

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Е.И. МЕРЗЛИКИНА

Сборник задач по курсу «Теория автоматического управления»

Практикум по курсу
«Теория автоматического управления»
для студентов, обучающихся по направлению
«Теплоэнергетика и теплотехника»

УДК
621.398
ББК
32.965
М 521

Утверждено учебным управлением МЭИ

Подготовлено на кафедре автоматизированных систем управления
 тепловыми процессами

Рецензенты: к.т.н., доцент Лесничук А.Н.
 д.т.н., доцент Мокрова Н.В.

Мерзликина Е.И.

К 89. Сборник задач по курсу «Теория автоматического управления», часть
 1: Практикум/ Е.И. Мерзликина. – М.: Издательство МЭИ, 2019. – 48 с.

Посвящено решению задач по курсу «Теория автоматического управления». Пособие охватывает разделы «Дифференциальные уравнения и динамические характеристики линейных динамических систем», «Структурные схемы систем управления», «Устойчивость и запас устойчивости систем управления», «Векторно-матричное представление линейных динамических систем».

Предназначено для студентов ИТАЭ.

Учебное издание
Мерзликина Елена Игоревна

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»,
 ЧАСТЬ 1**

Практикум по курсу
 «Теория автоматического управления»
 для студентов, обучающихся по направлению
 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Редактор издательства

Темплан издания МЭИ 2019, учебн.	Подписано в печать
Печать офсетная	Физ. печ. л. 3,0
Тираж 100 экз.	Заказ №
Формат 60x84/16	
Изд. №	

ЗАО «Издательский дом МЭИ», 111250, Москва, Красноказарменная, д. 14
 Отпечатано в типографии ФКП «НИИ «Геодезия», 141292, Московская обл.,
 г. Красноармейск, просп. Испытателей, д. 14

© Национальный исследовательский университет
 Московский энергетический институт, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Этот сборник задач по курсу «Теория автоматического управления» (ТАУ) посвящен четырем разделам курса: дифференциальные уравнения и динамические характеристики линейных динамических систем, элементарные звенья и структурные схемы линейных динамических систем, векторно-матричное представление линейных динамических систем и устойчивость и запас устойчивости линейных динамических систем. Пособие предназначено для студентов бакалавриата ИТАЭ, изучающих в седьмом семестре ТАУ, также оно может использоваться студентами магистратуры ИТАЭ в рамках курса «Основы автоматизации».

Так как ТАУ является разделом прикладной математики, предполагается, что студенты, изучающие курс, прослушали и усвоили элементарную математику в объеме средней школы и высшую математику в объеме бакалавриата технического ВУЗа. Для успешной работы с задачником необходимо знать и уметь применять следующие разделы математики: элементарные функции, теория функций комплексных переменных, интегральное и дифференциальное исчисление, дифференциальные уравнение, матрицы и векторы.

Задачи распределены по разделам, даны примеры решения, для части задач даны ответы в конце пособия. Также в конце сборника имеется список литературы, в указанных в нем книгах имеются теоретические сведения о рассматриваемых в пособии разделах и справочные таблицы (таблицы элементарных звеньев, преобразования Лапласа и т.д.).

Для решения представленных в пособии задач достаточно инженерного калькулятора, математические пакеты (Mathcad, Matlab, Scilab и т.д.) не требуются, но могут использоваться для самопроверки, удобства построения графиков и т.д. При этом сначала желательно решить предлагаемую задачу аналитически, чтобы понять все необходимые принципы и освоить нужные методы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Задача 1.1. Найдите изображение по Лапласу для функции $x(t) = 2 \cdot \mathbf{1}(t)$. Считать, что $t \geq 0$.

Решение. Можно найти изображение, исходя из определения преобразования Лапласа или по приводимым в литературе справочным таблицам. Для примера решим задачу, исходя из определения преобразования Лапласа. Согласно этому определению,

$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Подставим в данное выражением заданную функцию $x(t)$, тогда получим: $X(s) = \int_{-0}^{\infty} 2 \cdot \mathbf{1}(t)e^{-st} dt = 2 \cdot \int_{-0}^{\infty} \mathbf{1}(t)e^{-st} dt = 2 \cdot \int_{-0}^{\infty} e^{-st} dt =$

$$= -\frac{1}{s} \cdot 2 \cdot \int_{-0}^{\infty} e^{-st} d(-st) = -\frac{2}{s} \cdot e^{-st} \Big|_{-0}^{\infty} = \frac{2}{s}$$

Аналогичный результат можно получить, воспользовавшись таблицами преобразования Лапласа и его свойством линейности:

$$L(\mathbf{1}(t)) = \frac{1}{s}; L(2 \cdot \mathbf{1}(t)) = \frac{2}{s}.$$

Задача 1.2. Найдите по определению преобразования Лапласа и по таблицам изображение по Лапласу для следующих функций: $x(t) = e^{-\frac{t}{3}}$; $x(t) = e^{\frac{t}{8}}$; $x(t) = 4t$. Считать, что $t \geq 0$.

Задача 1.3. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $4y'(t) + 2y(t) = x(t)$. Решить данное уравнение при входном воздействии $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Решение. Преобразуем по Лапласу обе части уравнения, тогда с учетом начальных условий получим: $4s \cdot Y(s) + 2Y(s) = X(s)$. Из данного уравнения выразим $Y(s)$, получим: $Y(s) = \frac{X(s)}{4s+2}$. Изображение выходного воздействия по Лапласу согласно справочным таблицам имеет вид: $L(x(t)) = X(s) = \frac{1}{s}$. Тогда с учетом этого изображение выходной величины примет вид: $Y(s) = \frac{1}{(4s+2)s} = \frac{1/4}{(s+\frac{1}{2})s}$.

Далее разложим полученное выражение на простые дроби методом неопределенных коэффициентов: $Y(s) = \frac{1/4}{(s+\frac{1}{2})s} = \frac{A}{s+1/2} + \frac{B}{s} = \frac{(A+B)s + \frac{1}{2}B}{s(s+\frac{1}{2})}$. На основании полученного выражения можем записать систему уравнений:

$$s^1) A + B = 0$$

$$s^0) \frac{1}{2}B = \frac{1}{4}.$$

Решив записанную систему уравнений, получим: $A = -\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}$. Таким образом, выражение для изображения выходной величины по Лапласу примет вид: $Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1/2}$. Воспользуемся таблицами преобразования Лапласа [1,2,5] и найдем оригинал данной функции: $y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{t}{2}})$. График функции имеет вид, показанный на рис. 1.1.

Таким образом, можно сказать, что, если на вход рассматриваемой системы приходит единичное ступенчатое воздействие, сигнал на выходе экспоненциально нарастает и асимптотически стремится к $y(t) = 0,5$.

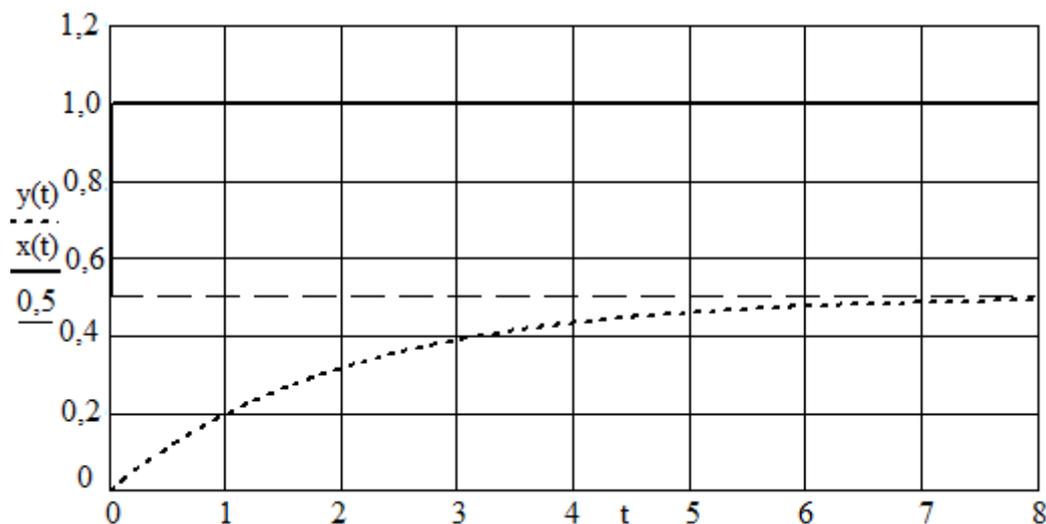


Рис. 1.1

Задача 1.4. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2x(t)$. Решить дифференциальное уравнение при входном воздействии $x(t) = \delta(t)$ и $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Задача 1.5. Решить задачу 1.3, приняв, что входное воздействие имеет вид $x(t) = e^{2t}$.

Задача 1.6. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $3y''(t) - 3y'(t) - 6y(t) = 2x(t)$. Решить дифференциальное уравнение при входном воздействии $x(t) = \delta(t)$ и $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Задача 1.7. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 2x(t)$. Решить дифференциальное уравнение при входном воздействии $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Решение. Преобразуем по Лапласу обе части уравнения, тогда с учетом начальных условий получим: $4s^2 \cdot Y(s) + 4s \cdot Y(s) + Y(s) = 2X(s)$. Изображение входного воздействия по Лапласу имеет вид: $X(s) = L(x(t)) = L(\mathbf{1}(t)) = 1/s$. Подставим изображение входного воздействия в

уравнение и выразим из него изображение выходной величины, тогда получим следующее: $Y(s) = \frac{2}{(4s^2+4s+1)s} = \frac{1/2}{(s+1/2)^2s}$.

Видно, что у знаменателя полученного выражения имеются кратные корни. Тогда разложение на сумму простых дробей будет иметь вид [1,2,5]: $Y(s) = \frac{A}{s+1/2} + \frac{B}{(s+1/2)^2} + \frac{C}{s} = \frac{(A+C)s^2 + (\frac{A}{2} + B + C)s + \frac{1}{4}C \cdot s}{(s+1/2)^2s}$. Теперь можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} s^2) A + C = 0 \\ s^1) \frac{A}{2} + B + C = 0 \\ s^0) \frac{1}{4} \cdot C = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$$

С учетом найденных коэффициентов изображение выходной величины по Лапласу будет иметь вид: $Y(s) = \frac{-2}{s+1/2} + \frac{-1}{(s+1/2)^2} + \frac{2}{s}$. Воспользуемся таблицами преобразования Лапласа и найдем оригинал выходной величины: $y(t) = 2 - 2e^{-t/2} - te^{-t/2}$. График зависимости выходной величины системы от времени представлен на рис. 1.2.

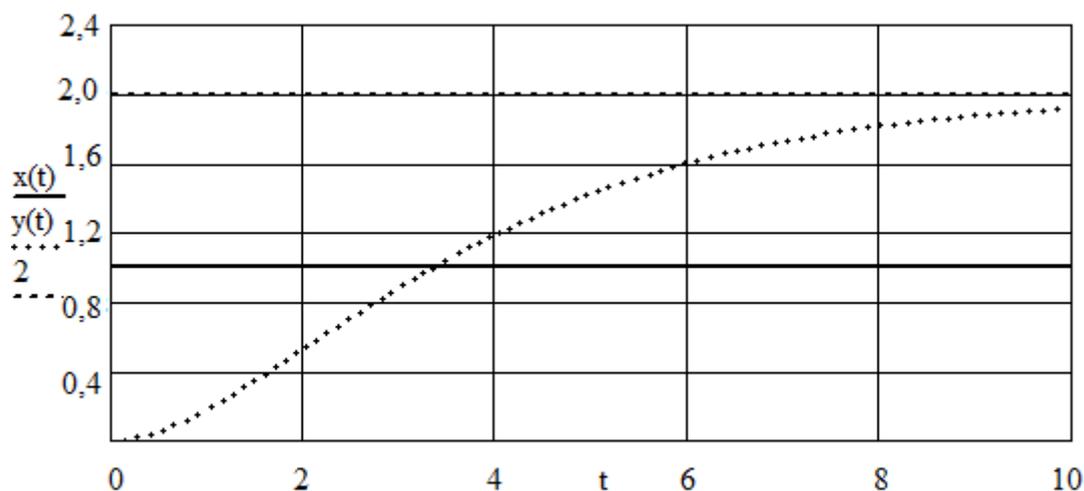


Рис. 1.2

Таким образом, видно, что, если на вход системы подается единичное ступенчатое воздействие, то выходная величина со временем асимптотически приближается к значению $y(t) = 2$, при этом переходный процесс носит S-образный характер.

Задача 1.8. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $9y''(t) + 6y'(t) + y(t) = 2x(t)$. Решить его при $x(t) = \delta(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Задача 1.9. Дано дифференциальное уравнение линейной системы: $4y''(t) + 4y'(t) + 10y(t) = x(t)$. Решить его при $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Решение. Преобразуем по Лапласу обе части уравнения, тогда с учетом начальных условий: $4s^2 \cdot Y(s) + 4s \cdot Y(s) + 10Y(s) = X(s)$. Изображение входного воздействия по Лапласу имеет вид: $X(s) = L(x(t)) = L(\mathbf{1}(t)) = 1/s$. Подставим изображение входного воздействия в уравнение и выразим из этого уравнения изображение выходной величины, тогда получим следующее: $Y(s) = \frac{1}{(4s^2 + 4s + 10)s}$.

Дискриминант уравнения $4s^2 + 4s + 10 = 0$ меньше нуля, в этом случае необходимо выделить полный квадрат, тогда правая часть уравнения примет вид: $4s^2 + 4s + 10 = (2s + 1)^2 + 9$. Подставим это выражение в знаменатель формулы для изображения выходной величины и выполним необходимые арифметические преобразования: $Y(s) = \frac{1}{((2s+1)^2+9)s} = \frac{1}{4((s+1/2)^2+9/4)s}$. Тогда разложение данного выражения на сумму простых дробей будет иметь вид [1,2,5]:

$Y(s) = \frac{1/4}{((s+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4})s} = \frac{As+B}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}} + \frac{C}{s} = \frac{(A+C)s^2+(B+C)s+\frac{10}{4}C}{((s+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4})s}$. Составим систему уравнений, чтобы найти коэффициенты простых дробей:

$$\begin{cases} (s^2)A + C = 0 \\ (s^1)B + C = 0 \\ (s^0)\frac{10}{4}C = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0,1 \\ B = -0,1 \\ C = 0,1 \end{cases}$$

С учетом найденных коэффициентов изображение выходной величины по Лапласу будет иметь вид: $Y(s) = -0,1 \frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2} + \frac{0,1}{s}$.

Преобразуем полученное выражение и приведем его к сумме табличных функций: $Y(s) = -0,1 \frac{s+1/2}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2} - 0,1 \frac{1/2}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{3}{2})^2} + \frac{0,1}{s}$. Тогда по таблице преобразования Лапласа получим следующее выражение для оригинала выходной величины: $y(t) = 0,1e^{-t/2} \cos\left(\frac{3}{2} \cdot t\right) - \frac{1}{30} \cdot e^{-t/2} \sin\left(\frac{3}{2} \cdot t\right) + 0,1$. График зависимости выходной величины от времени представлен на рис. 1.3.

Как видно из данного графика, реакция данной динамической системы на единичное ступенчатое входное воздействие имеет характер затухающих колебаний, со временем значение выходной величины стремится к значению $y(t) = 0,1$.

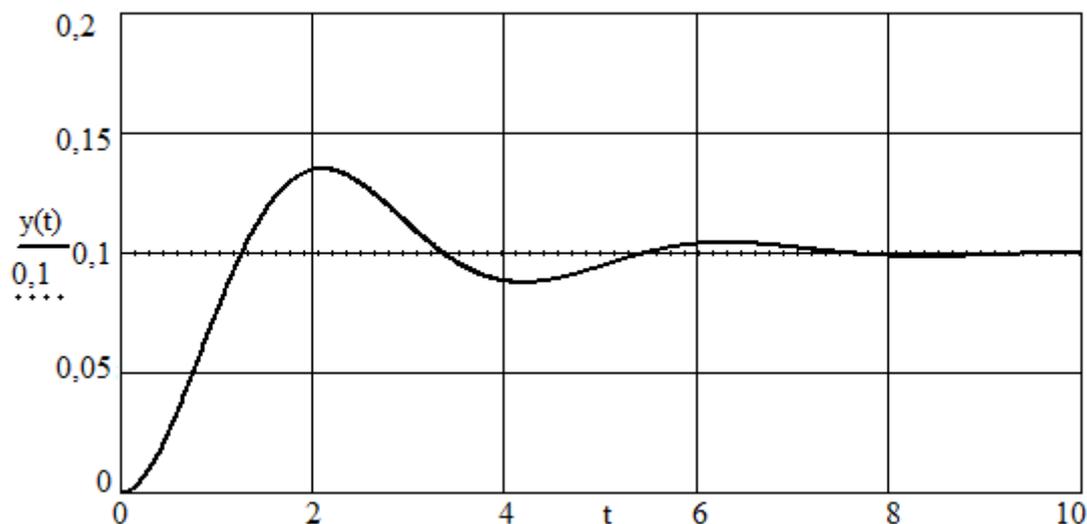


Рис. 1.3

Задача 1.10. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы: $y''(t) + 2y'(t) + 8y(t) = 2x(t)$. Решить данное дифференциальное уравнение при входном воздействии $x(t) = \delta(t)$ и $x(t) = \mathbf{1}(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Задача 1.11. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы: $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 5x(t)$. Решить данное дифференциальное уравнение при входном воздействии $x(t) = \delta(t)$, $x(t) = \mathbf{1}(t)$ и $x(t) = t$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$.

Задача 1.12. Составить дифференциальное уравнение электрической цепи, изображенной на рис. 1.4. Величины сопротивления резистора и ёмкости конденсатора считать известными. В качестве входного воздействия принять напряжение, приложенное ко всей изображенной на рис. 1.4 цепи, в качестве выходной величины принять падение напряжения на конденсаторе.

Решение. Запишем второй закон Кирхгофа для этой цепи: $U_{\text{вх}} = iR + U_{\text{вых}}$. Ток в цепи можно рассчитать по формуле [4]: $i = C \frac{dU_{\text{вых}}}{dt}$. Подставим записанное выражение для тока в этой цепи в выражение для закона Кирхгофа, получим следующее: $U_{\text{вх}} = RC \frac{dU_{\text{вых}}}{dt} + U_{\text{вых}}$.

Как можно видеть из полученного результата, показанная на рис. 1.4 электрическая цепь при данных входе и выходе описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Следует отметить, что

вид уравнения для той же цепи может измениться, если принять другие вход и выход (см. задачу 1.13).

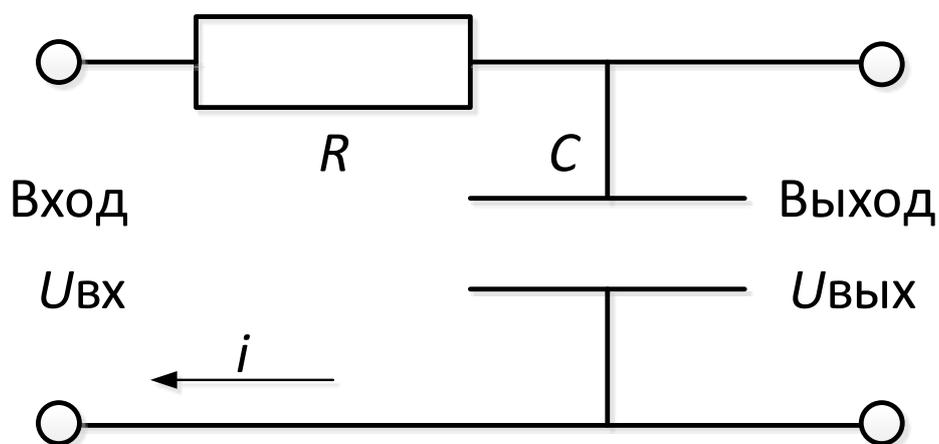


Рис. 1.4.

Задача 1.13. Составить дифференциальное уравнение электрической цепи, изображенной на рис. 1.4. Величины сопротивления резистора и ёмкости конденсатора считать известными. В качестве входного воздействия принять напряжение, приложенное ко всей изображенной на рис. 1.4 цепи, в качестве выходной величины принять падение напряжения на резисторе. Сравнить полученное дифференциальное уравнение с уравнением, полученным при решении задачи 1.12.

Задача 1.14. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы $2y''(t) + 10y'(t) + 8y(t) = 3x(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$. Найти передаточную функцию данной системы. Получить аналитические выражения и построить графики для переходной и импульсной переходной характеристик данной системы.

Решение. Согласно заданному дифференциальному уравнению, передаточная функция данной системы будет иметь вид: $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{2s^2 + 10s + 8}$.

Так как переходная характеристика – это реакция линейной системы на единичное ступенчатое возмущение, то изображение её по Лапласу будет иметь вид: $H(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{3}{(2s^2 + 10s + 8)s}$. Найдем корни знаменателя и разложим это выражение на сумму простых дробей, при этом получим: $H(s) = \frac{3/2}{s(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4}$. Коэффициенты простых дробей найдем по методу неопределенных коэффициентов, тогда выражение для изображения переходной характеристики по Лапласу будет иметь вид:

$H(s) = \frac{3/8}{s} - \frac{1/2}{s+1} + \frac{1/8}{s+4}$. Воспользуемся таблицами преобразования Лапласа и получим оригинал переходной характеристики: $h(t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{8} \cdot e^{-4t}$. График переходной характеристики приводится на рис. 1.5.

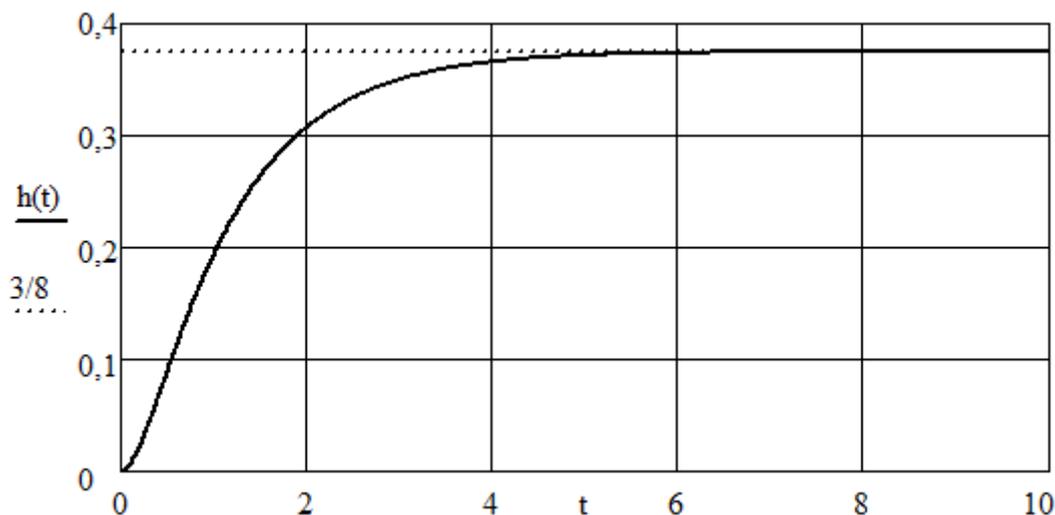


Рис. 1.5.

Импульсную переходную характеристику можно получить двумя способами. Во-первых, как известно, передаточная функция – это изображение импульсной переходной характеристики по Лапласу. Таким образом, нужно представить передаточную функцию в виде суммы простых дробей: $W(s) = \frac{3}{2s^2+10s+8} = \frac{3/2}{(s+1)(s+4)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1/2}{s+4}$. Далее, воспользовавшись таблицами преобразования Лапласа, получим выражение для импульсной переходной характеристики: $w(t) = 0,5e^{-t} - 0,5e^{-4t}$.

Можно получить импульсную переходную характеристику иначе, для этого можно воспользоваться связью импульсной и переходной характеристик: как известно, импульсная характеристика является производной от переходной [2]. Найдем выражение для импульсной переходной характеристики таким образом:

$$w(t) = h'(t) = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{8} \cdot e^{-4t} \right)' = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-4t}.$$

График импульсной переходной характеристики приводится на рис. 1.6.

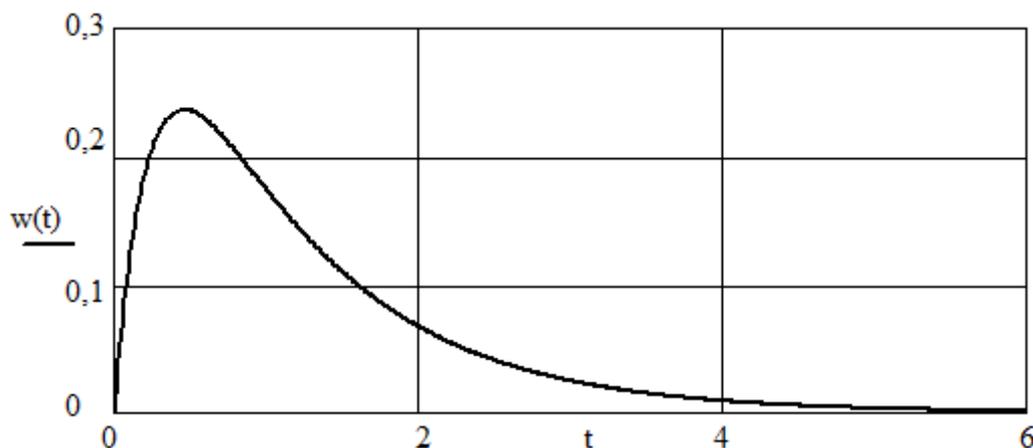


Рис. 1.6.

Задача 1.15. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы $y''(t) + 2y'(t) + 10y(t) = 3x(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y''(-0) = y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$. Найти передаточную функцию данной системы. Получить аналитические выражения и построить графики для переходной и импульсной переходной характеристик данной системы.

Задача 1.16. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы: $10y'(t) + y = 2x(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$. Получить по дифференциальному уравнению передаточную функцию, комплексную частотную характеристику, амплитудную частотную и фазовую частотную характеристики. Построить соответствующие графики.

Решение. Найдем по дифференциальному уравнению передаточную функцию: $W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{10s+1}$. Для того, чтобы получить выражение для комплексной частотной характеристики, заменим в полученном выражении оператор Лапласа на оператор Фурье, тогда получим следующее выражение: $W(j\omega) = \frac{2}{10j\omega+1} = \frac{2(1-10j\omega)}{(1+10j\omega)(1-10j\omega)}$. Выделим в полученном выражении действительную и мнимую части:

$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \frac{2}{1+10^2\omega^2} + j\frac{-20\omega}{1+10^2\omega^2}$. Годограф КЧХ приведен на рис. 1.7. Графики зависимости действительной и мнимой части КЧХ от частоты приведены на рис. 1.8.

Найдем выражение для амплитудной частотной характеристики по формуле: $A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{\frac{4+400\omega^2}{1+10^2\omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+10^2\omega^2}}$.

Найдем выражение для фазовой частотной характеристики по формуле $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg(10\omega)$. График амплитудной частотной характеристики приведен на рис. 1.9, график фазовой частотной характеристики – на рис. 1.10.

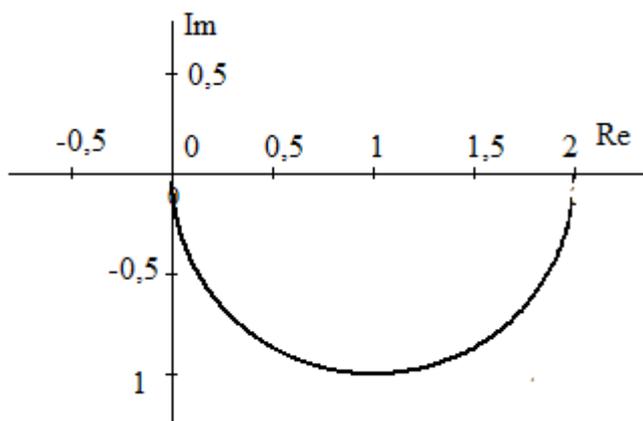


Рис. 1.7.

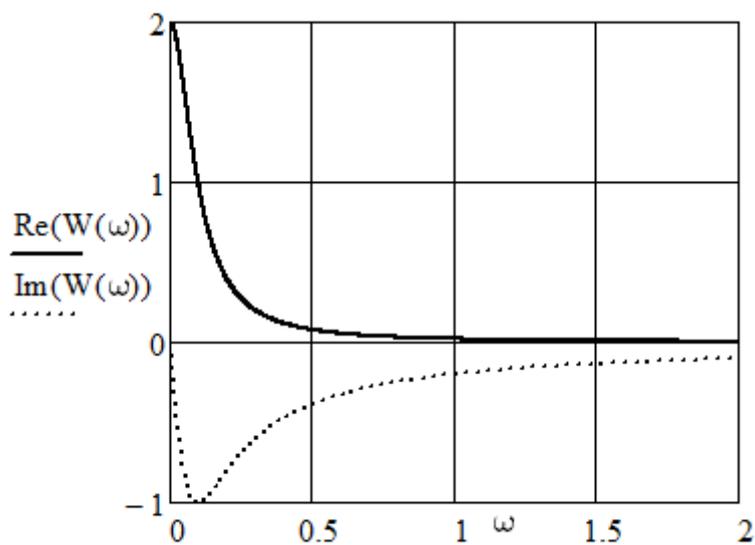


Рис. 1.8.

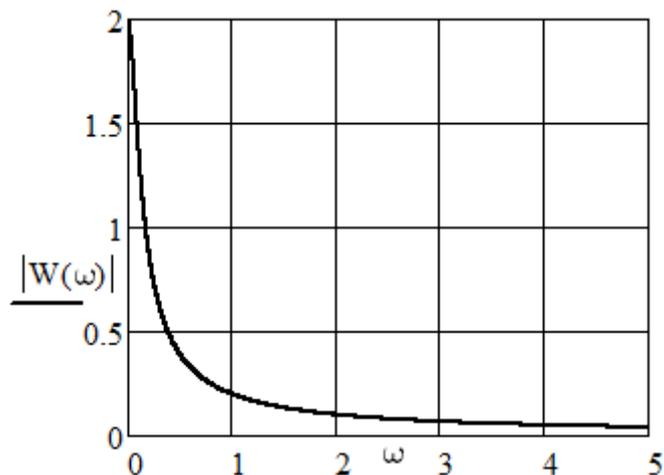


Рис. 1.9.

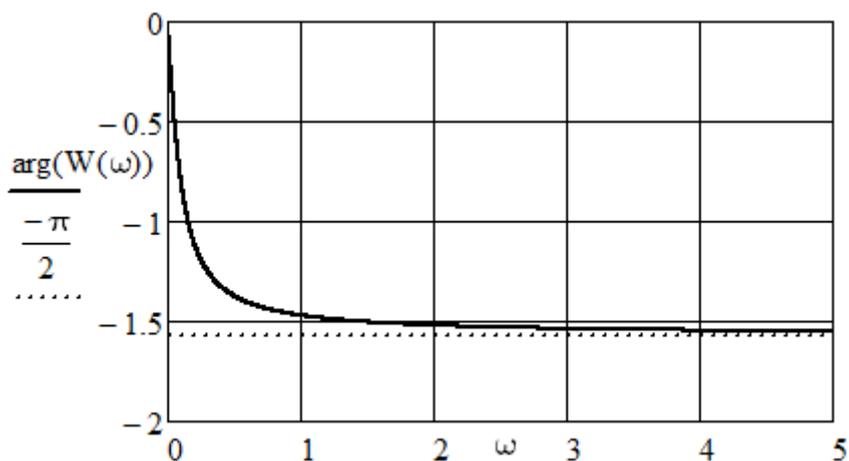


Рис. 1.10.

Задача 1.17. Дано дифференциальное уравнение линейной динамической системы: $10y'(t) + y = 2x'(t)$. Начальные условия считать нулевыми: $y'(-0) = y(-0) = x(-0) = 0$. Получить по дифференциальному уравнению передаточную функцию, комплексную частотную характеристику, амплитудную частотную и фазовую частотную характеристики. Построить соответствующие графики.

Задача 1.18. На рис. 1.11 (а-д) показаны годографы КЧХ некоторых линейных динамических систем. Для данных систем построить качественно на основании вида годографа графики АЧХ, ФЧХ, вещественной и мнимой частотных характеристик.

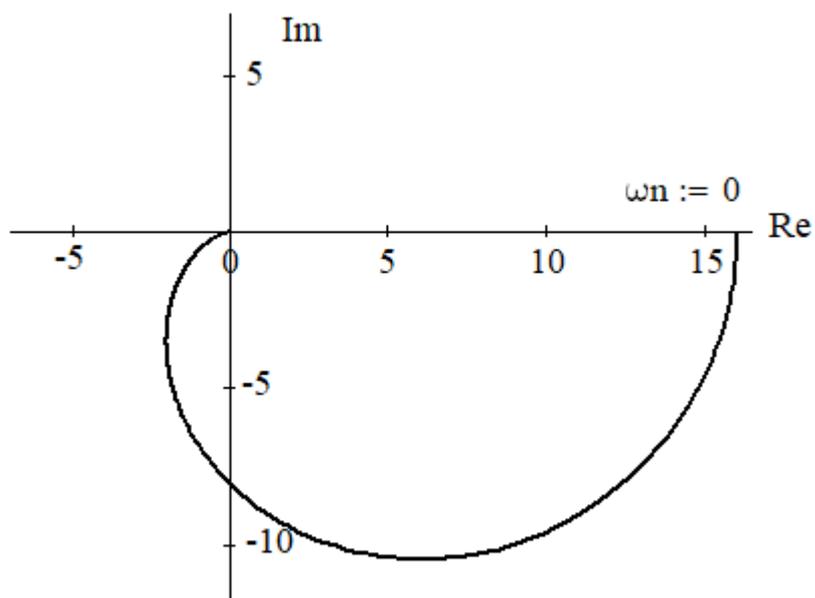


Рис. 1.11а

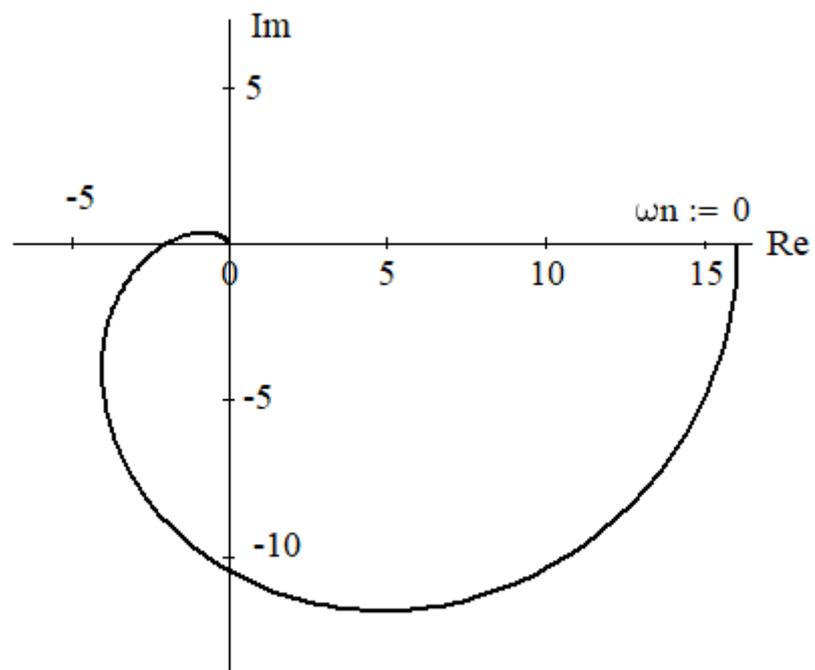


Рис. 1.11б

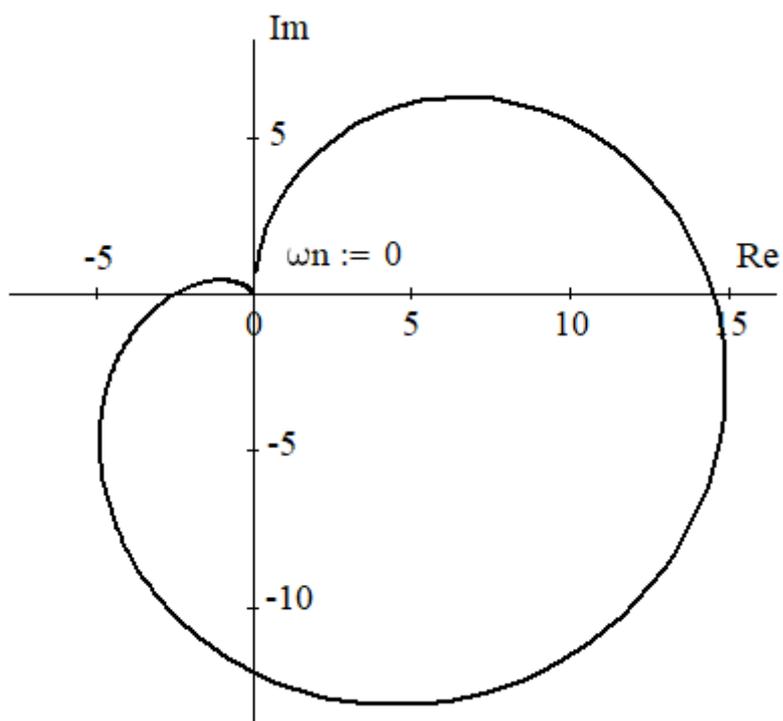


Рис. 1.11в

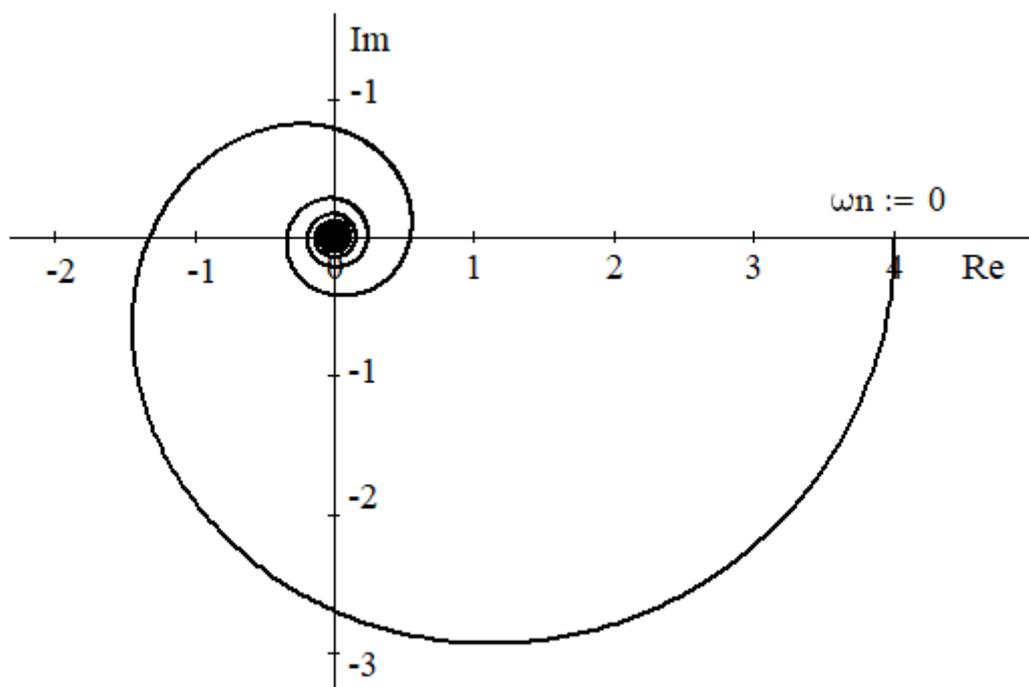


Рис. 1.11г

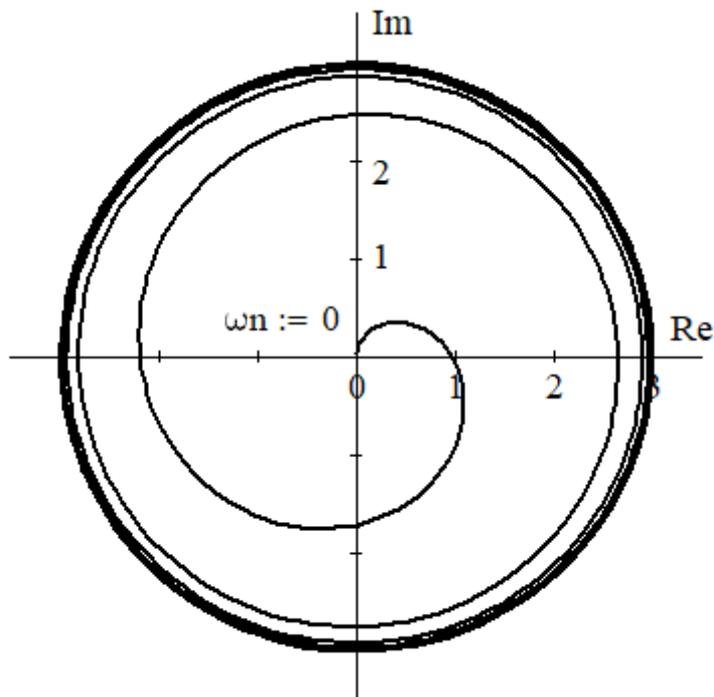


Рис. 1.11д

СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Задача 2.1. Дано апериодическое звено с коэффициентом передачи равным 3 ед.вых./ед.вх. и постоянной времени 5с. Постройте переходную и импульсную переходную характеристики этого звена. Постройте кривую разгона этого звена, при ступенчатом воздействии, величина которого равна 1,8 ед.вх. Постройте графики амплитудной и фазовой частотной характеристик и годограф КЧХ.

Как изменятся построенные характеристики, если коэффициент передачи данного звена увеличится в два раза? Уменьшится в два раза?

Как изменятся построенные характеристики, если постоянная времени данного звена увеличится в 4 раза? Уменьшится в 4 раза?

Решение. Переходная характеристика апериодического звена имеет вид [1,2,5] $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$, в данном случае $h(t) = 3(1 - e^{-t/5})$. Кривая разгона имеет вид [1,2,5] $y(t) = \Delta x \cdot h(t)$, в данном случае $y(t) = 1,8 \cdot 3(1 - e^{-\frac{t}{5}})$, $y(t) = 5,4 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{5}})$. Графики переходной характеристики и кривой разгона представлены на рис. 2.1.

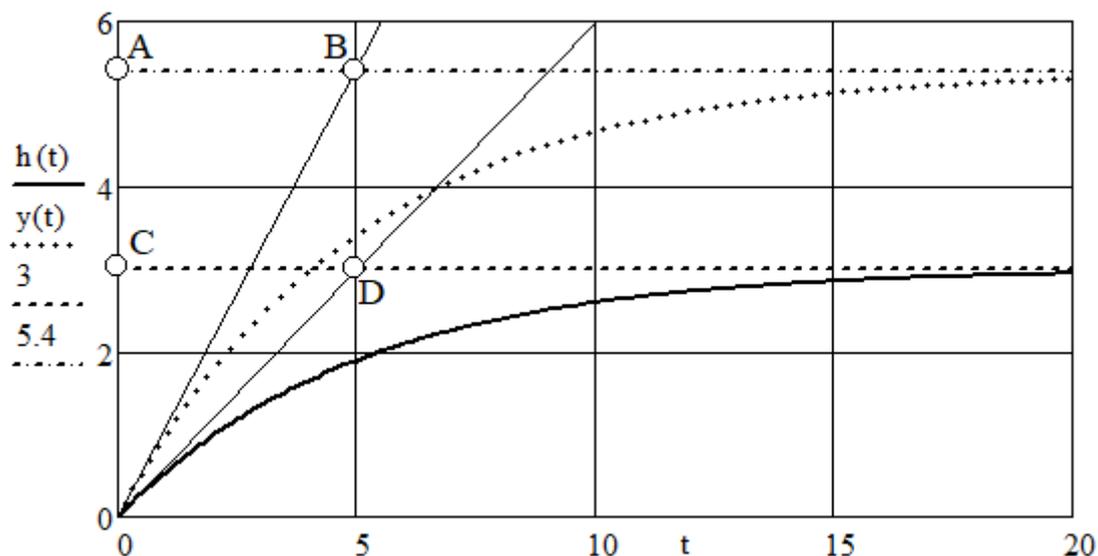


Рис. 2.1

Как видно из рис. 2.1, если провести касательные в точке $t = 0$ к графикам переходной характеристики и кривой разгона, то длина отрезка горизонтальной асимптоты графика между $t = 0$ и точкой пересечения с касательной будет равна постоянной времени, в данном случае 5 с. Для переходной характеристики это отрезок CD на рис. 2.1, для кривой разгона – отрезок АВ на рис. 2.1. Это соответствует физическому смыслу постоянной времени апериодического звена, который заключается в том, что это время, за которое выходная величина звена дошла бы до установившегося значения, если бы изменялась все время со скоростью, равной скорости в начальный момент времени.

Импульсная переходная характеристика апериодического звена имеет вид: $w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} = \frac{3}{5} e^{-t/5}$. График импульсной переходной характеристики приведен на рис. 2.2. Как видно из рис. 2.2, касательная к графику при $t = 0$ отсекает на оси абсцисс отрезок, длина которого от начала координат до точки пересечения с касательной равняется постоянной времени звена.

КЧХ апериодического звена имеет вид [1,2,5]: $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}} e^{-j \cdot \arctg(T\omega)} = \frac{3}{\sqrt{25\omega^2+1}} e^{-j \cdot \arctg(5\omega)}$. На основании приведенной формулы построим графики АЧХ и ФЧХ (представлены на рис. 2.3 а и б соответственно) и годограф КЧХ (представлен на рис. 2.4).

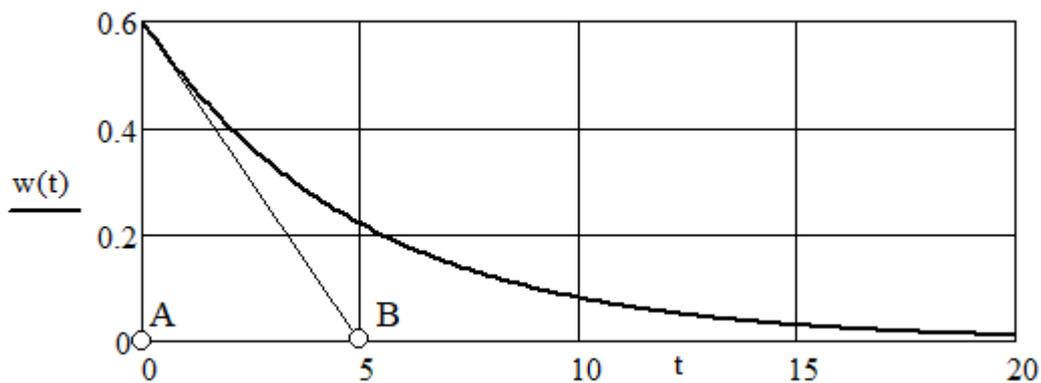


Рис. 2.2

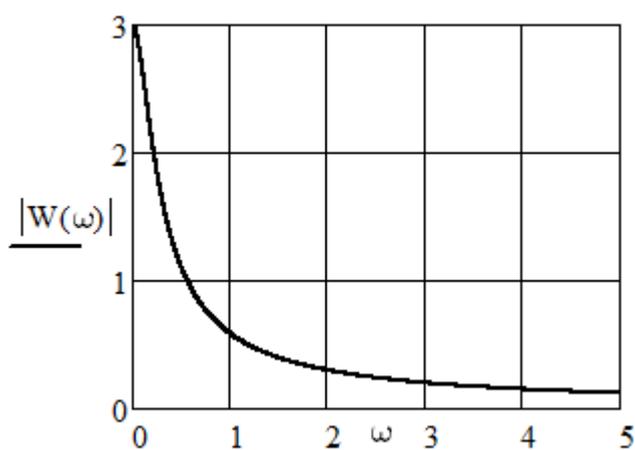


Рис. 2.3а

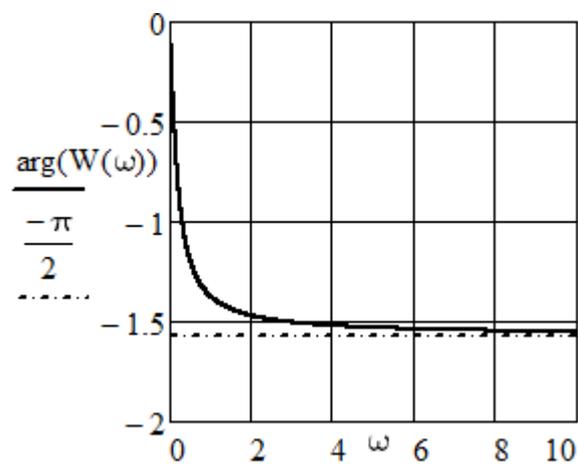


Рис. 2.3б

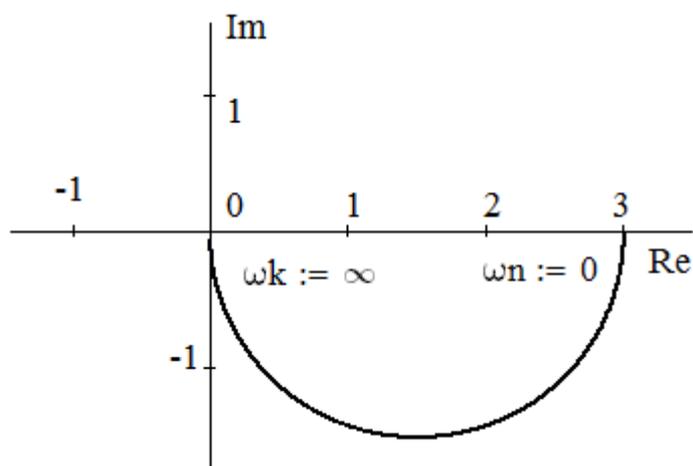


Рис. 2.4

Графики временных характеристики для случая, когда коэффициент передачи данного звена увеличился и уменьшился в два раза показаны на рис. 2.5а (переходная характеристика) и 2.5б (импульсная характеристика).

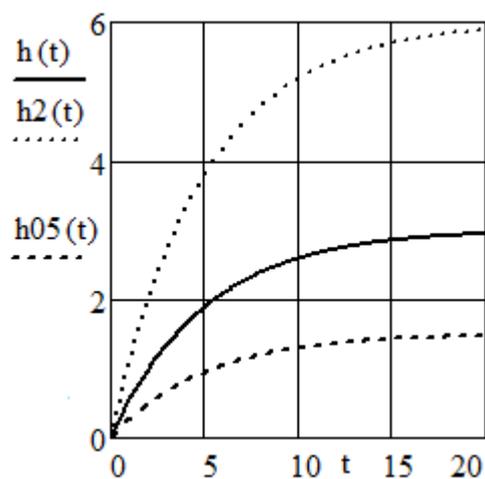


Рис. 2.5а

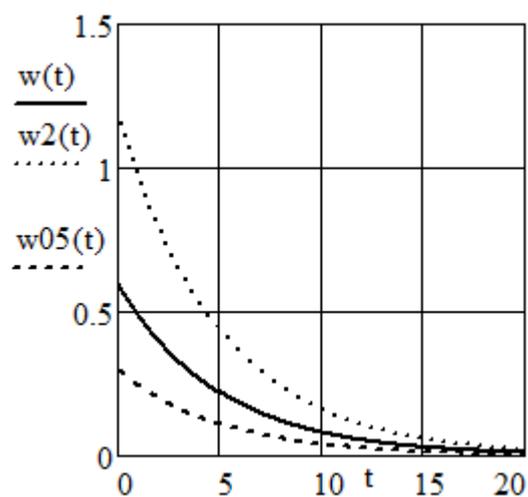


Рис. 2.5б

Изменение коэффициента передачи не повлияет на вид ФЧХ, так как ФЧХ апериодического звена от него не зависит. Графики АЧХ и годографы КЧХ для всех рассматриваемых случаев показаны на рис. 2.6 а и б соответственно.

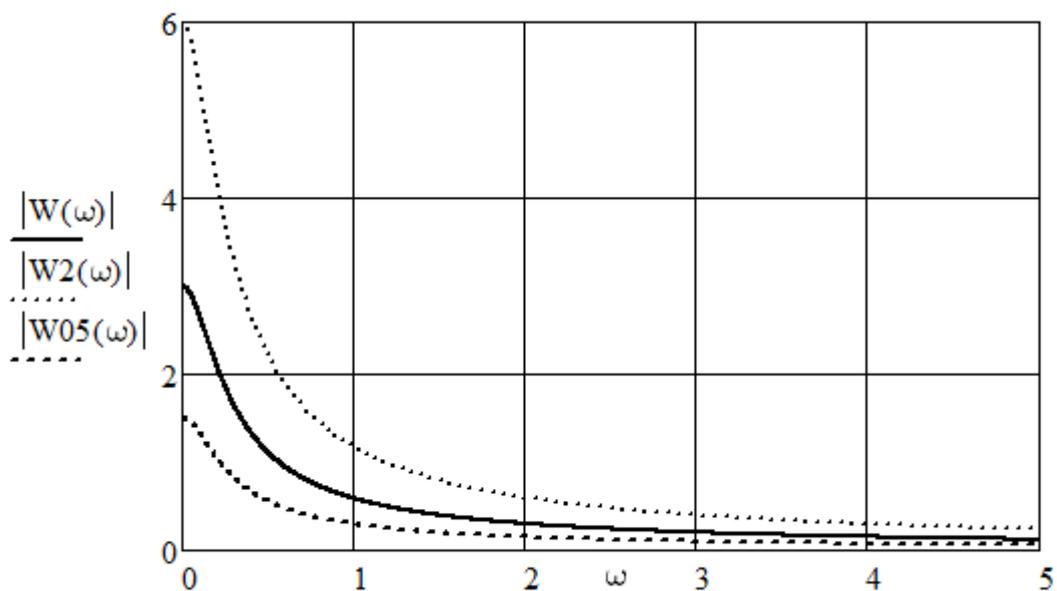


Рис. 2.6а

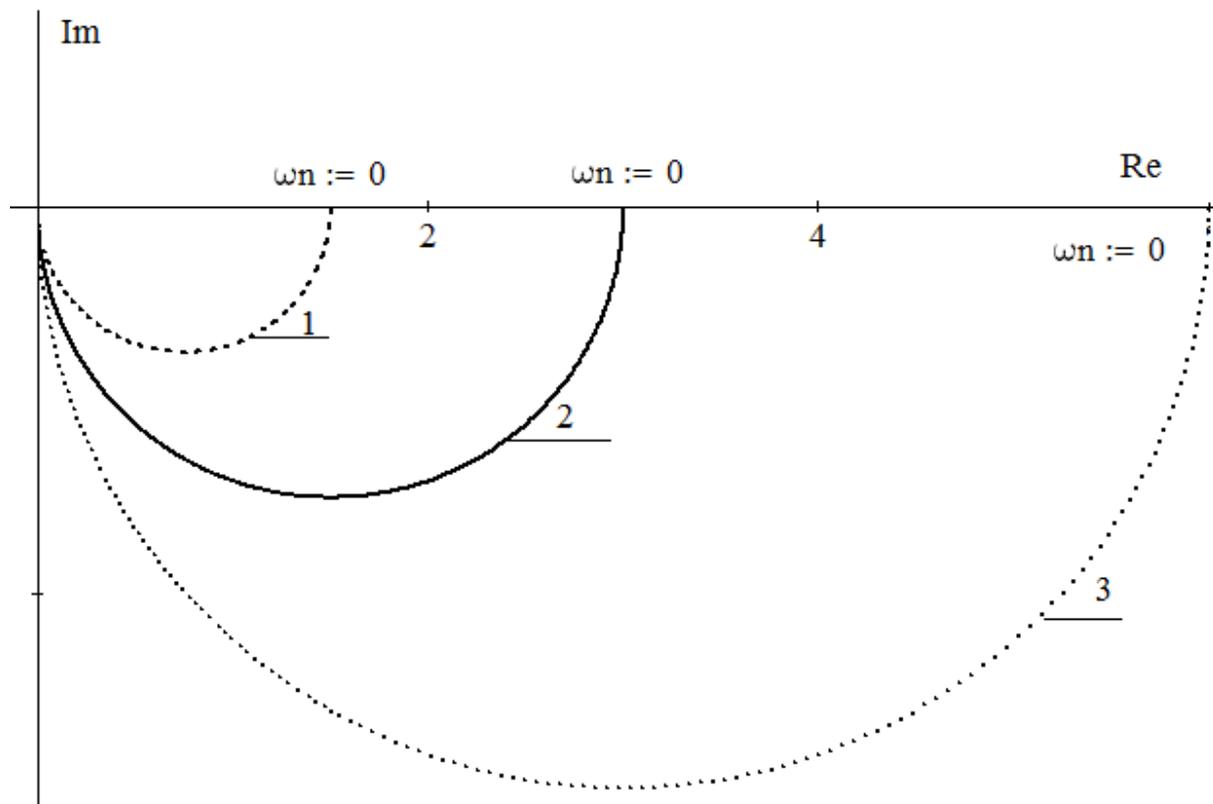


Рис. 2.66

Графики временных характеристик при уменьшении и увеличении в 4 раза постоянной времени звена показаны, соответственно на рис. 2.7а и б.

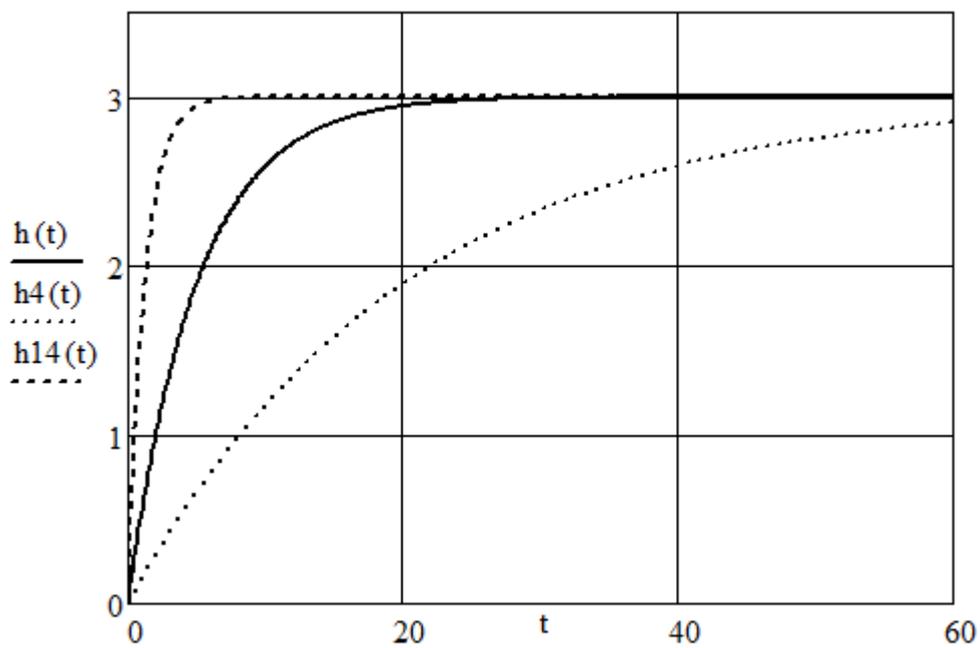


Рис. 2.7а

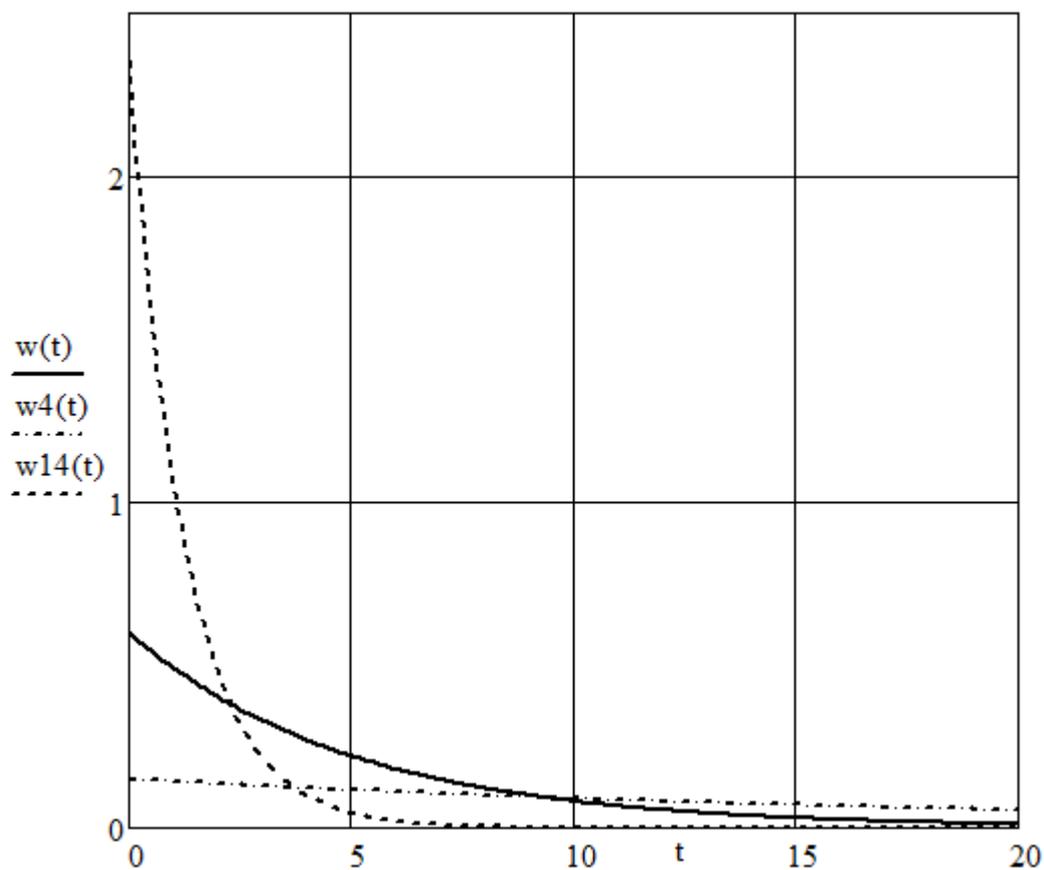


Рис. 2.76

Значение постоянной времени не влияет на вид годографа КЧХ, только на скорость движения образующей точки. Графики АЧХ и ФЧХ показаны, соответственно, на рис. 2.8а и 2.8б.

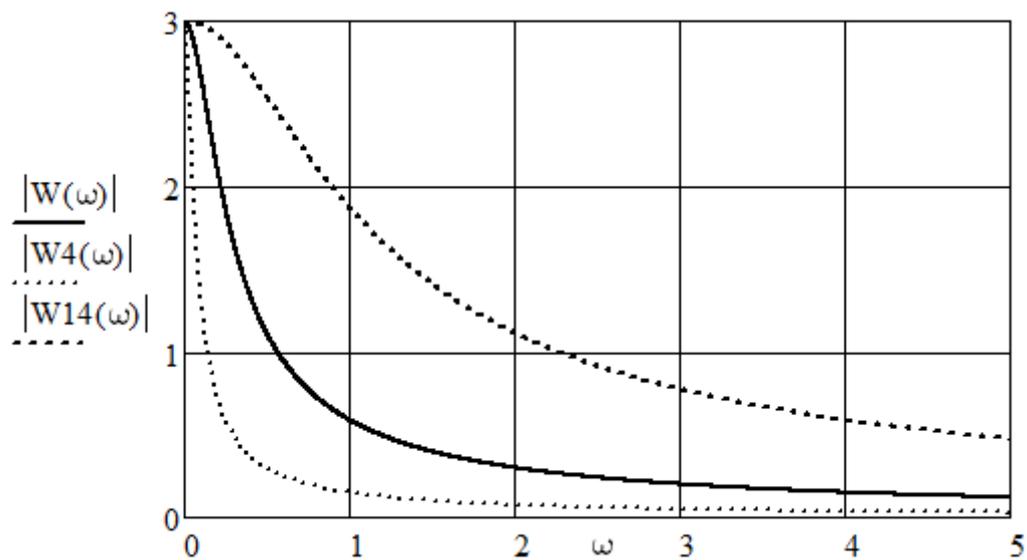


Рис. 2.7а

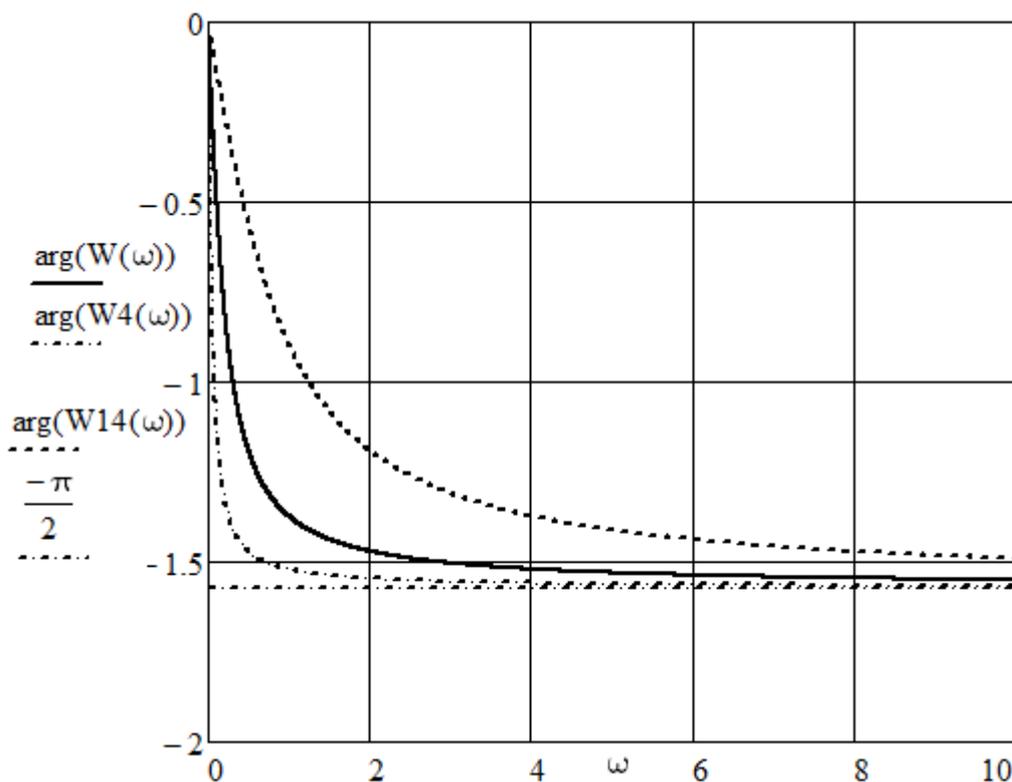


Рис. 2.7б

Задача 2.2. Даны три интегрирующих звена, коэффициенты передачи которых соответственно равны $K_{i1} = 1$ ед.вых./ед.вх·с), $K_{i2} = 2$ ед.вых./ед.вх·с), $K_{i3} = 5$ ед.вых./ед.вх·с). Построить графики временных и частотных характеристик этих звеньев, сделать вывод о влиянии величины коэффициента передачи на вид динамических характеристик интегрирующего звена.

Задача 2.3. Дано реальное дифференцирующее звено с коэффициентом передачи равным 2 ед.вых./ед.вх. и постоянной времени 8с. Построить кривую разгона данного звена при подаче на вход ступенчатого воздействия величиной 2,5 ед.вх. Построить частотные характеристики и логарифмические частотные характеристики этого звена.

Задача 2.4. Дано интегродифференцирующее звено, передаточная функция которого имеет вид: $W(s) = 3 \frac{4s+1}{8s+1}$. Постройте переходную и частотные характеристики данного звена. Как изменятся построенные характеристики, если числитель и знаменатель передаточной функции поменяются местами?

Задача 2.5. Дано дифференциальное уравнение инерционного звена второго порядка $y'' + 8y' + 16y = 4x$. Найти передаточную функцию данного звена, получить выражения для переходной и импульсной переходной характеристики данного звена, построить графики этих характеристик. Получить выражения для КЧХ, АЧХ и ФЧХ этого звена, построить графики этих характеристик. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ данного звена. Как должны измениться параметры этого звена, чтобы оно стало колебательным? Изменить соответствующим образом параметры этого звена, получить выражения и построить все упомянутые выше характеристики.

Задача 2.6. Дано дифференциальное уравнение колебательного звена $25y'' + 8y' + y = 4x$. Найти степень затухания переходной характеристики данного звена. Найти корневой и частотный показатели колебательности для данного звена. Построить график переходной характеристики звена.

Задача 2.7. Два апериодических звена с передаточными функциями $W_1(s) = \frac{2}{10s+1}$; $W_2(s) = \frac{1}{4s+1}$. Звенья соединены последовательно. Найти передаточную функцию данной системы звеньев. Найти переходную и импульсную переходную характеристику данной системы звеньев. Найти и построить АЧХ, ФЧХ и КЧХ данной системы звеньев. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ данной системы звеньев.

Решение. Так как звенья соединены последовательно, передаточные функции перемножаются [1, 2, 5]: $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{2}{10s+1} \cdot \frac{1}{4s+1} = \frac{2}{40s^2+14s+1}$.

Для того, чтобы найти КЧХ, заменим в выражении для передаточной функции оператор Лапласа на оператор Фурье [1, 2, 5], тогда получим:

$$W(j\omega) = \frac{2}{4 \cdot (j\omega)^2 + 14j\omega + 1} = \frac{2 \cdot (1-40\omega^2)}{(1-40\omega^2)^2 + 14^2\omega^2} + j \frac{-14\omega \cdot 2}{(1-40\omega^2)^2 + 14^2\omega^2}.$$

Найдем АЧХ по формуле [1, 2, 5]:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot (1-40\omega^2)}{(1-40\omega^2)^2 + 14^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-14\omega \cdot 2}{(1-40\omega^2)^2 + 14^2\omega^2}\right)^2}.$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\sqrt{(1-40\omega^2)^2 + 14^2\omega^2}}.$$

Найдем ФЧХ по формуле [1, 2, 5]:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} - \pi a, \quad a = 0 \text{ при } P(\omega) > 0$$

$$a = 1 \text{ при } P(\omega) < 0.$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{-14\omega}{1-40\omega^2} - \pi a.$$

Графики АЧХ и ФЧХ данной системы показаны на рис. 2.8а и 2.8б соответственно. Также следует отметить, что для последовательного

соединения звеньев АЧХ можно найти как произведение АЧХ составляющих, а ФЧХ – как сумму ФЧХ составляющих.

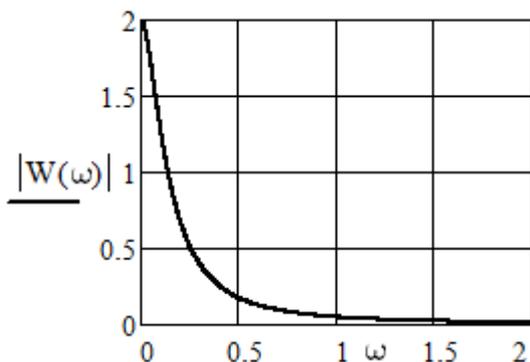


Рис. 2.8а

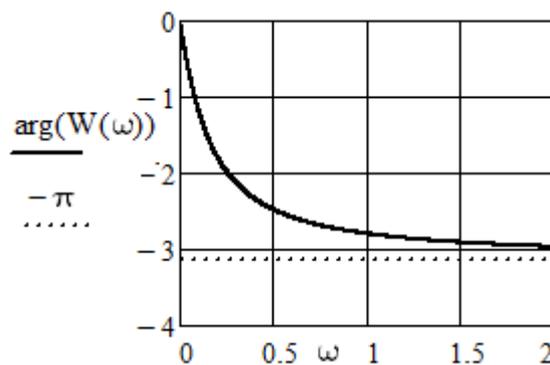


Рис. 2.8б

Годограф КЧХ для данной системы показан на рис. 2.9.

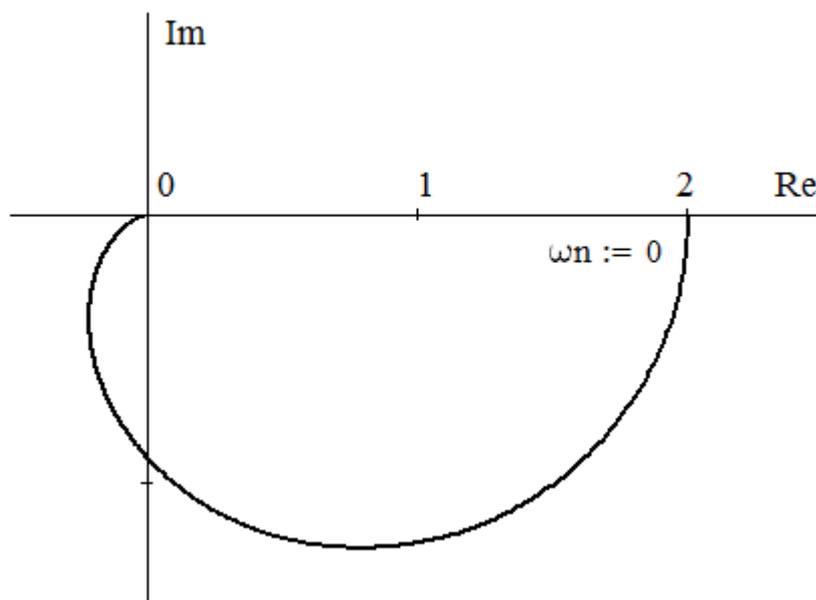


Рис. 2.9

Далее построим ЛАЧХ и ЛФЧХ данной линейной динамической системы. Для построения ЛАЧХ найдем сопрягающие частоты [5]: $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10}$; $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{4}$. Для данной системы до первой сопрягающей частоты асимптотическая ЛАЧХ представляет собой горизонтальную прямую на уровне $20 \lg k = 20 \lg 2$. После первой сопрягающей частоты асимптотическая ЛАЧХ представляет собой прямую с наклоном -20 дБ/дек, а после второй сопрягающей частоты – прямую с наклоном -40 дБ/дек. Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ показаны на рис. 2.10. Вторая

сопрягающая частота показана на графике ЛАЧХ жирной вертикальной линией.

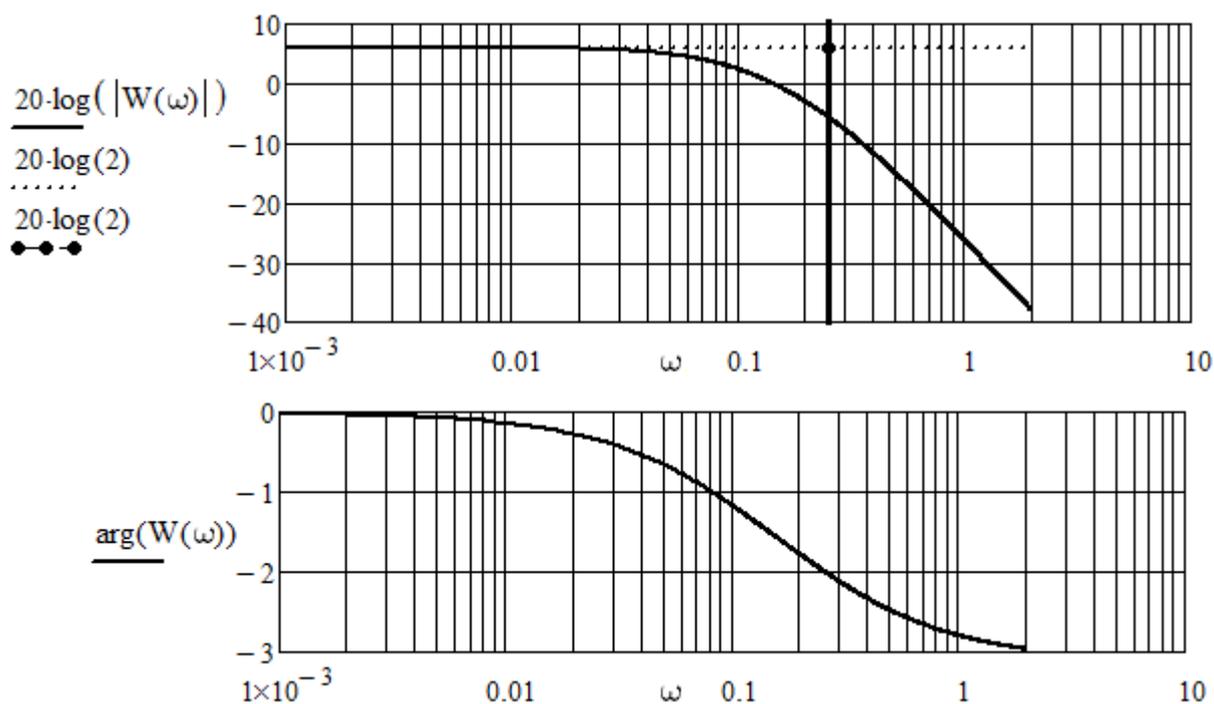


Рис. 2.10

Изображение переходной характеристики по Лапласу согласно определению [1,2,5] будет иметь вид: $H(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{2}{(10s+1)(4s+1)s}$. После арифметических преобразований выражение для изображения по Лапласу переходной характеристики примет вид: $H(s) = \frac{0,05}{(s+0,1)(s+0,25)s}$. Выполнив обратное преобразование Лапласа по таблицам [1,2,5], получим функцию-оригинал: $h(t) = 2 - 3\frac{1}{3}e^{-0,1t} + 1\frac{1}{3}e^{-0,25t}$.

Импульсную переходную характеристику для данной динамической системы найдем как производную от переходной характеристики:

$$w(t) = h'(t) = \left(2 - 3\frac{1}{3}e^{-0,1t} + 1\frac{1}{3}e^{-0,25t}\right)' = \frac{1}{3}e^{-0,1t} - \frac{1}{3}e^{-0,25t}.$$

Графики переходной и импульсной переходной характеристик показаны на рис. 2.11а и 2.11б соответственно.

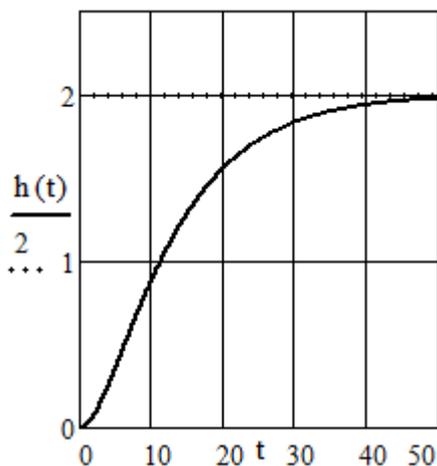


Рис. 2.11а

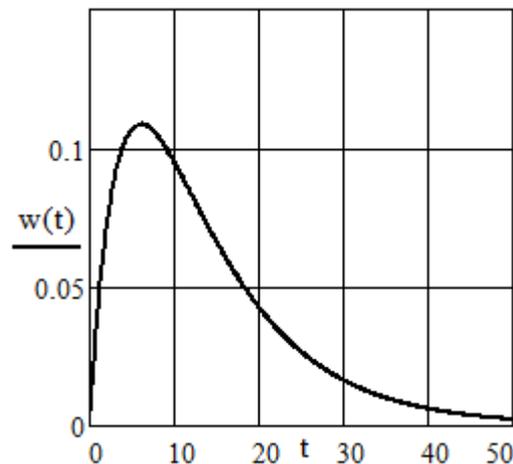


Рис. 2.11б

Задача 2.8. Апериодическое и пропорциональное звенья соединены параллельно, передаточные функции звеньев $W_a(s) = \frac{5}{4s+1}$; $W_p(s) = 2$. Найти передаточную функцию данной системы звеньев, представить её в виде передаточной функции одного из типовых звеньев. Найти аналитические выражения и построить графики для АЧХ, ФЧХ, КЧХ, переходной и импульсной переходной характеристик системы.

Решение. При параллельном соединении звеньев передаточные функции составляющих складываются, таким образом, передаточная функция данной системы будет иметь вид: $W(s) = W_a(s) + W_p(s) = \frac{5}{4s+1} + 2 = \frac{8s+7}{4s+1}$. Можно сразу привести эту функцию к виду одного из типовых звеньев, нетрудно заметить, что она сходна с передаточной функцией интегродифференцирующего звена. Вынесем из числителя передаточной функции 7, тогда получим: $W(s) = 7 \frac{8/7s+1}{4s+1}$. Таким образом, мы получили передаточную функцию вида $W_{ид}(s) = k \frac{T_x s + 1}{T_s s + 1}$, что действительно соответствует интегродифференцирующему звену, причем $k = 7$, $T_x = 8/7$, $T = 4$.

Далее получим аналитическое выражение для КЧХ: $W(j\omega) = 7 \frac{8/7j\omega+1}{4j\omega+1} = \frac{7+32\omega^2}{1+16\omega^2} + j \frac{7+32\omega^2}{1+16\omega^2}$. АЧХ данной динамической системы имеет

вид: $A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{(7+32\omega^2)^2 + 400\omega^2}{(1+16\omega^2)^2}}$. ФЧХ данной

динамической системы имеет вид: $\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = -\arctg \frac{20\omega}{7+32\omega^2}$.

Графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 2.12а и б соответственно. Годограф КЧХ данной системы представлен на рис. 2.13.

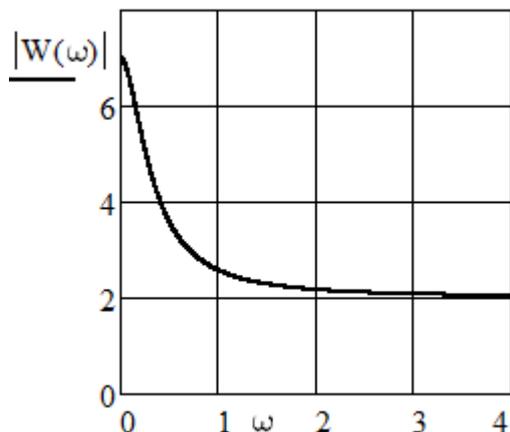


Рис. 2.12а

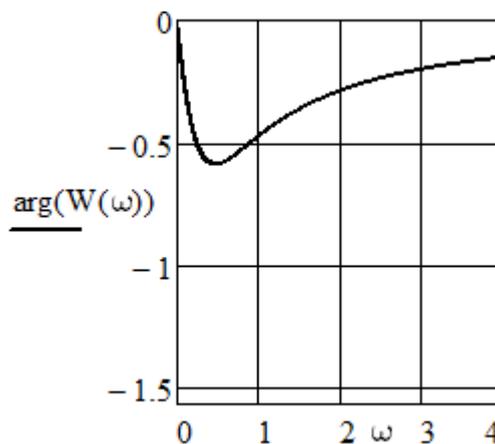


Рис. 2.12б

Также на рис. 2.13 показано, каким образом годограф КЧХ рассматриваемой динамической системы можно построить, суммируя по правилу параллелограмма векторы КЧХ входящих в систему апериодического и пропорционального звеньев на соответствующих частотах. На рис. 2.13 показано суммирование векторов на частоте 0,05 рад/с.

Изображение переходной характеристики по Лапласу имеет вид: $H(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s} = 7 \frac{8/7s+1}{4s+1} \cdot \frac{1}{s}$. Тогда, воспользовавшись таблицами преобразования Лапласа, получим функцию-оригинал: $h(t) = 7 - 5e^{-\frac{t}{4}}$. Импульсная переходная характеристика данной системы будет иметь вид: $w(t) = h'(t) = \left(7 - 5e^{-\frac{t}{4}}\right)' = 1,25e^{-\frac{t}{4}}$. Графики переходной и импульсной характеристик представлены на рис. 2.14а и 2.14б соответственно.

Задача 2.9. Два апериодических звена с передаточными функциями $W_1(s) = \frac{2}{10s+1}$; $W_2(s) = \frac{1}{4s+1}$ соединены параллельно. Найти передаточную функцию данной системы звеньев. Найти аналитические выражения и построить графики для АЧХ, ФЧХ, КЧХ, переходной и импульсной переходной характеристик системы.

Задача 2.10. Даны две системы из трех параллельно соединенных звеньев, в первом случае параллельно соединены П, И и идеальное дифференцирующее звено, во втором – П, И и РД-звенье. Параметры звеньев: $K_p = 2$, $K_u = 0,5$, $K_d = 4$, $T_d = 2$ (для РД-звена). Найдите и сравните следующие характеристики данных систем: передаточные функции, КЧХ и их годографы, АЧХ и ФЧХ и их графики, переходные характеристики и их графики.

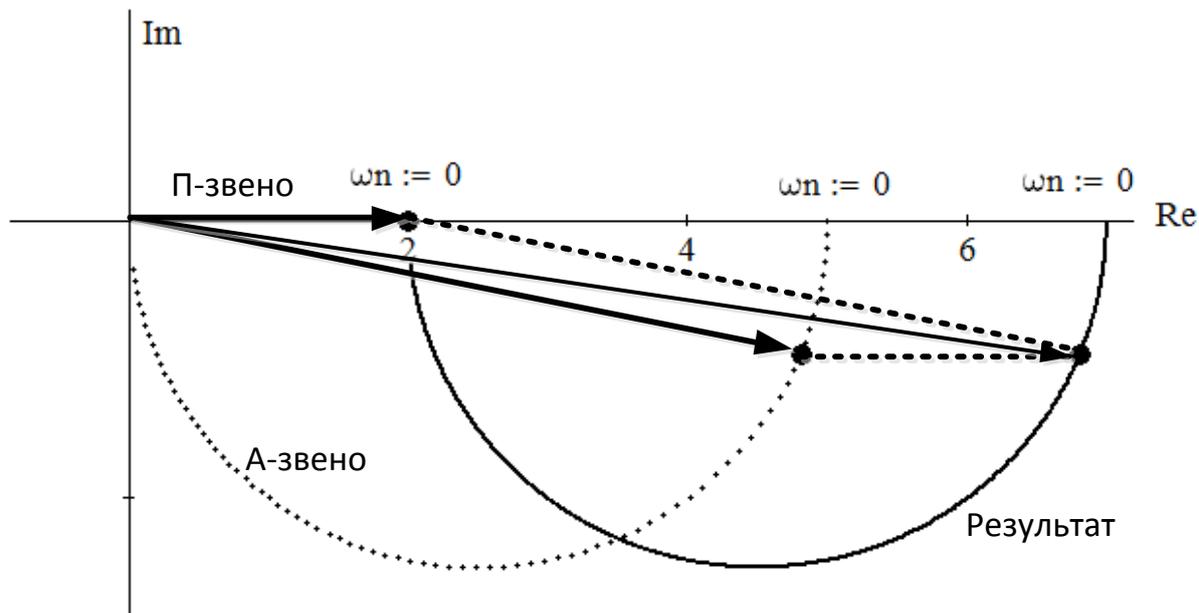


Рис. 2.13

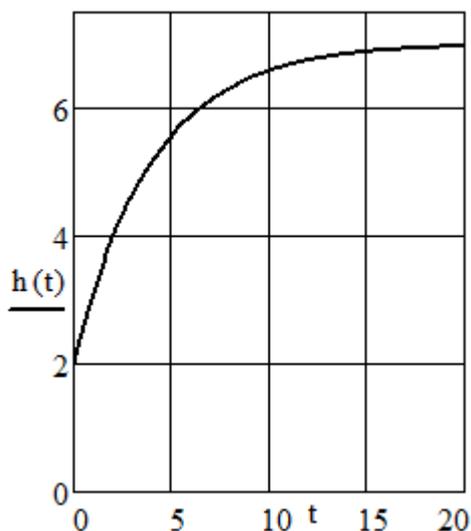


Рис. 2.14а

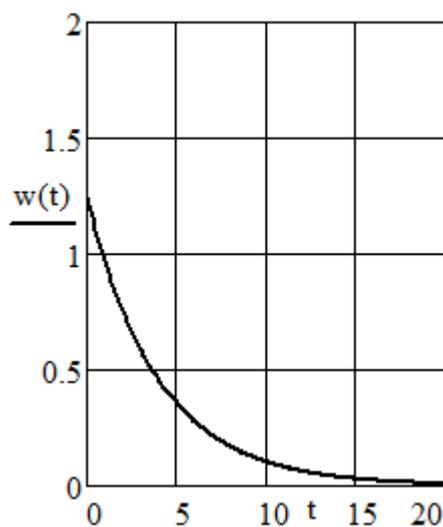


Рис. 2.14б

Задача 2.11. Три апериодических звена и звено запаздывания соединены последовательно. Время запаздывания $\tau = 1$ с, общий коэффициент передачи всех апериодических звеньев $K_a = 2$, постоянная времени каждого апериодического звена $T_a = 5$ с. Найти аналитическое выражение и построить график для переходной и импульсной переходной характеристик данной системы. Построить АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ для данной системы. Как изменится вид графиков, если время запаздывание вырастет в два раза?

Задача 2.12. Два апериодических и два реальных дифференцирующих звена соединены последовательно. Построить качественно АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ данной системы звеньев. Построить качественно ЛАЧХ и ЛФЧХ данной системы звеньев.

Задача 2.13. Три апериодических и два реальных дифференцирующих звена соединены последовательно. Построить качественно АЧХ, ФЧХ и годограф КЧХ данной системы звеньев. Построить качественно ЛАЧХ и ЛФЧХ данной системы звеньев.

Задача 2.14. П-звено охвачено отрицательной обратной связью, в которой находится И-звено. Найти передаточную функцию данного соединения звеньев и представить её в виде передаточной функции одного из типовых звеньев, построить динамические характеристики полученного звена.

Решение. Передаточная функция рассматриваемого соединения звеньев может быть найдена как
$$W(s) = \frac{W_p(s)}{1+W_p(s)W_i(s)} = \frac{K_p}{1+K_p \frac{K_i}{s}} = \frac{K_p s}{s+K_p K_i} = \frac{1}{K_p K_i} \cdot \frac{K_p s}{\frac{1}{K_p K_i} s + 1}.$$

Таким образом, легко заметить, что данная передаточная функция соответствует реальному дифференцирующему звену с коэффициентом передачи, равным K_p , и постоянной времени, равной $\frac{1}{K_p K_i}$. Динамические характеристики этого звена стандартны и приводятся в справочной литературе, поэтому нет необходимости показывать их здесь.

Задача 2.15. И-звено охвачено отрицательной обратной связью, в которой находится П-звено. Найти передаточную функцию данного соединения звеньев и представить её в виде передаточной функции одного из типовых звеньев, построить динамические характеристики полученного звена.

Задача 2.16. А-звено охвачено отрицательной обратной связью, в которой находится П-звено. Найти передаточную функцию данного соединения звеньев и представить её в виде передаточной функции одного из типовых звеньев, построить динамические характеристики полученного звена.

Задача 2.17. П-звено охвачено отрицательной обратной связью, в которой находится А-звено. Найти передаточную функцию данного соединения звеньев и представить её в виде передаточной функции одного

из типовых звеньев, построить динамические характеристики полученного звена.

Задача 2.18. Дана линейная динамическая система, передаточная функция которой имеет вид $W(s) = \frac{4(5s+1)}{(2s+1)(3s+1)}$. Построить ЛАЧХ данной системы.

Задача 2.19. Имеется разомкнутая АСР, состоящая из ПИ-регулятора, передаточная функция которого $W_{\text{ПИ}}(s) = 0,2(1 + \frac{1}{10s})$, и объекта, передаточная функция которого $W_{\text{об}}(s) = \frac{2}{(5s+1)(20s+1)}$. Построить графики АЧХ и ФЧХ и годограф КЧХ данной системы. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ данной системы.

ВЕКТОРНО-МАТИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Задача 3.1. Дана линейная динамическая система, структурная схема которой показана на рис. 3.1. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме. Передаточные функции звеньев: $W_1(s) = \frac{2}{8s+1}$; $W_2(s) = \frac{3}{10s+1}$; $W_3(s) = \frac{1}{20s+1}$.

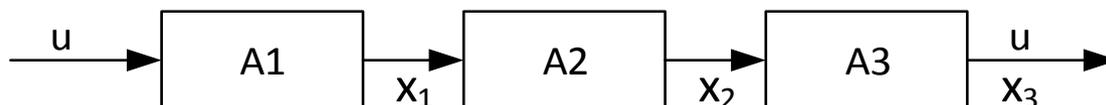


Рис. 3.1.

Решение. При описании линейной динамической системы в пространстве состояний в векторно-матричной форме необходимо найти матрицы, входящие в состав следующих выражений:

$$X'(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t);$$

$$y(t) = C^T \cdot X(t) + D \cdot u(t).$$

В ряде случаев, в частности, в рассматриваемой задаче, матрица $D = 0$.

При описании системы в реальных координатах переменными состояния являются выходы звеньев (см. рис. 3.1), таким образом, $X^T(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]$, при этом выход последнего звена является выходной величиной всей системы, таким образом, уравнение связи имеет вид $y(t) = x_3(t)$, $C^T = [0 \ 0 \ 1]$.

Далее найдем матрицы A и B , для этого запишем дифференциальные уравнения каждого из звеньев. Для первого звена:

$$8x'_1(t) + x_1(t) = 2u(t) \Rightarrow x'_1(t) = -\frac{1}{8}x_1(t) + 0x_2(t) + 0x_3(t) + \frac{1}{4}u(t).$$

Для второго звена:

$$10x'_2(t) + x_2(t) = 3x_1(t) \Rightarrow x'_2(t) = \frac{3}{10}x_1(t) - \frac{1}{10}x_2(t) + 0x_3(t) + 0u(t).$$

Для третьего звена:

$$20x'_3(t) + x_3(t) = x_2(t) \Rightarrow x'_3(t) = 0x_1(t) + \frac{1}{20}x_2(t) - \frac{1}{20}x_3(t) + 0u(t).$$

Так как система третьего порядка, матрица A будет иметь размерность 3×3 и будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -1/8 & 0 & 0 \\ 3/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 1/20 & -1/20 \end{bmatrix}.$$

Матрица B будет иметь следующий вид: $B^T = [1/4 \quad 0 \quad 0]$.

Далее представим систему в канонической управляемой и канонической наблюдаемой форме, для этого найдем передаточную функцию данной системы путем перемножения передаточных функций входящих в нее звеньев: $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s) = \frac{2}{8s+1} \cdot \frac{3}{10s+1} \cdot \frac{1}{20s+1}$.

Выполнив все необходимые арифметические преобразования, получим следующий результат: $W(s) = \frac{3/800}{s^3 + \frac{29}{400}s^2 + \frac{19}{800}s + \frac{1}{1600}}$.

Как известно, например, из [5], для системы с передаточной функцией $W(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$; $m < n$ в канонической управляемой форме матрицы для $n = 3, m = 0$ будут иметь вид:

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_y = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При подстановке в эти матрицы значений коэффициентов передаточной функции рассматриваемой системы матрицы примут вид:

$$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{1600} & -\frac{19}{800} & -\frac{29}{400} \end{bmatrix}; \quad B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_y = \begin{bmatrix} \frac{3}{800} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для системы с указанной выше передаточной функцией в канонической наблюдаемой форме матрицы для $n = 3, m = 0$ будут иметь вид:

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad B_H = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При подстановке в эти матрицы значений коэффициентов передаточной функции рассматриваемой системы матрицы примут вид:

$$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{1600} \\ 1 & 0 & -\frac{19}{800} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{400} \end{bmatrix}; B_y = \begin{bmatrix} 3 \\ 800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Следует также отметить, что переход от передаточной функции к представлению системы в пространстве состояний не является однозначным, то есть, одной передаточной функции может соответствовать несколько вариантов векторно-матричного представления системы (выше для одной системы было получено три векторно-матричных представления). При этом переход от векторно-матричного представления к передаточной функции является однозначным и выполняется по формуле [5]: $W(s) = C(sE - A)^{-1}B + D$.

Задача 3.2. Дана линейная динамическая система, структурная схема которой показана на рис. 3.2. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме. Передаточные функции звеньев: $W_1(s) = \frac{4}{5s+1}$; $W_2(s) = \frac{2}{16s+1}$; $W_3(s) = \frac{20s}{10s+1}$.

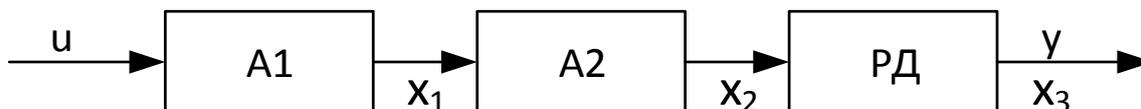


Рис. 3.2.

Задача 3.3. Рассмотреть линейную динамическую систему, заданную в задаче 2.19. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме.

Указания по решению. Для получения векторно-матричного представления данной системы в реальных координатах представить объект регулирования в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев, $W_1(s) = \frac{2}{5s+1}$, $W_2(s) = \frac{1}{20s+1}$. Обозначить переменной x_1 выход И-составляющей регулятора, переменной x_2 – выход первого апериодического звена, переменной x_3 – выход второго апериодического звена.

Задача 3.4. Дана замкнутая АСР состоящая из П-регулятора, передаточная функция которого $W_{\Pi}(s) = 0,5$, и объекта, передаточная функция которого $W_{об}(s) = \frac{1,8}{(8s+1)(10s+1)}$. Представить эту систему в

векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме.

Решение. Для представления системы в пространстве состояний удобно пользоваться её структурной схемой, которая приводится на рис. 3.3.

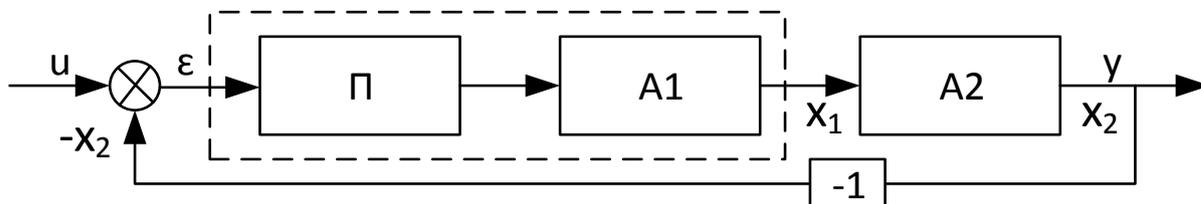


Рис. 3.3.

Объект можно представить как два апериодических звена, соединенных последовательно, передаточные функции звеньев $W_1(s) = \frac{1,8}{8s+1}$; $W_2(s) = \frac{1}{10s+1}$.

Данная система является системой второго порядка, таким образом, переменных состояния будет две - $X(t)^T = [x_1(t) \ x_2(t)]$. При представлении системы в реальных координатах эти переменные состояния будут соответствовать выходам модулей, показанных на рис. 3.3. Передаточная функция первого модуля представляет собой произведение передаточных функций первого апериодического звена и П-регулятора: $W_{m1}(s) = W_1(s)W_{\Pi}(s) = \frac{1,8}{8s+1} \cdot 0,5 = \frac{0,8}{8s+1}$. Передаточная функция второго модуля - это передаточная функция второго апериодического звена: $W_{m2}(s) = W_2(s) = \frac{1}{10s+1}$.

Выход последнего звена является выходной величиной всей системы, таким образом, уравнение связи имеет вид $y(t) = x_2(t)$, $C^T = [0 \ 1]$.

Также для составления уравнений состояния необходимо записать выражение для сигнала рассогласования: $\varepsilon(t) = u(t) - y(t) = u(t) - x_2(t)$. Далее запишем дифференциальное уравнение для первого модуля: $8x_1'(t) + x_1(t) = 0,8\varepsilon(t)$

$$8x_1'(t) + x_1(t) = 0,8(u(t) - x_2(t)) \Rightarrow x_1'(t) = -\frac{1}{8}x_1(t) - \frac{1}{10}x_2(t) + \frac{1}{10}u(t).$$

Запишем дифференциальное уравнение для второго модуля: $10x_2'(t) + x_2(t) = x_1(t) \Rightarrow x_2'(t) = \frac{1}{10}x_1(t) - \frac{1}{10}x_2(t) + 0u(t)$.

Матрица A будет иметь следующий вид: $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$. Матрица B

будет иметь следующий вид: $B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$.

Далее найдем передаточную функцию данной системы по каналу $u - y$: $W_{uy}(s) = \frac{W_{\Pi}(s)W_1(s)W_2(s)}{1+W_{\Pi}(s)W_1(s)W_2(s)} = \frac{\frac{1,8}{8s+1} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{10s+1}}{1 + \frac{1,8}{8s+1} \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{10s+1}} = \frac{0,011}{s^2 + 0,225s + 0,024}$.

Как было указано выше, матрицы для представления системы в канонической управляемой форме будут иметь вид: $A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,024 & -0,225 \end{bmatrix}$; $B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C_y = \begin{bmatrix} 0,011 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Матрицы для представления системы в канонической наблюдаемой форме будут иметь вид: $A_H = \begin{bmatrix} 0 & -0,024 \\ 1 & -0,225 \end{bmatrix}$; $B_H = \begin{bmatrix} 0,011 \\ 0 \end{bmatrix}$; $C_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Задача 3.5. Дана замкнутая АСР состоящая из И-регулятора, передаточная функция которого $W_{\Pi}(s) = 0,1/s$, и объекта, передаточная функция которого $W_{об}(s) = \frac{2}{(8s+1)(20s+1)}$. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме.

Указания по решению. Для получения векторно-матричного представления данной системы в реальных координатах представить объект регулирования в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев, $W_1(s) = \frac{2}{8s+1}$, $W_2(s) = \frac{1}{20s+1}$. Обозначить переменной x_1 выход регулятора, переменной x_2 – выход первого апериодического звена, переменной x_3 – выход второго апериодического звена.

Задача 3.6. Дана замкнутая АСР состоящая из ПИ-регулятора, передаточная функция которого $W_{\Pi}(s) = 0,5(1 + \frac{1}{5s})$, и объекта, передаточная функция которого $W_{об}(s) = \frac{1,5}{(4s+1)(10s+1)}$. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах, в канонической наблюдаемой и канонической управляемой форме.

Указания по решению. Для получения векторно-матричного представления данной системы в реальных координатах представить объект регулирования в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев, $W_1(s) = \frac{1,5}{4s+1}$, $W_2(s) = \frac{1}{10s+1}$. Обозначить переменной x_1 выход И-звена регулятора, переменной x_2 – выход первого

апериодического звена, переменной x_3 – выход второго апериодического звена.

Задача 3.7. Дана замкнутая АСР, состоящая из И-регулятора и объекта, структурная схема АСР, передаточная функция регулятора и передаточные функции объекта по каналам $\mu - u$ и $\lambda - u$ показаны на рис. 3.4. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах (координаты также показаны на рис. 3.4), представить данную систему по каналу $u - y$ в канонической наблюдаемой и управляемой формах.

Решение. В данном случае выходная величина рассматриваемой системы может быть найдена как $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 0 \cdot x_3(t)$, таким образом, матрица связи будет иметь вид: $C^T = [1 \ 1 \ 0]$.

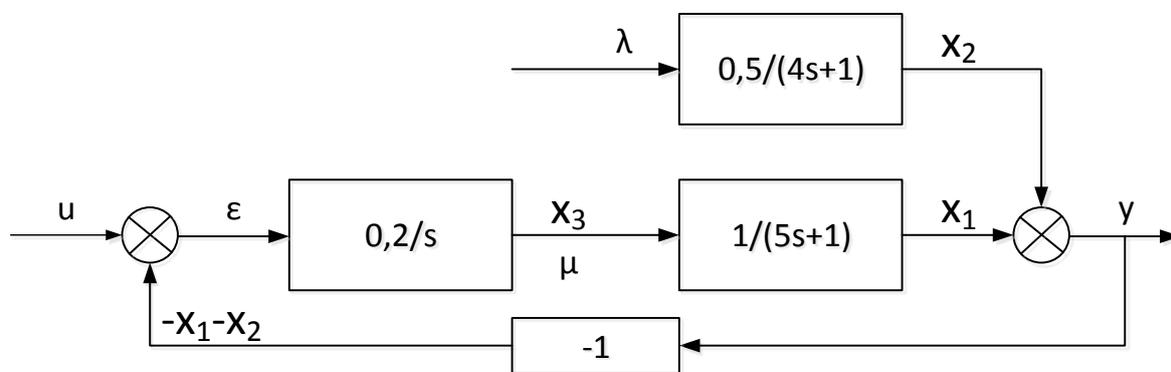


Рис. 3.4.

Уравнения состояния системы в векторно-матричной форме будут иметь вид: $X'(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t)$. В данном случае, в отличие от рассмотренных ранее, $U(t)$ – это вектор входных воздействий (в рассматриваемой системе их два, сигнал задания $u(t)$ и возмущающее воздействие $\lambda(t)$), $U^T(t) = [u(t) \ \lambda(t)]$. Матрица B в этом случае будет представлять собой прямоугольную матрицу, состоящую из двух столбцов и трех строк.

Запишем дифференциальные уравнения составляющих системы.

$$5x'_1(t) + x'_1(t) = x_3(t);$$

$$x'_1(t) = -\frac{1}{5}x_1(t) + 0x_2(t) + \frac{1}{5}x_3(t) + 0u(t) + 0\lambda(t).$$

$$4x'_2(t) + x'_2(t) = 0,5\lambda(t);$$

$$x'_2(t) = 0x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t) + 0x_3(t) + 0u(t) + \frac{1}{8}\lambda(t).$$

$$x'_3(t) = 0,2\epsilon(t); \quad \epsilon(t) = u(t) - x_1(t) - x_2(t).$$

$$x'_3(t) = -\frac{1}{5}x_1(t) - \frac{1}{5}x_2(t) + 0x_3(t) + \frac{1}{5}u(t) + 0\lambda(t).$$

На основании записанной системы уравнений составим матрицы A и B .

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Представление системы по каналу $u - y$ в канонической управляемой и наблюдаемой формах делается стандартным образом, поэтому нет необходимости рассматривать этот вопрос здесь еще раз.

Задача 3.8. Дана замкнутая АСР, состоящая из ПИ-регулятора и объекта, структурная схема АСР и передаточные функции объекта по каналам $\mu - y$ и $\lambda - y$ показаны на рис. 3.4. Передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид $W_{\text{ПИ}}(s) = 0,4(1 + \frac{1}{8s})$. Представить эту систему в векторно-матричном виде в реальных координатах (координаты также показаны на рис. 3.4), представить данную систему по каналу $u - y$ в канонической наблюдаемой и управляемой формах.

Указания по решению. Для получения векторно-матричного представления данной системы в реальных координатах обозначить переменной x_3 выход И-звена регулятора.

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Задача 4.1. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$. Проанализируйте данную систему на устойчивость по корням характеристического уравнения. Качественно оцените вид переходного процесса в данной АСР.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения. Методом подбора найдем один из корней уравнения $s_1 = -3$. Далее разделив левую часть характеристического уравнения «уголком» на $s + 3$ получим $s^2 + 3s + 2 = 0$. Далее обычным способом найдем корни полученного квадратного уравнения, $s_2 = -1, s_3 = -2$. Так как все корни действительные и отрицательные, то система устойчива согласно необходимому и достаточному условию устойчивости. Так как все корни действительные, переходный процесс в системе будет иметь аperiodический характер.

Задача 4.2. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $s^3 + 5s^2 + 5s + 4 = 0$. Проанализируйте данную

систему на устойчивость по корням характеристического уравнения. Качественно оцените вид переходного процесса в данной АСР.

Задача 4.3. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$. Проанализируйте данную систему на устойчивость по критериям Гурвица и Михайлова.

Решение. Характеристическое уравнение динамической системы третьего порядка в общем виде имеет вид $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$.

Для того, чтобы проанализировать динамическую систему на устойчивость по критерию Гурвица, составим матрицу Гурвица. Для системы третьего порядка она будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 1 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = 6 > 0 \\ \Delta_2 &= a_1a_2 - a_0a_3 = 6 \cdot 11 - 1 \cdot 6 = 60 > 0 \\ \Delta_3 &= (a_1a_2 - a_0a_3)a_3 = \\ &= (6 \cdot 11 - 1 \cdot 6) \cdot 6 = 360 > 0 \end{aligned}$$

Видно, что все миноры матрицы Гурвица положительны, таким образом, система устойчива.

Годограф характеристического вектора для данной системы показан на рис.4.1а (крупным планом начальный участок) и б.

Выражение для характеристического вектора имеет вид:

$$F(j\omega) = (j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 6 = (6 - 6\omega^2) + j(11\omega - \omega^3).$$

Проанализируем форму годографа. В точке 0 (рис. 4.1а): $Re(F(0)) > 0$; $Im(F(0)) = 0$. Таким образом, годограф начинается на вещественной положительной полуоси.

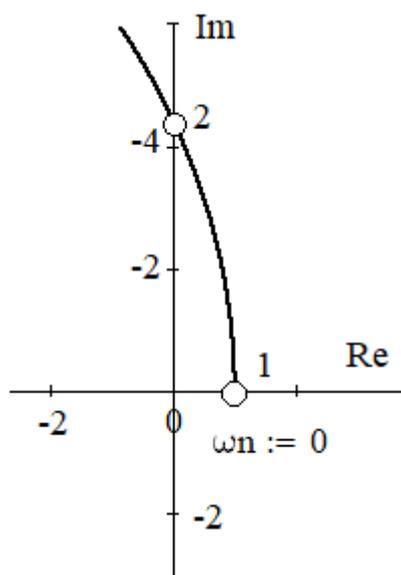


Рис. 4.1а.

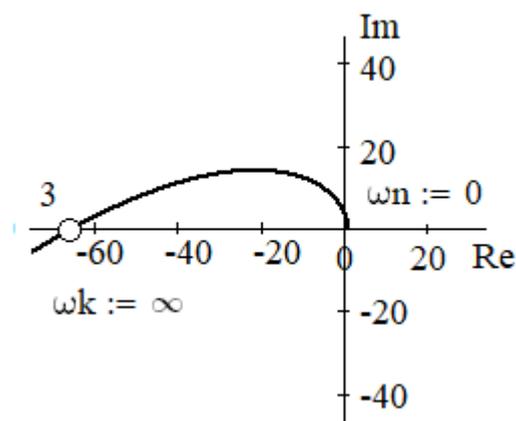


Рис. 4.1б

В точке 1 (рис. 4.1а): $Re(F(j\omega_1)) = 0 \Rightarrow 6 - 6\omega_1^2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 1$. Тогда мнимая часть $Im(F(j\omega_1)) = 11 \cdot 1 - 1^3 = 10 > 0$.

В точке 2 (рис. 4.1б): $Im(F(j\omega_2)) = 0 \Rightarrow 11\omega_2 - \omega_2^3 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{11}$. $\omega_2 = \sqrt{11} > \omega_1 = 1$. $Re(F(j\omega_2)) = 6 - 6 \cdot 11 = -60 < 0$. Другие точки пересечения годографа с осями отсутствуют. При $\omega \rightarrow \infty$ действительная и мнимая части характеристического вектора обращаются в $-\infty$. Таким образом, годограф характеристического вектора проходит в соответствии с критерием Михайлова, то есть динамическая система устойчива.

Задача 4.4. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $s^3 + 5s^2 + 5s + 4 = 0$. Проанализируйте данную систему на устойчивость по критериям Гурвица и Михайлова.

Задача 4.5. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $s^4 + 13s^3 + 59s^2 + 107s + 60 = 0$. Проанализируйте данную систему на устойчивость по критериям Гурвица и Михайлова.

Задача 4.6. Дано характеристическое уравнение линейной динамической системы $160s^3 + 28s^2 + s + 0,2 = 0$. Проанализируйте данную систему на устойчивость по критериям Гурвица и Михайлова.

Задача 4.7. Проанализируйте на устойчивость по критериям Гурвица и Михайлова динамическую систему, описанную в задаче 3.6.

Задача 4.8. Имеется замкнутая АСР с П-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{2}{(4s+1)(5s+1)(6s+1)}$. Найдите значение коэффициента передачи П-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости.

Решение. Найдём передаточную функцию данной АСР по каналу задания:

$$W_{uy}^{3c}(s) = \frac{\frac{2K_p}{(4s+1)(5s+1)(6s+1)}}{1 + \frac{2K_p}{(4s+1)(5s+1)(6s+1)}} = \frac{2K_p}{120s^3 + 74s^2 + 15s + 1 + 2K_p}$$

Выполним расчет по критерию Гурвица. Рассмотрим характеристическое уравнение системы $120s^3 + 74s^2 + 15s + 1 + 2K_p = 0$. Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{bmatrix} 74 & 1 + 2K_p & 0 \\ 120 & 15 & 0 \\ 0 & 74 & 1 + 2K_p \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta_1 &= 74 > 0 \\ \Delta_2 &= 74 \cdot 15 - 120 \cdot (1 + 2K_p) = 0 \\ \Delta_3 &= \Delta_2(1 + 2K_p) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом: $74 \cdot 15 - 120 \cdot (1 + 2K_p) = 0 \Rightarrow K_p = 4,125$ (при этом значении коэффициента передачи П-регулятора АСР выйдет на границу устойчивости). Для того, чтобы АСР была устойчива, $0 < K_p < 4,125$.

Для сравнения выполним расчет по критерию Михайлова. Чтобы система была на границе устойчивости, годограф вектора Михайлова должен проходить через начало координат, то есть $Im(F(j\omega_x)) = 0$; $Re(F(j\omega_x)) = 0$. Запишем выражение для характеристического вектора: $F(j\omega) = 120(j\omega)^3 + 74(j\omega)^2 + 15j\omega + 1 + 2K_p$.

Перепишем это выражение в виде суммы действительной и мнимой частей: $F(j\omega) = (1 + 2K_p - 74\omega^2) + j(15\omega - 120\omega^3)$. При $\omega = 0$ $Re(F(0)) = 1 + 2K_p > 0, \forall K_p > 0$. Далее запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} Im(F(j\omega)) = 0 \\ Re(F(j\omega)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15\omega - 120\omega^3 = 0 \\ 1 + 2K_p - 74\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{2}/4 \\ K_p = 4,125 \end{aligned}$$

Задача 4.9. Имеется замкнутая АСР с П-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{3}{(2s+1)^2(3s+1)}$. Найдите значение коэффициента передачи П-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости.

Задача 4.10. Имеется замкнутая АСР с И-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{3}{(2s+1)^2(3s+1)}$. Найдите диапазон значений коэффициента передачи И-регулятора, при которых АСР будет устойчива.

Задача 4.11. Имеется замкнутая АСР с П-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,5}{(4s+1)^3}$. Найдите с помощью критерия Найквиста значение коэффициента передачи П-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ для разомкнутой АСР с найденным коэффициентом передачи. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы.

Решение. В рассматриваемом случае АСР в разомкнутом состоянии устойчива. В соответствии с критерием Найквиста, АСР находится на границе устойчивости, если годограф КЧХ разомкнутой АСР проходит через точку с координатами $(-1; j0)$, то есть, $W_{pc}(j\omega) = K_p W_{\mu y}(j\omega) = -1$. То есть, можно записать систему уравнений для ФЧХ и АЧХ:

$$\begin{cases} A_{pc}(\omega) = 1 \\ \varphi_{pc}(\omega) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \prod_i A_i(\omega) = 1 \\ \sum_i \varphi_i(\omega) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,5 \cdot K_p}{\sqrt{4^2 \omega^2 + 1}^3} = 1 \\ -3 \operatorname{arctg}(4\omega) = -\pi \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений нужно начинать с уравнения для фазы, так как в него выходит только одна из неизвестных переменных (частота). Решив данное уравнение, получаем $\omega = \sqrt{3}/4$. Подставим найденную частоту в уравнение для ФЧХ и найдём $K_p = 16$.

ЛАЧХ и ЛФЧХ для данной системы приведены на рис. 4.2, вертикальной жирной линией показана частота $\omega = \sqrt{3}/4$, как видно из рисунка, на этой частоте ЛФЧХ принимает значение $-\pi$, а ЛАЧХ – нуль.

Задача 4.12. Имеется замкнутая АСР с И-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,5}{(4s+1)^3}$. Найдите с помощью критерия Найквиста значение коэффициента передачи И-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ для разомкнутой АСР с найденным коэффициентом передачи. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы. Сравните найденный коэффициент K_i с коэффициентом передачи П-регулятора, найденным при решении задачи 4.11.

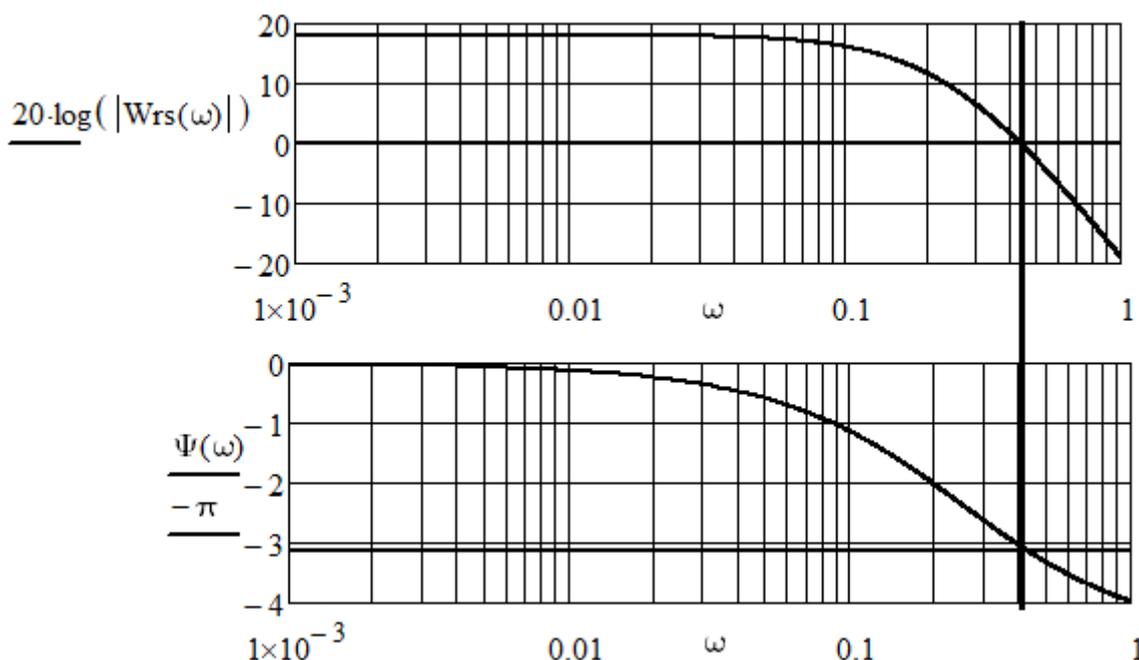


Рис. 4.2.

Задача 4.13. Имеется замкнутая АСР с П-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,2}{(5s+1)^3}$. Найдите с помощью критерия Найквиста значение коэффициента передачи П-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ для разомкнутой АСР с найденным коэффициентом передачи. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы.

Задача 4.14. Имеется замкнутая АСР с И-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,2}{(5s+1)^3}$. Найдите с помощью критерия Найквиста значение коэффициента передачи И-регулятора, при котором АСР выйдет на границу устойчивости. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ для разомкнутой АСР с найденным коэффициентом передачи. Сравните с коэффициентом передачи П-регулятора, найденным в задаче 4.13.

Задача 4.15. Дана замкнутая АСР с П-регулятором ($K_p = 4$) и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,6}{(8s+1)^3}$. Проанализировать АСР на устойчивость, определить запас устойчивости по фазе и амплитуде, если АСР устойчива, построить ЛАЧХ и ЛФЧХ. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы.

Решение. Анализ системы на устойчивость выполним по критерию Найквиста. Для этого вычислим, на какой частоте ФЧХ разомкнутой АСР принимает значение $-\pi$: $-3\arctg(8\omega) = -\pi \Rightarrow \omega = \sqrt{3}/8$. Вычислим значение амплитуды на данной частоте: $A_{pc}(\omega) = \frac{0,6K_p}{\sqrt{8^2(\frac{\sqrt{3}}{8})^2+1}} = 0,3 < 1$.

Таким образом, замкнутая АСР устойчива.

Определим запас устойчивости по фазе и модулю. Для определения запаса устойчивости по модулю: $\Delta = 0 - 20 \cdot \lg(A_{pc}(0,3)) = 10,46$ дБ.

Для определения запаса устойчивости по фазе найдем частоту, на которой $A_{pc}(\omega) = 1$: $\frac{0,6K_p}{\sqrt{8^2\omega^2+1}} = 1 \Rightarrow \omega = 0,11 \frac{\text{рад}}{c}$. Далее найдем запас устойчивости по фазе: $\Delta\varphi = -\pi - (-3\arctg(8 \cdot 0,11)) = 56^\circ = 0,97$ рад.

Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ для данной системы представлены на рис. 4.3, там же показаны запас устойчивости по модулю (верхний график) и запас устойчивости по фазе (нижний график).

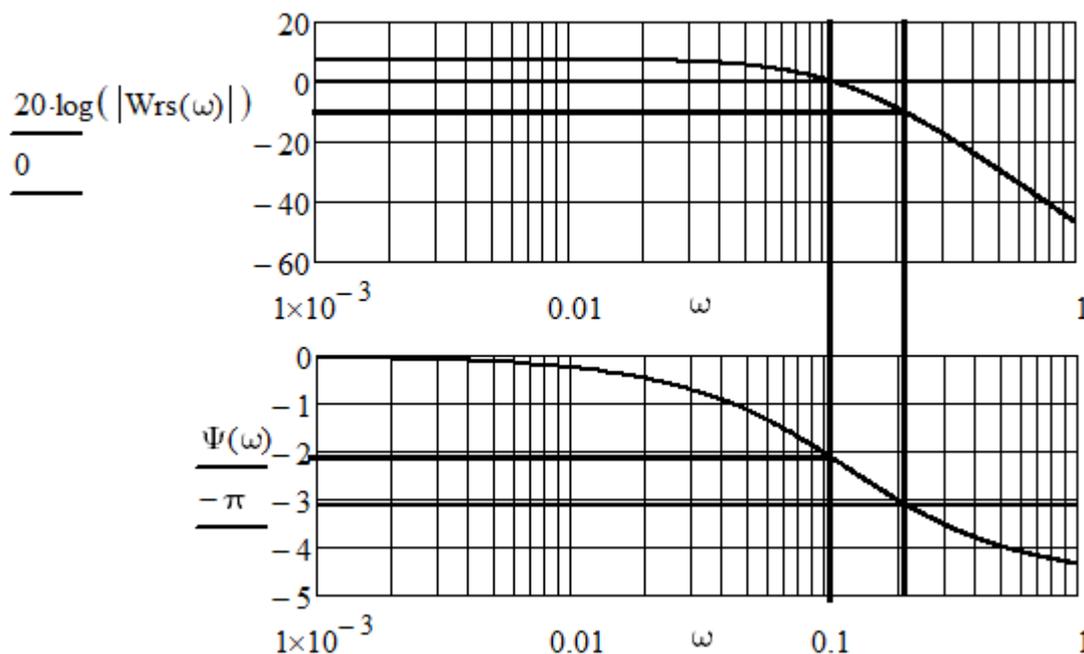


Рис. 4.3.

Задача 4.16. Дана замкнутая АСР с П-регулятором ($K_p = 5$) и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,4}{(6s+1)^3}$. Проанализировать АСР на устойчивость, если АСР устойчива, определить запас устойчивости по фазе и амплитуде. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы.

Задача 4.17. Дана замкнутая АСР с И-регулятором ($K_i = 2$) и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,5}{(3s+1)^3}$. Проанализировать АСР на устойчивость, определить запас устойчивости по фазе и амплитуде, если АСР устойчива. Построить ЛАЧХ и ЛФЧХ. Построить годограф КЧХ разомкнутой системы.

Задача 4.18. Докажите, что АСР с И-регулятором и объектом без самовыравнивания неработоспособна.

Указания по решению: задайтесь моделью объекта, например, пусть модель объекта представляет собой И-звено или И-звено и А-звено, соединенные последовательно, после чего рассмотрите устойчивость данной АСР, например, по критерию Найквиста.

Задача 4.19. Дана замкнутая АСР с ПИ-регулятором ($K_i = 2$) и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{0,5}{(4s+1)^2}$. При каких значениях

коэффициента K_p данная система будет устойчива? Постройте для АСР при данных значениях коэффициентов годограф КЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ.

Задача 4.20. Дана замкнутая АСР с ПИ-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{2}{(5s+1)^2}$. Найти соотношение коэффициентов K_p и K_i , при котором данная система будет устойчива. Построить границу устойчивости в координатах $K_p - K_i$.

Решение. Для решения этой задачи можно применить любой критерий устойчивости. Воспользуемся критерием Гурвица, для этого запишем передаточную функцию замкнутой АСР по каналу задания (или по любому другому каналу):

$$W(s) = \frac{W_{\mu y}(s)W_{pi}(s)}{1+W_{\mu y}(s)W_{pi}(s)} = \frac{\frac{2}{(5s+1)^2} \cdot (K_p + \frac{K_i}{s})}{1 + \frac{2}{(5s+1)^2} \cdot (K_p + \frac{K_i}{s})}$$

выполним необходимые арифметические преобразования и для получения характеристического уравнения замкнутой АСР приравняем к нулю знаменатель передаточной функции. Получим следующее уравнение:

$$25s^3 + 10s^2 + s \cdot (1 + 5K_p) + 5K_i = 0.$$

По данному уравнению запишем матрицу Гурвица, которая будет иметь вид: $\begin{bmatrix} 10 & 5K_i & 0 \\ 25 & 1 + 5K_p & 0 \\ 0 & 10 & 5K_i \end{bmatrix}$. Как видно из матрицы, первый минор

всегда положителен. Запишем второй минор, который должен быть равен нулю, чтобы АСР находилась на границе устойчивости:

$\Delta_2 = 10 + 50K_p - 125K_i = 0$. Преобразовав это выражение, получим следующую формулу: $K_i = 0,4K_p + 0,08$. Легко заметить, что третий минор также будет равен нулю, если равен нулю второй. Вид границы устойчивости показан на рис. 4.4.

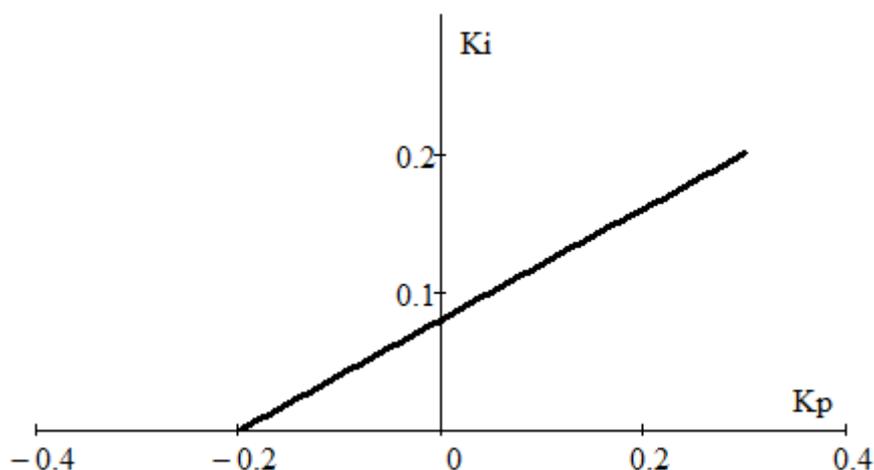


Рис. 4.4

Легко проверить (например, подставив в характеристическое уравнение координаты одной из точек плоскости $K_i - K_p$), что система устойчива при параметрах настройки, соответствующих координатам точек, лежащих ниже показанной на рис. 4.4 прямой.

Задача 4.21.

Дана замкнутая АСР с ПИ-регулятором и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{2}{(2s+1)^3}$. Найти соотношение коэффициентов K_p и K_i , при котором данная система будет устойчива. Построить границу устойчивости в координатах $K_p - K_i$. Возьмите в области устойчивости любую точку и постройте для замкнутой АСР с данными параметрами настройки графики ЛАЧХ и ЛФЧХ. Вычислите запас устойчивости по модулю и фазе. При каких значениях K_p будет устойчива АСР с данным объектом и П-регулятором? При каких значениях K_i будет устойчива АСР с данным объектом и И-регулятором.

Указания к решению. В данном случае задачу удобно решать по критерию Михайлова. Нужно воспользоваться тем фактом, что если система находится на границе устойчивости, характеристический вектор проходит через начало координат. Критические значения параметров настройки П и И-регуляторов можно найти по пересечению линией границы устойчивости соответствующих осей координат.

Задача 4.22.

Проверить возможность вывода АСР из задачи 4.21 на границу аperiodической устойчивости.

Указания к решению. Границе аperiodической устойчивости соответствует характеристическое уравнение, имеющее нулевой корень (что, в свою очередь, соответствует равенству нулю свободного члена характеристического уравнения). Все остальные корни характеристического уравнения должны быть левыми.

Задача 4.23. Оценить корневой показатель колебательности, степень затухания и вид переходного процесса в системе, корни характеристического уравнения которой равны $-0,2 + j$, $-0,2 - j$, -12 .

Указания к решению. Пару комплексно-сопряженных корней считать доминирующими. Считать, что составляющая переходного процесса, соответствующая третьему корню характеристического уравнения, затухает значительно быстрее, чем составляющие, соответствующие первому и второму корням.

Задача 4.24. Найти частотный показатель колебательности замкнутой АСР, описанной в задаче 4.8, при значениях коэффициента передачи П-регулятора $K_p = 2$, $K_p = 3$, $K_p = 8$.

Указания к решению. Для решения задачи необходимо получить выражение для АЧХ замкнутой АСР и взять от него производную по частоте.

Задача 4.25. Дана замкнутая АСР с П-регулятором с $K_p = 1$ и объектом с передаточной функцией $W_{\mu y}(s) = \frac{2}{(4s+1) \cdot (2s+1)}$. Найти степень затухания в данной АСР, корневой и частотный показатели колебательности.

Указания к решению. Для решения данной задачи удобнее всего найти передаточную функцию данной замкнутой АСР по каналу задания, после чего привести её к виду передаточной функции одного из типовых звеньев второго порядка.

ОТВЕТЫ

Дифференциальные уравнения и динамические характеристики линейных систем. 1.2. При $x(t) = e^{-t/3}$ $X(s) = \frac{1}{s+1/3}$. При $x(t) = e^{t/8}$ $X(s) = \frac{1}{s-1/8}$. При $x(t) = 4t$ $X(s) = \frac{4}{s^2}$. 1.4. При $x(t) = \delta(t)$ $y(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$. При $x(t) = \mathbf{1}(t)$ $y(t) = \frac{1}{3} + 2/3 \cdot e^{-3t} - e^{-2t}$. 1.5. $y(t) = 0,1e^{2t} - 0,1e^{-t/2}$. 1.6. При $x(t) = \delta(t)$ $y(t) = 2/9 \cdot e^{2t} - 2/9 \cdot e^{-t}$. При $x(t) = \mathbf{1}(t)$ $y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot e^{-t} + 1/9 \cdot e^{2t}$. 1.8. $y(t) = 2/9 \cdot te^{-t/3}$. 1.10. При $x(t) = \delta(t)$ $y(t) = 2\sqrt{7}/7 \cdot e^{-t} \sin(\sqrt{7}t)$. При $x(t) = \mathbf{1}(t)$ $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-t} \cos(\sqrt{7}t) - \sqrt{7}/28 \cdot e^{-t} \sin(\sqrt{7}t)$. 1.11. При $x(t) = \delta(t)$ $y(t) = -5e^{-2t} + 5e^{-t}$. При $x(t) = \mathbf{1}(t)$ $y(t) = 2,5 + 2,5e^{-2t} - 5e^{-t}$. При $x(t) = t$ $y(t) = -3,75 + 2,5t - 1,25e^{-2t} + 5e^{-t}$. 1.13. $RC \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} + U_{\text{ВЫХ}} = RC \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt}$. 1.15. $h(t) = 0,3 - 0,3e^{-t} \cos(3t) - 0,1e^{-t} \sin(3t)$, $w(t) = e^{-t} \sin(3t)$. 1.17. $W(s) = \frac{2s}{10s+1}$; $W(j\omega) = \frac{20\omega^2}{1+100\omega^2} + j \frac{2\omega}{1+100\omega^2}$; $A(\omega) = 2\omega/\sqrt{1+100\omega^2}$; $\varphi(\omega) = \arctg(1/10\omega)$.

Структурные схемы систем управления. 2.5. Для того, чтобы звено стало колебательным, необходимо, чтобы $T_1 < 2T_2$. 2.6. $m = 1,333$; $M = 1,042$; $\Psi = 0,9998$. 2.15. А-звено, $K_a = 1/K_p$; $T_a = 1/K_i K_p$. 2.16. А-звено, $K_{a1} = K_a/(1 + K_p K_a)$; $T_{a1} = T_a/(1 + K_p K_a)$. 2.17. ИД-звено, $K = K_p/(1 + K_p K_a)$; $T_x = T_a$; $T = T_a/(1 + K_p K_a)$.

Векторно-матричное представление линейных динамических

систем. 3.2. В реальных координатах: $A_P = \begin{bmatrix} -1/5 & 0 & 0 \\ 1/8 & -1/16 & 0 \\ 1/4 & -1/8 & -1/10 \end{bmatrix};$

$B_P = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$ в канонической управляемой форме $A_y =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{800} & -\frac{31}{800} & -\frac{29}{80} \end{bmatrix}; B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix},$ в канонической наблюдаемой

форме $A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{800} \\ 1 & 0 & -\frac{31}{800} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{80} \end{bmatrix}; B_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0 \end{bmatrix}; C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad 3.3.$

$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & -0,4 & 0,08 \\ 0 & 0,05 & -0,05 \end{bmatrix}; B_P = \begin{bmatrix} 0,02 \\ 0,08 \\ 0 \end{bmatrix}; C_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_y =$
 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,01 & -0,25 \end{bmatrix}; B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 0,0004 \\ 0,004 \\ 0 \end{bmatrix}, A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,01 \\ 0 & 1 & -0,25 \end{bmatrix};$

$B_H = \begin{bmatrix} 0,0004 \\ 0,04 \\ 0 \end{bmatrix}; C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad 3.5. A_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,1 \\ 0,25 & -0,125 & 0 \\ 0 & 0,05 & -0,05 \end{bmatrix}; B_P = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

$C_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/800 & -1/160 & -7/40 \end{bmatrix}; B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 1/800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$A_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/800 \\ 1 & 0 & -1/160 \\ 0 & 1 & -7/40 \end{bmatrix}; B_H = \begin{bmatrix} 1/800 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad 3.6.$

$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/10 \\ 3/8 & -1/4 & -3/16 \\ 0 & 1/10 & -1/10 \end{bmatrix}; B_P = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 3/16 \\ 0 \end{bmatrix}; C_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$

$A_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3/800 & -7/160 & -7/20 \end{bmatrix}; B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C_y = \begin{bmatrix} 3/800 \\ 3/160 \\ 0 \end{bmatrix}, A_H =$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3/800 \\ 1 & 0 & -7/160 \\ 0 & 1 & -7/20 \end{bmatrix}; B_H = \begin{bmatrix} 3/800 \\ 3/160 \\ 0 \end{bmatrix}; C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad 3.8. A_P =$

$\begin{bmatrix} -0,28 & -0,08 & 0,2 \\ 0 & -0,25 & 0 \\ -0,05 & -0,05 & 0 \end{bmatrix}; B_P = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 \\ 0 & 0,125 \\ 0,05 & 0 \end{bmatrix}; C_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. A_y =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,01 & -0,28 \end{bmatrix}; \quad B_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C_y = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,08 \end{bmatrix}. \quad A_H = \begin{bmatrix} 0 & -0,01 \\ 1 & -0,28 \end{bmatrix}; \quad B_H = \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,08 \end{bmatrix}; \\ C_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Устойчивость и запас устойчивости систем управления.

4.2. Система устойчива, переходный процесс имеет колебательный характер. **4.4.** Система устойчива. **4.5.** Система устойчива. **4.6.** Система неустойчива. **4.7.** Система устойчива. **4.9.** $K_p = 2\frac{7}{9}$. **4.10.** $0 < K_i < 0,13$. **4.12.** $K_i = \frac{4}{9}$. **4.13.** $K_p = 40$. **4.14.** $K_i = \frac{8}{9}$. **4.16.** Система устойчива, $\Delta = 20,04$ дБ, $\Delta\varphi = 66^\circ = 1,15$ рад. **4.17.** Система неустойчива. **4.19.** $K_p = 2$. **4.21.** $K_i = \frac{-2K_p^2 + 7K_p + 4}{18}$; $K_p^{\text{кр}} = 4$; $K_i^{\text{кр}} = 4/19$. **4.22.** Границе аperiodической устойчивости соответствует $K_i = 0$; $K_p < 4$. **4.23.** $m = 0,2$; $\Psi \approx 0,715$. **4.24.** При $K_p = 2$ $M \approx 2,88$. При $K_p = 3$ $M \approx 6,78$. При $K_p = 8$ АСР выходит за границу устойчивости, расчет частотного показателя колебательности не имеет смысла.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Ким Д.П.** Теория автоматического управления: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт, 2016.
- 2. Поляков К.Ю.** Основы теории автоматического управления. – СПб.: Изд-во СПбГМТУ, 2016.
- 3. Певзнер Л.Д.** Теория систем управления. – М.: Издательство Лань, 2013.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Андрушин А.В., Сабанин В.Р., Смирнов Н.И.** Инноватика и управление в теплоэнергетике. – Учебник. М.: Изд. дом МЭИ, 2011.
- 2. Рогач В.Я.** Теория автоматического управления. – Учебник. М.: Изд. дом МЭИ, 2004, 2008.
- 3. Панько М.А.** Расчет и моделирование автоматических систем регулирования в среде Mathcad. – М.: Издательство МЭИ, 2004. 112 с.
- 4. Стефании Е.П., Панько М.А., Пикина Г.А.** Сборник задач по основам автоматического регулирования теплоэнергетических процессов. – М.: Энергия, 1973.
- 5. Бесекерский В.А., Попов Е.П.** Теория систем автоматического управления. – СПб.: Издательство «Профессия», 2004. – 752 стр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Дифференциальные уравнения и динамические характеристики линейных систем.....	3
Структурные схемы систем управления.....	13
Векторно-матричное представление линейных динамических систем	25
Устойчивость и запас устойчивости систем управления.....	31
Ответы.....	38
Список литературы	40