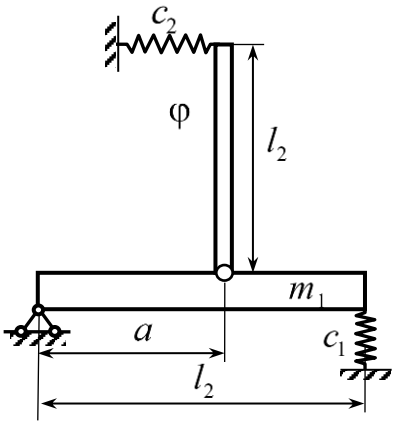
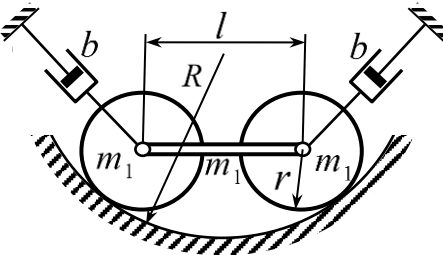
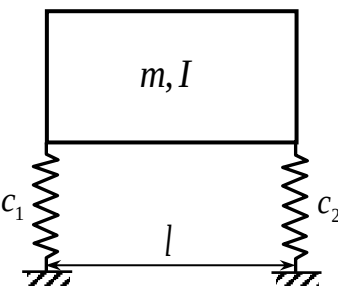
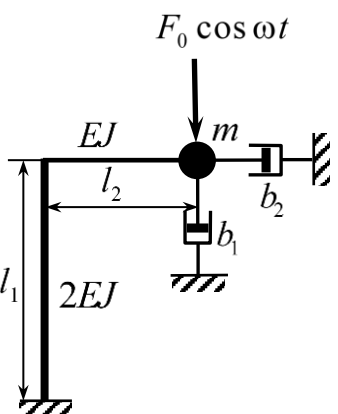
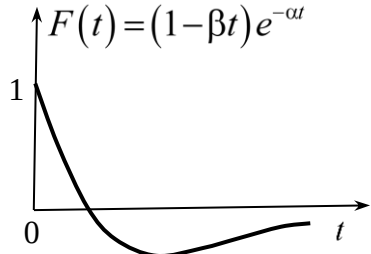
Вариант 12, задание 1  Абсолютно гладкая поверхность.	Вариант 12, задание 2 	Вариант 12, задание 3  В положении равновесия все жесткие безынерционные стержни вертикальны	Вариант 12, задание 4  Качение без скольжения.
Вариант 12, задание 5  Сплошные однородные полудиски, $m_2 > m_1$. Абсолютно шероховатые поверхности.	Вариант 12, задание 6 	Вариант 12, задание 7 Точечная масса m_2 внутри куба движется без трения и отрыва.  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 12, задание 8 

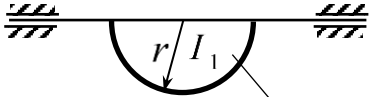
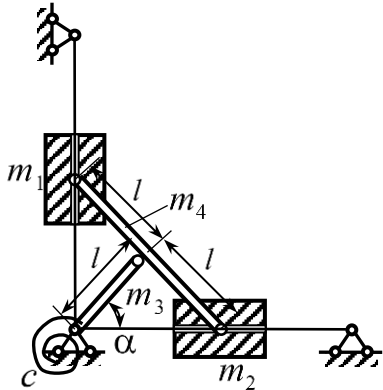
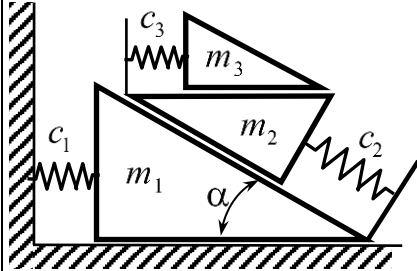
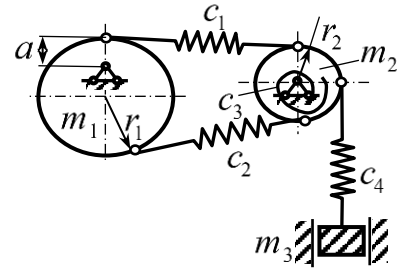
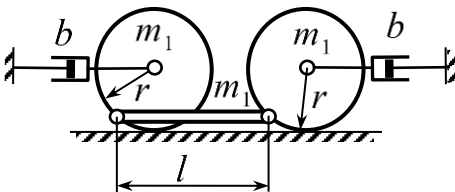
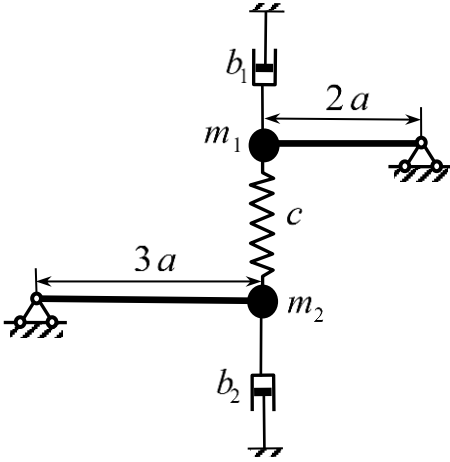
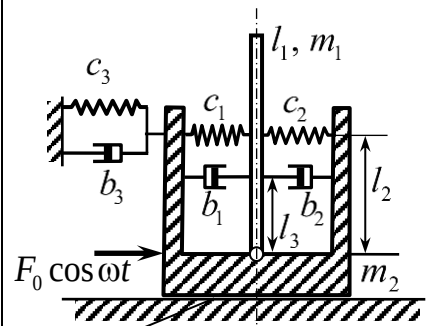
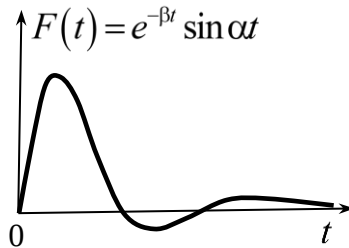
Вариант 13, задание 1 Точечная масса m_2 движется по закону $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t$ без трения и отрыва.  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 13, задание 2 	Вариант 13, задание 3  В положении равновесия безынерционные стержни вертикальны. Поверхности абсолютно шероховатые.	Вариант 13, задание 4  Цилиндр радиуса r и тонкий диск радиуса R плотностью ρ вращаются относительно осей Ox, Oz и движутся вдоль Oy. Точка O – центр масс системы.
Вариант 13, задание 5  Вертикальные колебания.	Вариант 13, задание 6  Жесткий безынерционный стержень	Вариант 13, задание 7 	Вариант 13, задание 8 

Вариант 14, задание 1  Задан закон относительного движения. Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 14, задание 2  Жесткий безынерционный стержень длиной l	Вариант 14, задание 3  Пространственные колебания шара радиуса R и массой m.	Вариант 14, задание 4 
Вариант 14, задание 5 	Вариант 14, задание 6 Точечная масса m_2 движется без трения и отрыва.  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 14, задание 7 	Вариант 14, задание 8 

Вариант 15, задание 1  Абсолютно гладкие поверхности. Относительное движение сосредоточенной массы задано.	Вариант 15, задание 2  Абсолютно жесткая плита.	Вариант 15, задание 3  Трением пренебречь.	Вариант 15, задание 4 
Вариант 15, задание 5  В положении равновесия жесткие безынерционные стержни вертикальны.	Вариант 15, задание 6 	Вариант 15, задание 7 	Вариант 15, задание 8 

Вариант 16, задание 1  $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 16, задание 2  Стержни массой m, длиной l. В положении равновесия $\varphi = 0$. Трением пренебречь.	Вариант 16, задание 3  Абсолютно жесткая плита.	Вариант 16, задание 4 
Вариант 16, задание 5 Все стержни - жесткие безынерционные.  Вид сбоку Тонкая пластина	Вариант 16, задание 6 	Вариант 16, задание 7  Вид с торца	Вариант 16, задание 8  $F(t) = (1 - \beta^2 t^2) e^{-\alpha t}$

Вариант 17, задание 1  Тонкая пластина	Вариант 17, задание 2 В положении равновесия $\varphi = \varphi_0$ Трением пренебречь. 	Вариант 17, задание 3  В положении равновесия все жесткие безынерционные стержни вертикальны.	Вариант 17, задание 4 
Вариант 17, задание 5  Абсолютно шероховатые поверхности.	Вариант 17, задание 6  Вертикальное движение центра масс.	Вариант 17, задание 7 	Вариант 17, задание 8 

Вариант 18, задание 1  Полудиск	Вариант 18, задание 2 В положении равновесия $\alpha = 45^\circ$ Трение отсутствует. 	Вариант 18, задание 3  Трение отсутствует.	Вариант 18, задание 4 
Вариант 18, задание 5  Движение без проскальзывания.	Вариант 18, задание 6 	Вариант 18, задание 7  Абсолютно гладкие поверхности.	Вариант 18, задание 8 

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

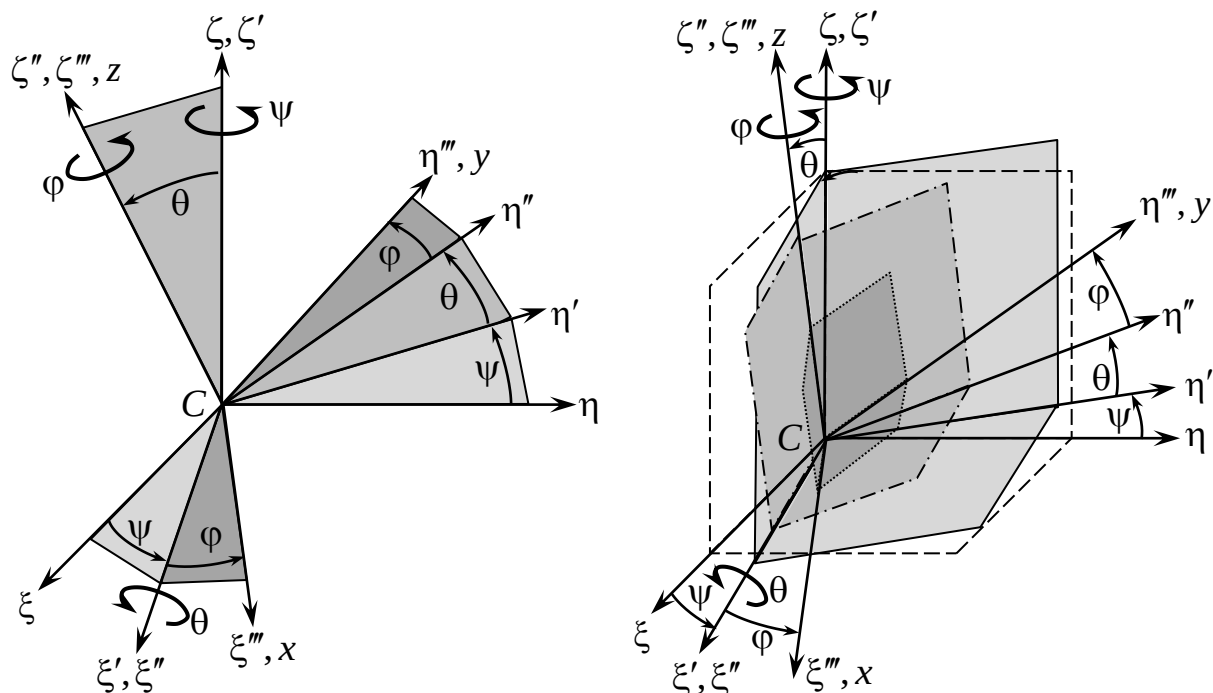
а) основная литература:

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Колебания линейных систем (том 1) / Под ред. В.В. Болотина. 2-е издание. – М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
2. Трифонов О.В. Колебания систем с конечным числом степеней свободы. Учебное пособие. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. 56 с.
3. Окопный Ю.А., Радин В.П., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. Учебник для вузов (2-е издание, дополненное). – М.: Машиностроение, 2002. 436 с.
4. Окопный Ю.А., Радин В.П., Хроматов В.Е., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. Сборник задач. Учебное пособие для вузов. Под редакцией В.П. Чиркова. – М.: Машиностроение, 2004. 416 с.

б) дополнительная литература:

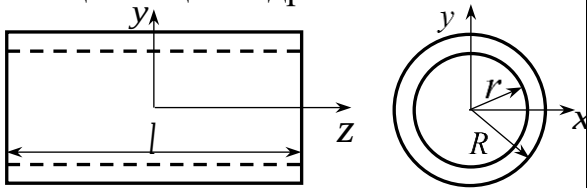
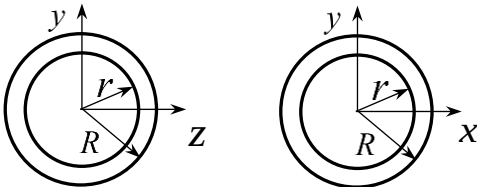
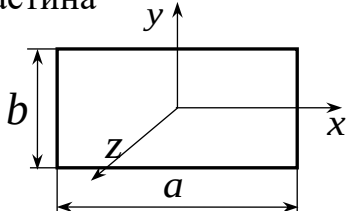
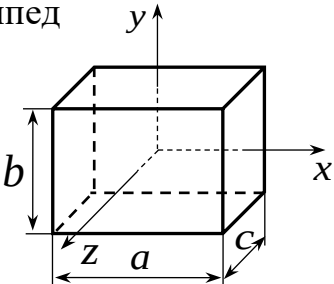
5. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. Учебник. М.: Изд. РХД, 2009. 414 с.
6. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Учебное пособие. М.: Изд. Лань, 2003. 304 с.
7. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. Учебник / Под ред. К.С. Колесникова. Серия «Механика в техническом университете». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 256 с.
8. Светлицкий В.А. Задачи и примеры по теории колебаний. Часть 1. Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 308 с.

Углы Эйлера



Массовые моменты инерции

Тело, координаты x, y, z – главные центральные оси.	Моменты инерции
Тонкий стержень	$J_x = J_y = \frac{ml^2}{12}$ $J_{x'} = J_{y'} = \frac{ml^2}{3}$
Тонкое кольцо	$J_x = J_y = \frac{mr^2}{2}$ $J_z = mr^2$
Тонкий кольцевой диск	$J_x = J_y = \frac{m}{4}(R^2 + r^2)$ $J_z = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$

Кольцевой цилиндр 	$J_x = J_y = \frac{m}{4}(R^2 + r^2) + \frac{m}{12}l^2$ $J_z = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$
Полый шар 	$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Тонкая пластина 	$J_x = \frac{mb^2}{12}, \quad J_y = \frac{ma^2}{12}$ $J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Параллелепипед 	$J_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $J_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Учебное издание

Чирков Виктор Петрович,
Позняк Елена Викторовна

**КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ**

Учебное пособие по дисциплине
«Аналитическая динамика и теория колебаний»
для студентов, обучающихся по направлению
«Прикладная механика»

Темплан издания НИУ МЭИ	Подписано в печать	
Печать офсетная	Формат 60х84/16	Физ. печ. л. 2
Тираж 70 экз.	Изд. №	Заказ №

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная, 14
Отпечатано в типографии