

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.Р. Сабанин, Н.И. Смирнов, А.И. Репин

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ, ИХ СОЕДИНЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Управление, сертификация и инноватика”  
(раздел: “ Теория автоматического управления ”)  
для студентов, обучающихся по направлению “Теплоэнергетика”

УДК  
621.398  
С 12  
УДК: 628.5.033(075.8)

Утверждено учебным управлением МЭИ.  
Подготовлено на кафедре Автоматизированных систем управления  
тепловыми процессами.

Элементарные динамические звенья, их соединения и устойчивость.  
Лабораторный практикум по дисциплине " Управление, сертификация и ин-  
новатика " / В.Р. Сабанин, Н.И. Смирнов. –М.: Издательство МЭИ, 2007. - 96  
с. ил.

Лабораторный практикум охватывает ряд разделов теории автоматиче-  
ского управления в дисциплине " Управление, сертификация и инноватика ".  
Лабораторные работы выполняются в классе ПЭВМ в программной среде  
Mathcad.

Предметом изучения являются временные и частотные динамические  
характеристики объектов регулирования на примерах элементарных динами-  
ческих звеньев и их соединений, а также методы анализа устойчивости и за-  
паса устойчивости на примере комбинированной схемы соединений элемен-  
тарных звеньев, моделирующей одноконтурную автоматическую систему ре-  
гулирования, построенную по принципу отрицательной обратной связи.

Лабораторный практикум предназначен для подготовки бакалавров по  
направлению Теплоэнергетика -550900 в соответствии с государственным  
образовательным стандартом.

## ВВЕДЕНИЕ

Данный практикум охватывает часть основ теории управления в разделе курса «Управление, сертификация и инноватика» и содержит понятия о динамической системе, динамических характеристиках, методах математического описания динамических систем и методах анализа устойчивости и качества работы автоматических систем регулирования. Практикум предназначен для выполнения цикла лабораторных работ.

Особенностью настоящего издания является то, что в отличие от всех предыдущих изданий оно, во-первых, ориентировано на современную версию программы Mathcad под Windows. А самое главное настоящий лабораторный практикум требует творческого подхода к выполнению работ. Студентам предлагается не только изучать динамические характеристики элементарных звеньев, но и самостоятельно выбирать требуемое звено из ряда случайно предлагаемых программой пяти звеньев и самостоятельно строить программу экспериментального и аналитического изучения звеньев, их соединений и устойчивости динамических систем.

Структурно цикл работ практикума разбит на три тематические задачи.

1. приобретение навыков определения вида, расчетов и анализа динамических характеристик и определения параметров для пяти элементарных звеньев;

2. Изучение методов экспериментального и теоретического анализа динамических характеристик для схем:

- параллельного соединения пропорционального и интегрирующего звеньев,

- последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев,

- последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев с отрицательной обратной связью;

3. Изучения методов настройки и анализа устойчивости схемы комбинированного соединения звеньев, моделирующего автоматическую систему регулирования, в которой объект регулирования представлен тремя последовательно соединенными апериодическими звеньями, а пропорционально-интегральный регулятор, параллельным соединением пропорционального и интегрирующего звена.

Для решения поставленных задач разработаны специальные программы на ПЭВМ, реализующие алгоритмы численного имитационного моделирования динамических систем.

Работы практикума выполняются фронтально в строгой последовательности.

Каждому студенту или бригаде выделяется номер варианта, в соответствии с которым программы случайным образом генерируют значения параметров звеньев.

Исходными данными в работах являются генерируемые программами графики переходных процессов моделируемых звеньев и их соединений при ступенчатых или гармонических возмущениях.

Целью практикума является приобретение навыков обработки графиков переходных процессов для определения вида и параметров элементарных звеньев и соединений, а также анализа устойчивости и настройки сложных динамических систем.

При оформлении отчета студентам предлагается сравнить результаты экспериментов с аналитическими расчетами, сделанными по найденным параметрам звеньев и соединений.

Технические средства для выполнения лабораторных работ. Работы выполняются в классе ПЭВМ.

Программное обеспечение для выполнения лабораторных работ. Работы выполняются в инструментальной среде современного программного продукта Mathcad под Windows.

Работа с лабораторным практикумом не требует от студентов специальных знаний по правилам и методам работы с ней. Для выполнения работ требуются элементарные знания и навыки работы с клавиатурой на ПЭВМ с операционной системой Windows.

## 1. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ В ПРОГРАММЕ MATHCAD

### 1.1 Общие сведения о программном продукте Mathcad

Mathcad имеет стандартный для операционной системы Windows многооконный интерфейс. Программная среда его содержит вычислительный процессор, графический процессор и редактор текстов. Она может быть использована как для простейших вычислений по формулам с непосредственным выводом на экран результатов в виде чисел, так и для вычислений по сложным итерационным алгоритмам с сохранением промежуточных результатов в программе или в файле, считыванием их из файла и записью окончательных результатов в другой файл или выводом их на экран в табличном или графическом виде.

Язык общения с пользователем в среде Mathcad предельно приближен к обычному написанию документов, содержащих математические выражения, тексты и графики. Для решения задач составляются программы, содержащие написанные на языке Mathcad обращения к функциям вычислительных алгоритмов, формулы, фрагменты поясняющих символов и текста, а также шаблоны и форматы таблиц и графиков результатов. Содержание прикладной программы вместе с текстом и форматами выводов результатов может быть сохранено в файле для последующего использования. Тип расширения файла прикладной программы «Имя файла».mcd.

Для удобства работы в среде Mathcad со сложными и длинными программами фрагменты их могут быть скрыты от вывода на экран. Возможности по скрытию фрагментов программ использованы в практикуме для создания удобных пользовательских интерфейсов размером в один экран монитора, содержащие операторы ввода исходных данных и вывода результатов расчетов в числовом и графическом виде.

Окно Mathcad имеет информационную строку, головное меню и рабочее поле в размере экрана монитора.

На рис. 1.1 показан вид активного окна версии Mathcad 2000. Окно становится активным после установки в него файла программы с расширением «mcd». В верхней информационной строке показан логотип версии Mathcad и имя установленного файла. Ниже информационной строки расположено головное меню. Число разделов меню и надписи заголовков зависят от версии.

В рабочем поле активного окна выводится интерфейс (видимая часть) программы, состоящий из следующих разделов:

- заголовка лабораторной работы;
- структурной экспериментальной схемы;
- операторов ввода констант (параметров звеньев);
- операторов вывода графиков результатов опыта;
- операторов инициативного ввода аргументов (времени или частоты);
- операторов инициативного вывода результатов эксперимента;
- шаблонов форматов графиков.

Во всех программах предусмотрена диагностика номера варианта.

Поля операторов ввода номера варианта и диагностики выделены голубым цветом, поля вывода результатов опытов - зеленым, а операторы ввода констант и инициативные вводы аргументов – красным.

Правила работы с операторами ввода/вывода приведены на экранах интерфейсов программ.

На рабочем поле активного окна программ показана линия скрытого фрагмента. Скрытый фрагмент содержит вычислительные операторы программы. Он защищен паролем от доступа к чтению и модификации программы. На линии скрытия показан символ замка.

Программное обеспечение практикума содержит папку файлов прикладных программ.

Более подробное описание современных версий системы Mathcad можно найти в книгах Очкова В.Ф. "Mathcad 8 Pro для студентов и инженеров, М.: КомпьютерПресс, 1999" или "Советы пользователям Mathcad М.: издательство МЭИ, 2001".

Программа Mathcad содержит встроенный справочник, который вызывается из раздела головного меню «Help» или нажатием клавиши F1.

В следующем разделе приведены основные требуемые для выполнения лабораторных работ операции управления программной средой Mathcad.

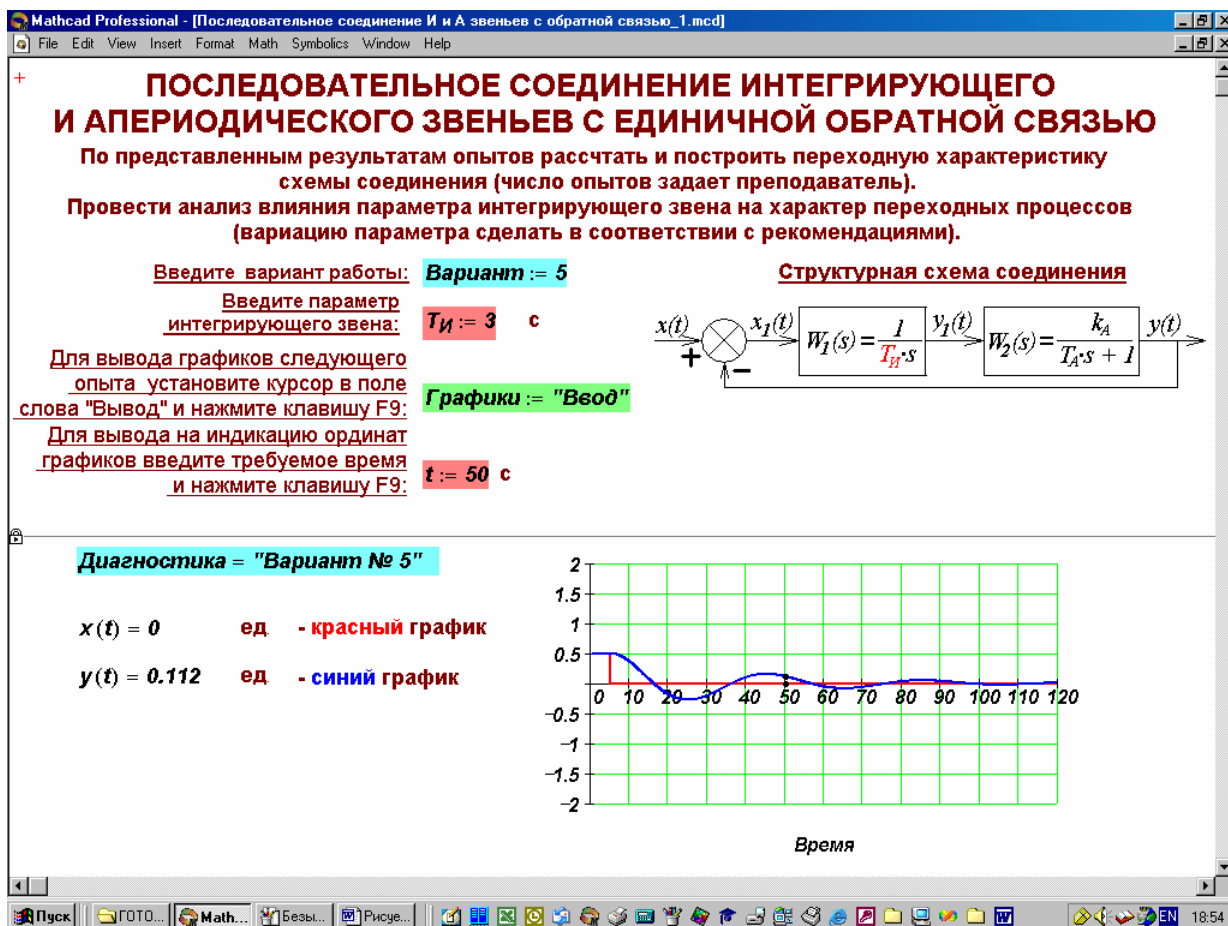


Рис. 1.1. Вид активного окна версии Mathcad 2000.

## 1.2. Запуск и подготовка к работе программы Mathcad

Для выполнения лабораторных работ практикума на ПЭВМ должен быть установлен пакет программы Mathcad. Стандартная настройка пакета ориентирована на его универсальное использование. В лабораторном практикуме используется минимум возможностей Mathcad. Поэтому, с целью упрощения работы, рекомендуется произвести некоторые перенастройки.

1.2.1. Если в операционной системе Windows установлен пакет программы Mathcad, то в разделе меню кнопки «Пуск» «Программы» или на панели задач будет присутствовать кнопка запуска программы. Иконка кнопки зависит от версии, например, для Mathcad 2000 она имеет вид . Установить курсор на кнопку и нажать левую клавишу мыши. На экране появится окно программы Mathcad.

1.2.2. Обычно пользователи при работе с Mathcad кроме головного меню используют дополнительные инструментальные панели. Эти панели размещают под головным меню. В лабораторном практикуме дополнительных инструментов не требуется и для увеличения площади рабочего поля все инструментальные панели следует выключить. Это полезно для небольших мониторов.

Для снятия панелей в разделе меню «View» войти в раздел «Toolbars» и выключить все помеченные кнопки. Последовательность операций показана на рис. 1.2.

Для отключения следует поочередно устанавливать курсор на помеченные разделы меню «Toolbars» и нажимать левую клавишу мыши. Отключенные панели будут сниматься из окна, тем самым, освобождая место для рабочего поля интерфейса программы.

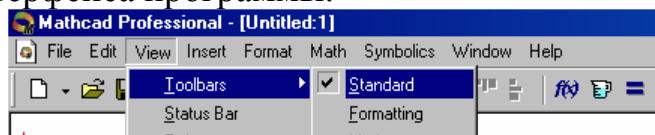


Рис. 1.2. Отключение дополнительных инструментальных панелей

1.2.3. Обычно программа Mathcad настроена на автоматическое выполнение расчета после любой модификации исходных данных. Программы лабораторного практикума настроены на работу в ручном режиме.

Последовательность операций установки режима ручного счета показана на рис. 1.3. Автоматический режим счета отключится, если установить курсор на кнопку «Automatic Calculation» меню «Math» и нажать левую клавишу мыши.

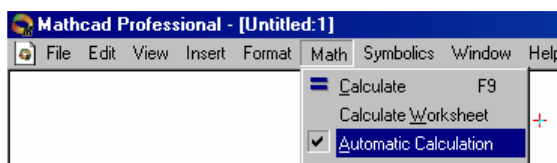


Рис. 1.3. Отключение режима автоматического счета

В ручном режиме для начала работы программы каждый раз следует нажимать на клавиатуре клавишу F9.

### 1.3. Работа с программой Mathcad

Выполнение лабораторных работ в программе Mathcad состоит из операции установки требуемого файла с программой задачи, ввода исходных данных, запуска программы на счет, и считывания результатов расчетов с записью их в протоколы эксперимента

После окончания численного эксперимента следует отключить файл от Mathcad и установить новый. Все файлы программ лабораторного практикума защищены от модификации. В момент снятия их установленные при работе данные теряются, и каждый раз файл устанавливается с одними и теми же исходными данными, запомненными в нем при создании программы. После каждой новой установки файла обязательно следует вводить требуемые константы или аргументы.

Программная среда Mathcad имеет многооконный интерфейс и может одновременно сохранять в своей памяти несколько установленных файлов. При этом один из файлов является активным. Содержание интерфейса его выведено на экран, а в информационной строке показано имя. Каталог содержащихся во внутренней памяти Mathcad файлов можно посмотреть в разделе головного меню «Window», а установив курсор на кнопку с именем требуемого файла и нажав левую клавишу мыши можно быстро сделать его активным и работать с ним не разрушая исходных данных замещенного файла.

Формально для работы Mathcad с приложением, содержащим готовую программу следует установить файл, модифицировать исходные данные, получить и зарегистрировать результаты вычислений и после этого снять файл.

1.3.1. Установка файла в Mathcad производится стандартным для Windows методом. Файлы программного обеспечения лабораторных работ размещены в каталоге с именем «ПРОГРАММЫ».

Перед началом лабораторной работы следует выяснить у преподавателя имя устройства, в котором установлен каталог «ПРОГРАММЫ».

Если программа Mathcad установлена, в разделе ее головного меню «File» следует установить курсор на клавишу «Open» и нажать левую клавишу мыши (см. рис.1.4).

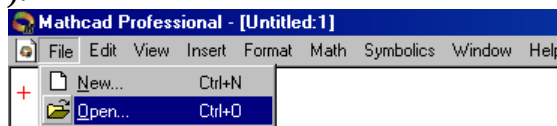


Рис. 1.4. Установка файла в Mathcad

В списке открывшегося стандартного для Windows диалогового окна «Open» найти каталог «ПРОГРАММЫ» и открыть его. В открывшемся списке найти требуемый файл и открыть его. В рабочем поле окна Mathcad появится интерфейс программы.

При всех последующих обращениях к опции «Open» будет открываться содержимое каталога, из которого устанавливался предыдущий файл.

Также возможна прямая установка приложения из каталога «ПРОГРАММЫ». Для этого следует найти в каталоге требуемый файл и активизировать его двойным нажатием левой клавиши мыши.

1.3.2. Для установки (редактирования) какого-либо оператора ввода программы следует включить чувствительность его к редактированию. Для этого установить курсор в поле оператора и нажать левую клавишу мыши. Включенный оператор выделяется в рамке (см. рис. 1.5).

Введите вариант работы: **Вариант := 6**

Рис. 1.5. Редактирование ввода

Для редакции исходных данных следует курсор установить таким образом, чтобы маркер горизонтальной линией подчеркивал редактируемое чис-

ло и удалить цифру или все число с помощью клавиш на клавиатуре  или . Затем в освободившееся место ввести новое число.

1.3.3. Результаты работы программы выводятся операторами вывода графиков. В Mathcad предусмотрена возможность настройки планшетов графиков. Для удобства восприятия графической информации при выполнении лабораторных работ в ряде случаев требуется настройка планшетов на требуемые диапазоны осей графика. Диапазоны осей устанавливаются в поле активного графика. Для этого следует установить курсор в поле графика и дважды нажать на левую клавишу мыши. На экране появится диалоговое окно раздела «X-Y Axes» настройки графиков, (см. рис. 1.6). В файлах лабораторных работ планшеты графиков настроены на вывод линий сетки и оцифровки осей графиков.

Графический редактор Mathcad имеет возможность вывода на одних осях нескольких графиков. Для этого в разделе «Traces» диалогового окна настройки графиков предусмотрена возможность установки вида для каждого графика (цвета, линий или точек и т.д.). На рис. 1.7 показан фрагмент окна с открытым разделом «Traces».

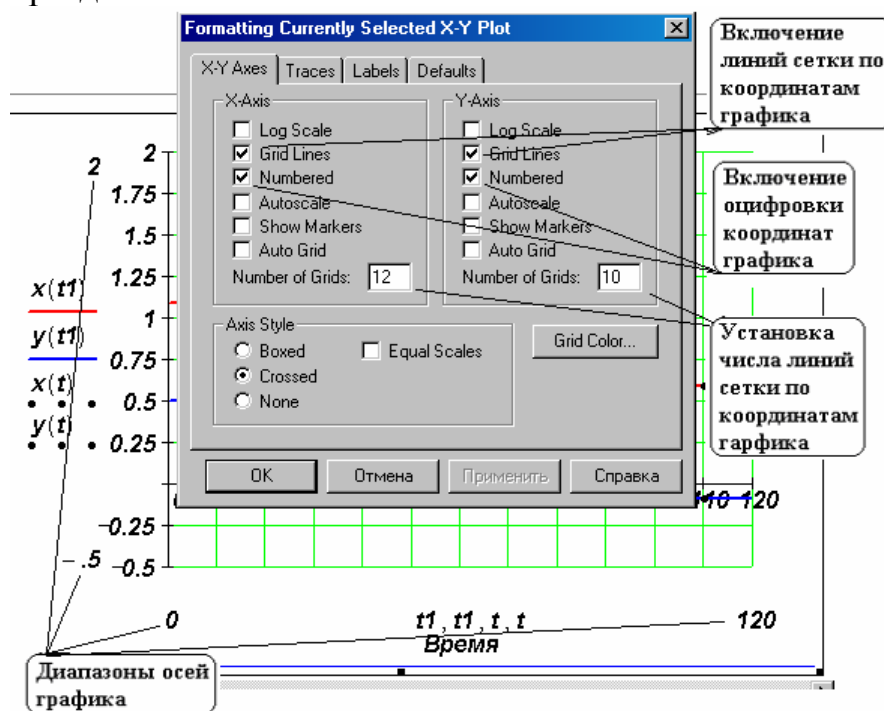


Рис. 1.6. Планшет и диалоговая панель настройки графиков

1.3.4. В некоторых программах запрограммирован инициативный вывод на индикацию ординат графика для заданного аргумента (времени или частоты). Для этого следует ввести значение аргумента в поле оператора инициативного вывода и считать значения результатов в операторе вывода. Программы настроены на вывод результатов с точностью до пятого знака после запятой.

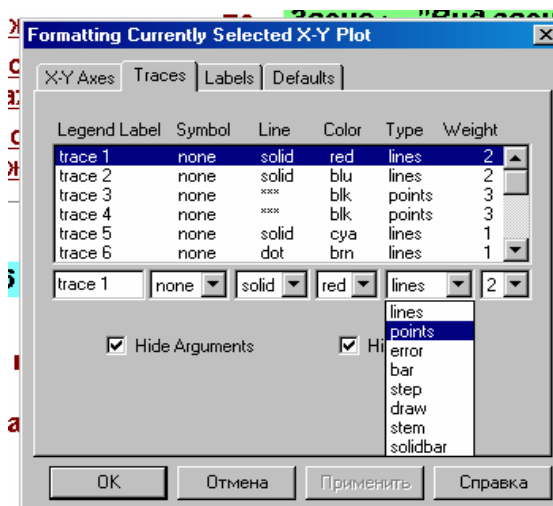


Рис. 1.7. Настройка вида графика

В Mathcad предусмотрена возможность считывания ординат графиков с помощью опции «Trace». Для вызова опции «Trace» установить курсор в поле графика, нажать левую клавишу мыши. Формат графика включится для редактирования. У графика появятся предельные значения осей, идентификаторы выводимых функций, цвета и способы их изображения. Затем следует нажать правую клавишу мыши. Рядом с курсором появится падающее меню с опциями редактирования (см. рис. 1.8). Далее следует установить курсор на раздел «Trace» и нажать левую клавишу. На рабочем поле окна Mathcad появится окно. Теперь, если установить курсор на один из графиков, в поле шаблона появится визир, координаты перекрестья которого будут показаны в индикаторах окна «X-Y Trace».

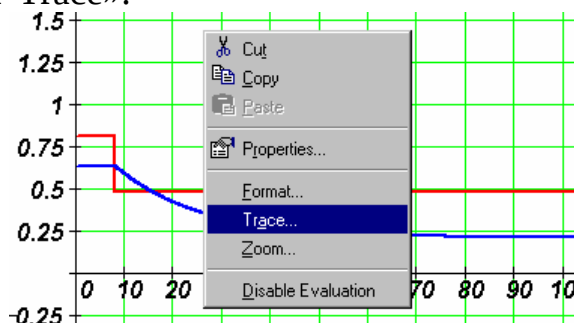


Рис. 1.8. Вызов опции «Trace»

На рис. 1.9 показана работа опции «Trace».

При перемещении курсора в поле графика координаты перекрестья визира будут следовать за ним, а если включить режим «Track Data Points», то перекрестье визира будет перемещаться только по линии графика.

Для выключения опции «Trace» следует нажать кнопку «Close» в окне «X-Y Trace».

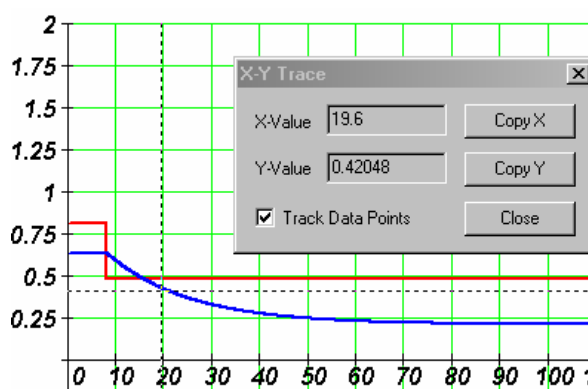


Рис. 1.9. Работа опции «Trace»

Для выключения опции «Trace» следует нажать кнопку «Close» в окне «X-Y Trace».

1.3.5. Отказ от работы с файлом производится или с помощью операции закрытия активного окна установленного файла, или с помощью операции закрытия окна программы Mathcad. Для отказа следует установить курсор на соответствующую кнопку и нажать левую клавишу мыши (см. рис. 1.10).



Рис. 1.10. Отказ от работы с активным файлом или с Mathcad

В процессе работы, если требуется установка следующего файла желательно отказываться от активного файла, а если работа закончена, следует отказаться от работы с Mathcad.

## 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

### 2.1. Предмет изучения

Предметом изучения являются основные понятия и методы анализа свойств, а также методы анализа устойчивости динамических систем.

В теории автоматического управления (ТАУ) динамической называют систему, входы и выходы которой изменяются во времени.

Для удобства динамические системы, в том числе объекты управления, представляют в виде структурных схем. На рис. 2.1 показана структурная схема, на которой обозначены: вектор выходных величин  $Y\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , вектор управляющих воздействий  $X\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , вектор возмущающих воздействий  $\Lambda\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$  и вектор параметров системы  $P\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ .



Рис. 2.1. Структурная схема динамической системы

Само управление состоит из процедуры измерения координат вектора выходных величин  $Y$ , процедуры принятия решения о внесении управляющего воздействия и процедуры воздействия на координаты вектора входных управляющих величин  $X$ .

Структурно эта последовательность представляет собой замкнутый контур. На рис.2.2 изображена последовательность реализации процедур управления.



Рис. 2.2. Последовательность реализации процедуры управления

Операция измерение осуществляется с помощью средств измерения выходных величин. Внесение управляющих воздействий осуществляется с помощью средств физического воздействия на входные величины.

Функция принятия решения может быть реализована человеком (ручное и дистанционное управление), специальным устройством (автоматическое управление) или специальными устройствами с участием человека (автоматизированное управление).

## 2.2. Способы реализации управления

Понятие управление не накладывает ограничений на способы принятия решений. Способ принятия решения выбирается исходя из поставленной цели управления, сложности и важности управляемого объекта и ряда других факторов. Ниже рассмотрены примеры систем управления для различных способов принятия решения.

### 2.2.1. Ручное и дистанционное управление

С управлением человеку приходится сталкиваться даже тогда, когда он не думает об этом. Проследим механизм последовательности действий человека при установке и поддержании желаемой температуры воды на выходе

смесителя. Подставив руку под струю, он измеряет температуру воды. Затем принимает решение и реализует его, поворачивая рычаг вентиля на горячей воде.

Последовательность выполняемых человеком операций показана на рис. 2.3 стрелками.

Очевидно, качество управления зависит от характера возмущений расходов и давления горячей и холодной воды и от опыта (интеллекта) человека, принимающего решение.

На современном этапе в промышленности ручное управление непрерывными процессами не применяется, или применяется ограничено.

В настоящее время широко применяются системы ручного дистанционного управления. В промышленности схемы дистанционного управления служат

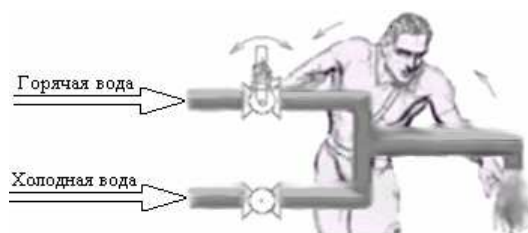


Рис. 2.3. Последовательность операций, выполняемых человеком

для открытия или закрытия запорной арматуры в технологических схемах, а также для дистанционного включения или выключения агрегатов или насосов.

### 2.2.2. Автоматическое управление

Прежде чем создавать устройство автоматического управления требуется определить цель и задачу управления конкретным объектом.

Существует три постановки задачи управления.

1. Управление с целью поддержания технологического параметра на заданном уровне. Такое управление называется стабилизацией или регулированием. Для его реализации требуется установить заданное значение регулируемого параметра.

В теплоэнергетике автоматические системы регулирования широко используются для стабилизации параметров непрерывных технологических процессов, например, таких как температура, давление, уровень, расход, концентрация. Назначением таких систем является устранение вредного влияния на процесс управления случайных возмущений.

2. Управление с целью изменения технологического параметра по заданной программе. Например, скачкообразное с  $60^{\circ}\text{C}$  до  $80^{\circ}\text{C}$ , или постепенное, со скоростью  $5^{\circ}\text{C}$  в минуту, увеличение температуры. Такое управление называется программным управлением или программным регулированием.

Программное регулирование в теплоэнергетике применяется в процессах регулярного (планового) пуска и останова технологического оборудова-

ния, а так же в металлургии и в химической промышленности для управления процессами термической обработки металлов и аппаратов периодического действия.

3. Наиболее совершенным и сложным управлением является оптимальное управление. Задачу оптимального управления можно объяснить на примере процесса горения в топке котла или технологической печи. Известно, что для полного сгорания фиксированного объема топлива требуется строго фиксированный объем воздуха. При недостатке воздуха часть топлива не сгорает. При излишках воздуха полезная теплота расходуется на их нагрев, что увеличивает потери с уходящими газами.

Задачей оптимального управления является поиск и поддержание для каждого расхода топлива такого расхода воздуха, при котором температура в топке была бы максимальной.

Для реализации изложенных задач управления существуют множество регулирующих устройств различного исполнения и сложности. Есть простейшие, максимально встроенные в технологический агрегат устройства. Есть специальные устройства управления, предназначенные для управления конкретными процессами и аппаратами. Наконец, существуют сложные программно-технические комплексы, специально разрабатываемые для управления сложными технологическими агрегатами и участками.

Существует большое число аппаратов и процессов, для которых промышленностью выпускаются универсальные технические средства агрегатного исполнения в виде отдельных приборов, устройств или блоков. На базе этих элементов создают системы управления, требующие внешних энергетических затрат для своей работы.

На рис. 2.4 показана укрупненная схема внешних соединений такой системы регулирования, реализованной из термопары, регулирующего прибора, задающего устройства, блока управления, пускового устройства, исполнительного механизма и регулирующего органа. Схема предназначена для регулирования температуры нагреваемой воды в водогрейном котле с воздействием на расход газа.

В регулирующем приборе преобразованная в электрическое напряжение э.д.с. термопары сравнивается с напряжением от задающего устройства. Задающее устройство предназначено для установки требуемой температуры горячей воды на выходе котла. В случае отклонения текущего значения температуры от заданного регулирующий прибор замыкает контакты пускового устройства, соединяющие обмотку электродвигателя исполнительного механизма с сетью 220 В, выходной вал которого начинает вращаться. Выходной вал исполнительного механизма жестко соединен со штоком заслонки регулирующего органа, от положения которой зависит проходное сечение и расход газа в топку котла. Целью изменения положения заслонки является установка такого значения расхода газа, при котором температура горячей воды будет равной заданному значению.

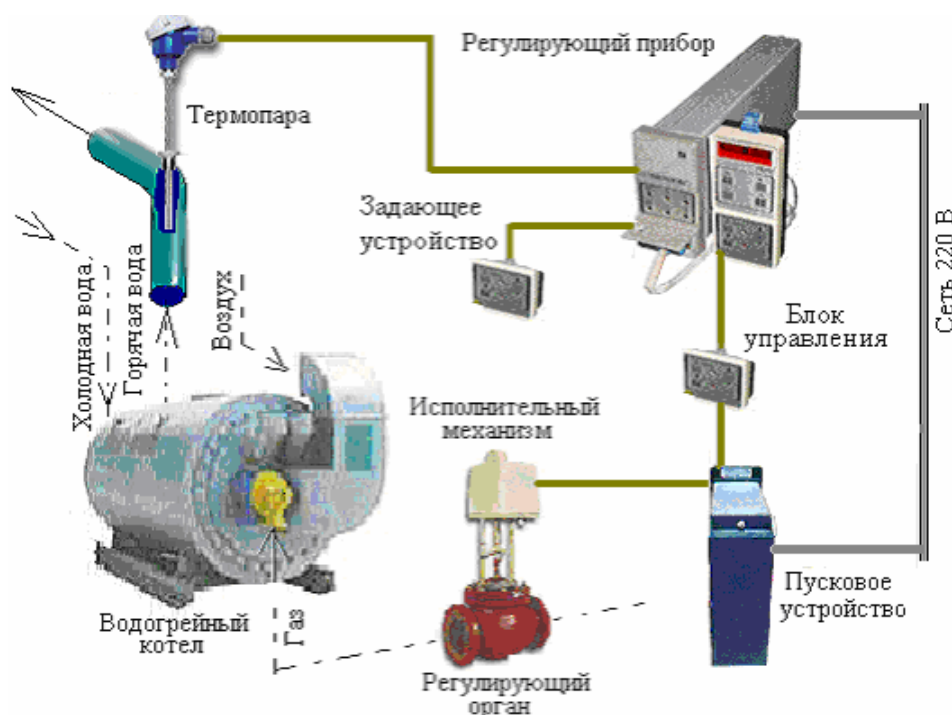


Рис. 2.4. Схема внешних соединений системы регулирования температуры воды в водогрейном котле

Таким образом, в результате автоматического изменения подачи газа в топку котла решается задача стабилизации температуры нагреваемой воды при изменениях расхода воды, температуры окружающей среды или калорийности газа. Задача стабилизации решается для базовых режимов работы, когда требуется нагрев воды до заданной температуры на длительном интервале времени. При необходимости другое значение требуемой температуры на котлах небольшой мощности может быть установлено вручную с помощью задающего устройства.

При пусках и остановках котлов температура нагреваемой воды изменяется во времени. На небольших котлах управление температурой воды осуществляется вручную. Для этого в системе предусмотрен блок управления. Блок управления служит для отключения входа пускового устройства от выхода регулирующего прибора. В этом режиме пусковое устройство управляется оператором с помощью кнопок ручного управления. Ориентируясь по показаниям прибора, измеряющего температуру нагреваемой воды, оператор может вручную устанавливать требуемое значение расхода газа и управлять температурой воды.

### 2.3. Проблемы синтеза и анализа систем управления в теплоэнергетике

Системы автоматического управления принято изображать в виде структурных схем (рис. 2.5). Структурная схема отражает информационную сущность процесса управления в замкнутом контуре, состоящем из объекта регулирования, регулятора и двух сумматоров.

В дальнейшем системы, функционирующие в соответствии с такой структурной схемой, будем называть автоматическими системами регулирования (АСР).

Назначение регулятора в представленной структурной схеме состоит в получении и преобразовании информации об изменении регулируемого параметра объекта и его отклонении от заданного значения. Наличие информационных каналов и функциональных элементов преобразования информации является главной отличительной особенностью АСР. Такая особенность позволяет отображать структуру взаимосвязей между объектом регулирования и регулятором с помощью стрелок.

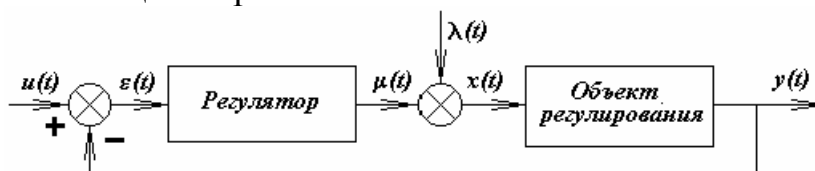


Рис. 2.5. Структурная схема АСР

На схеме обозначены функции времени:

$u(t)$  – заданное значение регулируемой величины;

$y(t)$  – выходная (регулируемая) величина объекта регулирования;

$\varepsilon(t) = u(t) - y(t)$  – сигнал рассогласования на входе регулятора;

$\mu(t)$  – выходная величина регулятора (регулирующее воздействие);

$\lambda(t)$  – возмущающее воздействие по каналу регулирования;

$x(t) = \mu(t) + \lambda(t)$  – входное воздействие на объект регулирования.

Взаимодействия в системах регулирования и управления носят специфический характер. Здесь для правильной работы в первую очередь важна достоверность и своевременность поступления информации об отклонениях регулируемой величины объекта, а вопрос о физической природе сигналов-носителей информации играет второстепенную роль.

Это позволяет на стадии теоретических исследований вообще не рассматривать физическую природу элементов и устройств АСР, а оперировать только математическими выражениями процессов взаимодействия, задавая изменения входных величин функциями времени.

Основная задача при этом сводится к созданию оптимальных АСР, обеспечивающих наименьшее рассогласование между текущими и заданными значениями регулируемых величин и соответственно наилучшее качество регулирования.

Решение такой задачи в теории управления называется синтезом АСР, который является основой для проектирования конкретных систем управления технологическими процессами.

Классическим методом анализа АСР является изучение динамических и статических характеристик объектов управления и замкнутых АСР.

Динамические характеристики показывают характер изменения выходных величин объекта регулирования или АСР на интервале времени при изменениях входных величин.

Статические характеристики являются частным случаем динамических. Они отражают зависимость выходных величин от входных в состояниях равновесия. Равновесными или стационарными состояниями динамических систем это такие состояния, когда входные и выходные величины остаются неизменными на интервале времени наблюдения.

Основными проблемами управления технологическими процессами в теплоэнергетике являются следующие.

1. Большая инерционность тепловых и материальных процессов, проявляющаяся в том, что реакция выходных величин объекта управления на изменение входных воздействий происходит через значительные интервалы времени. Это хорошо иллюстрируется в приведенном на рис. 2.4 примере системы регулирования температуры воды. После изменения расхода газа сначала изменится режим горения, затем начнет изменяться температура стенок труб. Только после этого изменение расхода газа проявится на температуре воды. Эта задержка во времени называется инерционностью объекта управления, которая существенно затрудняет прогнозирование поведения его при управлении.

2. Большая степень неопределенности характеристик объекта управления. Например, неопределенность теплопередающих свойств конструкционных материалов котлов затрудняет правильный выбор глубины внесения управляющих воздействий (расход газа в примере на рис. 2.4.) для достижения требуемого значения выходной величины (температуры воды).

3. Непостоянство во времени динамических и статических характеристик объектов управления, связанное с загрязнением, засолением или разрушением конструкционных материалов аппаратов и оборудования, приводящих к изменению тепло-гидравлических свойств. Это обстоятельство требует дополнительных затрат на подстройку системы управления в процессе ее функционирования.

Первым шагом задачи синтеза АСР является изучение динамических характеристик объектов регулирования. На основе их анализа разрабатываются регуляторы с требуемыми динамическими характеристиками.

## 2.4. Динамические характеристики объектов регулирования и методы их определения

Динамическими характеристиками объекта регулирования являются табличные данные или математические выражения, содержащие информацию о его поведении в переходных процессах.

Переходные процессы в объектах реализуются путем изменения значений входных величин. Для регулирования выбирается одна из координат вектора выходных величин, а воздействует регулятор на одну из координат век-

тора входных величин. Поэтому при разработке АСР обычно рассматривается одномерная динамическая система с одной входной и одной выходной величиной. Изменения выходной величины в переходном режиме работы зависит как от инерционных свойств объекта управления, так и от вида возмущения. Для определения динамических характеристик используется несколько видов тестовых входных воздействий.

#### 2.4.1. Тестовые ступенчатые входные воздействия

Наиболее распространенным видом тестового входного воздействия является ступенчатое возмущение. Ступенчатое входное воздействие является естественным простейшим воздействием на объект управления (рис. 2.6).

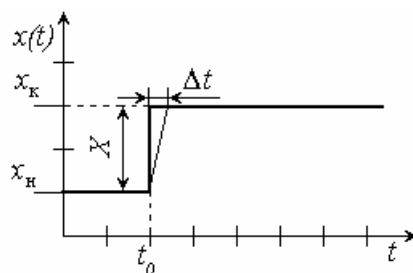


Рис. 2.6. График ступенчатого входного воздействия

На практике изменение входной величины происходит с ограниченной скоростью. Это является нарушением условия о ступенчатом воздействии и время  $\Delta t$  рекомендуется доводить до минимума. При этом за начало действия ступенчатого воздействия считается момент времени  $t_0$ . Величина  $X$  выбирается из технологических соображений таким образом, чтобы определение динамических характеристик не привело к запредельным значениям как входной, так и выходной величин.

В математике для описания ступенчатых входных воздействий используется функция:

$$x(t) = X \cdot 1(t) \quad (2.1)$$

где  $X$  – величина входного воздействия, выбираемая из технологических соображений;

$1(t)$  – ступенчатая единичная функция Хевисайда:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0; \\ 0 & \text{для } t < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

#### 2.4.2. Кривые разгона и переходные характеристики

Реакция динамической системы на ступенчатое входное воздействие  $x(t)$  называется кривой разгона. Кривую разгона обозначают  $y(t)$ . Она имеет размерность выходной величины.

Реакция динамической системы на единичное ступенчатое воздействие, когда все ординаты  $y(t)$  поделены на  $x(t)$ , называется переходной характеристикой. Она обозначается  $h(t)$  и имеет размерность в виде отно-

шения размерности выходной величины к размерности входной величины. Экспериментально кривые разгона определяются следующим образом:

1. Контролируется состояние динамической системы. До момента внесения ступенчатого возмущения система должна находиться в стационарном состоянии;

2. Осуществляется максимально быстрый перевод входного воздействия на уровень  $x(t)$ . Момент начала изменения входного воздействия принимается за начало отсчета времени;

3. Непрерывно или через равные интервалы времени записываются результаты измерения ординат кривой разгона  $y(t)$  и ступенчатого возмущения  $x(t)$ . Интервалы времени выбираются в зависимости от скорости изменения  $y(t)$ . Для участков кривой разгона с большой скоростью изменения интервалы должны быть меньше;

4. Ординаты кривой разгона пересчитываются в ординаты переходной характеристики:

$$h(t_i) = \frac{y(t_i)}{x(t_i)}, \quad (2.3)$$

где  $t_i$  – момент времени считывания показаний;

5. Строятся графики кривой разгона и переходной характеристики (рис. 2.7).

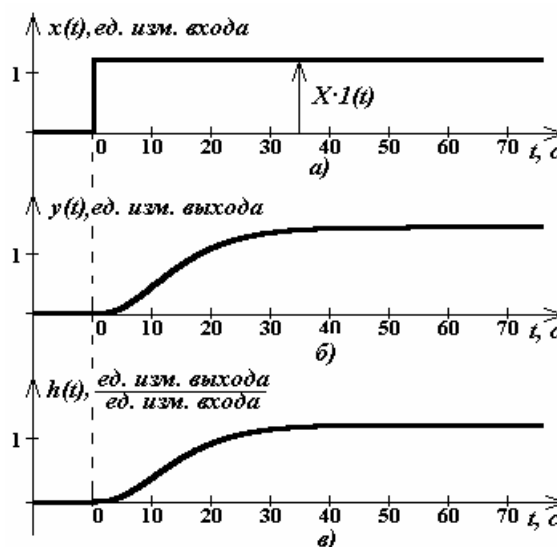


Рис. 2.7. Временные характеристики динамических систем  
а) – ступенчатое возмущение; б) – кривая разгона;  
в) – переходная характеристика.

#### 2.4.3. Тестовые гармонические входные воздействия

При достаточном аппаратном обеспечении можно провести эксперимент по определению частотных динамических характеристик. Для этого требуется генератор низкочастотных гармонических колебаний. Подавая на вход объек-

та гармонические колебания, следует ожидать на выходе объекта управления колебания с той же частотой, но с другой амплитудой и фазой. На рис. 2.8 показана схема для экспериментального определения частотных динамических характеристик.

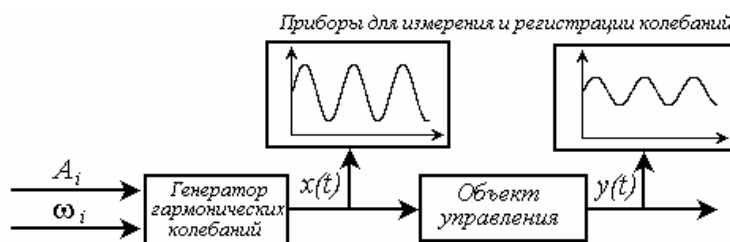


Рис. 2.8. Схема для экспериментального определения частотных характеристик

В эксперименте для каждой частоты измеряются и регистрируются осциллограммы колебаний на входе и выходе объекта.

Для определения частотных характеристик следует провести исследование объекта управления на нескольких частотах. Для конкретной  $i$ -ой частоты входное гармоническое воздействие формируется генератором по следующему закону:

$$x(t) = A_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t), \quad (2.4)$$

где  $A_i$  - амплитуда входных гармонических колебаний;

$\omega_i$  - частота гармонических колебаний.

Таким образом, в зависимости от вида тестового входного воздействия различают временные и частотные динамические характеристики. Первые в свою очередь могут быть представлены кривыми разгона и переходными характеристиками.

#### 2.4.4. Частотные характеристики

Пусть на вход динамической системы поступают регулярные гармонические колебания  $x(t)$  одинаковой амплитуды  $A_x$  и начальной фазы  $\varphi_x$ , но с разными частотами  $\omega_i$

$$x(t) = A_x \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_x). \quad (2.5)$$

При этом на выходе системы установятся колебания той же частоты, период которых равен:

$$T_{D,i} = \frac{2\pi}{\omega_i}, \quad (2.6)$$

но они будут отличаться от колебаний на входе по амплитуде и фазе:

$$y(t) = A_y \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_y). \quad (2.7)$$

На рис. 2.9. показаны графики колебаний на входе  $x(t)$  и выходе  $y(t)$  на частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ .

Из графиков видно, что для каждой  $i$ -ой частоты колебания отличаются отношением амплитуд:

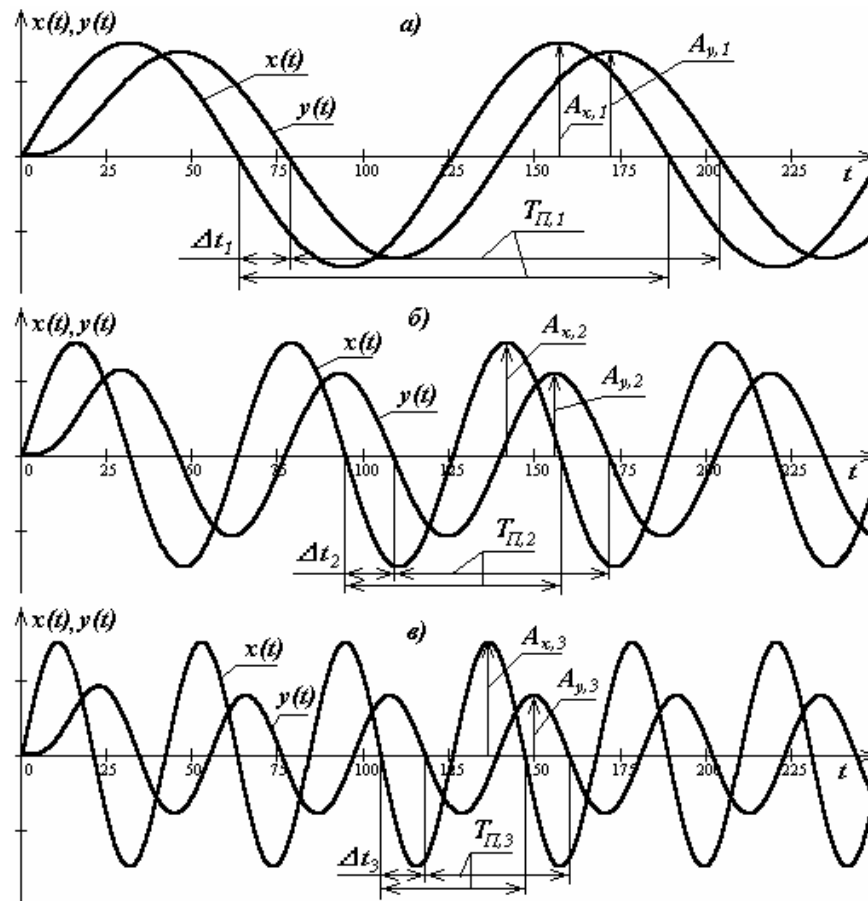


Рис. 2.9. Графики гармонических колебаний на входе и выходе динамической системы на частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$

$$A(\omega_i) = \frac{A_y(\omega_i)}{A_x(\omega_i)} \quad (2.8)$$

и фазовым сдвигом:

$$\varphi(\omega_i) = \varphi_x(\omega_i) - \varphi_y(\omega_i). \quad (2.9)$$

Из тригонометрии известно, что фазовый сдвиг может быть вычислен по формуле:

$$\varphi(\omega_i) = \pm \Delta t \cdot \omega_i, \quad (2.10)$$

где  $\Delta t$  – временной сдвиг выходных колебаний относительно входных.

Если выходные колебания отстают от входных, то фазовый сдвиг отрицательный, если опережают – то положительный.

Зависимость от частоты отношения амплитуды выходных колебаний к амплитуде входных колебаний называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), которая обозначается  $A(\omega)$ , а зависимость от частоты фазового сдвига колебаний на выходе называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ), и обозначается  $\varphi(\omega)$ .

В математике АЧХ и ФЧХ называют, соответственно, модулем и аргументом комплексной функции, которая может быть записана в полярных координатах:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.11)$$

Комплексная функция (2.11) является аналитическим выражением комплексной частотной характеристики (КЧХ).

Комплексная частотная характеристика строится на комплексной плоскости и представляет собой кривую траектории конца вектора  $W(j\omega)$  в рабочем диапазоне изменения частот, называемую годографом КЧХ.

На рис. 2.10 показаны построенные по трем точкам для частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  графики АЧХ и ФЧХ и комплексная плоскость с годографом КЧХ.

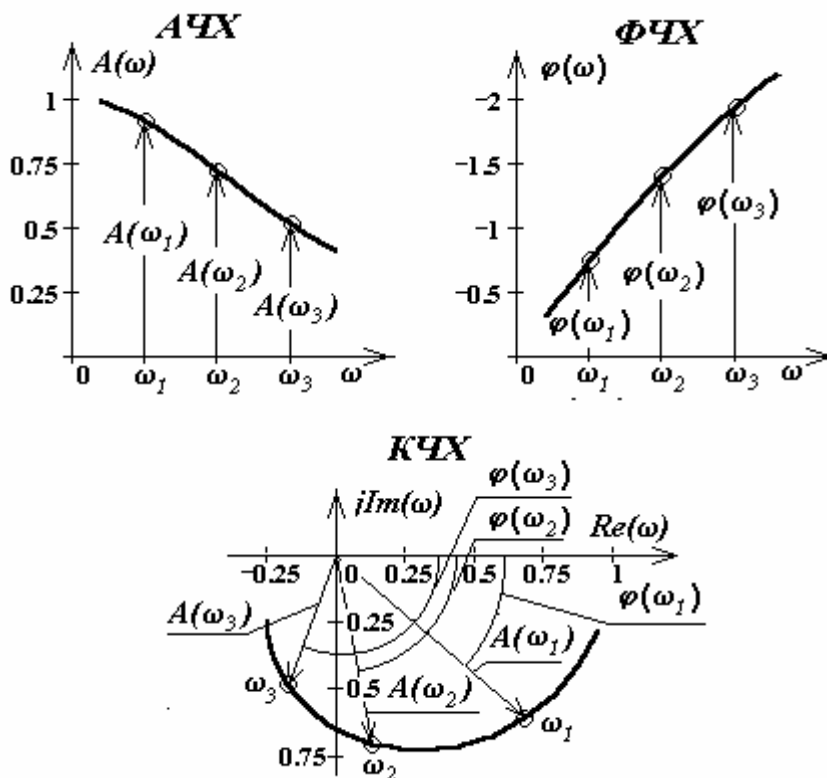


Рис. 2.10. Частотные характеристики динамической системы

Для экспериментального определения частотных характеристик требуется генератор низкочастотных гармонических колебаний и средства для измерения и регистрации колебаний на входе  $x(t)$  и выходе  $y(t)$  исследуемой динамической системы.

Последовательно устанавливая на генераторе частоты, записывают не менее двух периодов установившихся колебаний на входе и выходе исследуемого объекта регулирования или динамической системы.

Частоты выбираются из рабочего диапазона. Если диапазон неизвестен, то исследование начинается с минимально реализуемых частот с дальнейшим их увеличением. Заканчивают эксперимент на частоте, при которой амплитуда колебаний на выходе  $A_y(\omega)$  не будет превышать заданной величины (например,  $0,05 \times A_y(\omega_{min})$ , где  $\omega_{min}$  - минимально реализуемая частота). Частоту окончания эксперимента называют частотой среза  $\omega_{ср}$ .

Для построения АЧХ, ФЧХ и КЧХ обычно требуется 5 – 8 точек. Частотные характеристики также как и временные содержат полную информацию о свойствах линейных динамических систем.

## 2.5. Дифференциальные уравнения динамических систем и их решение

Классической и наиболее часто используемой формой математического описания являются дифференциальные уравнения. Напомним, что дифференциальные уравнения бывают обыкновенными, в которых есть производные переменных только по времени, и уравнения в частных производных, в которых есть производные по пространственным координатам. К таким уравнениям относятся уравнения математической физики.

Уравнения в частных производных сложны для решения и используются при математическом моделировании сложных технологических аппаратов, когда, например, требуется подробный анализ изменения во времени эпюр распределения температурных полей по объему или длине аппарата. На практике управление осуществляется с использованием измерительных приборов, показывающих внешнее проявление, происходящих внутри аппарата процессов и разработано много методов замены уравнений в частных производных обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Основные положения ТАУ берут свое начало от классических работ И.А. Вышнеградского, в основе которых лежит математический аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, и работ Дж. К. Максвелла, ориентированных на аналитические методы анализа частотных характеристик динамических систем.

В ТАУ широко используется математический аппарат интегральных преобразований Лапласа и Фурье (операционные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и частотные методы исследования динамических систем).

В частотную область компактно преобразуется обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и при нулевых начальных условиях. Такое уравнение называется **линейным**.

Линейное обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид:

$$T_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + T_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + T_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left[ T_{m,x}^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + T_{1,x} \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right], \quad (2.12)$$

где  $T$  и  $k$  – постоянные коэффициенты (параметры уравнения).

В ТАУ принято разделение коэффициентов по физической сущности:

$T$  - постоянная времени, имеющая размерность времени,

$k$  - коэффициент передачи (усиления), имеет размерность переходной характеристики (отношение размерности выходной величины к размерности входной величины).

Порядок уравнения (2.12) определяется свойствами динамической системы. В случае, когда все производные в левой и правой частях равны нулю, дифференциальное уравнение (2.12) вырождается в алгебраическое:

$$y(t) = k \cdot x(t). \quad (2.12a)$$

В ТАУ такие уравнения используются для описания безинерционных статических систем или динамических систем в стационарных состояниях, когда на длительном интервале времени все входные и выходные величины остаются неизменными.

Общее решение уравнения (2.12) может быть представлено в виде суммы свободной и вынужденной составляющих:

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{вын}}(t). \quad (2.13)$$

Свободная составляющая зависит от корней характеристического уравнения левой части дифференциального уравнения (2.12):

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot e^{r_j t}, \quad (2.14)$$

где  $r_j$  - корни характеристического уравнения;  $C_j$  - константы, значения которых зависят от начальных условий.

Вынужденная составляющая при заданной ступенчатой функции  $x(t)$  определяется правой частью дифференциального уравнения (2.12).

### 2.5.1. Решение дифференциального уравнения первого порядка

Для дифференциального уравнения первого порядка:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \quad (2.15)$$

характеристическое уравнение имеет вид:

$$T \cdot r + 1 = 0, \quad (2.16)$$

а его решение дает один корень  $r = -\frac{1}{T}$ .

Частное решение дифференциального уравнения (2.15), или выражение для переходной характеристики при  $x(t)=1(t)$  имеет вид:

$$h(t) = k + C \cdot e^{-\frac{t}{T}}. \quad (2.17)$$

Поскольку  $h(t)|_{t=0} = 0$ , то значение  $C = -k$  и окончательно для переходной характеристики получим аналитическое выражение:

$$h(t) = k \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (2.18)$$

На рис. 2.11 показан график переходной характеристики для  $T=12$  и  $k=1,6$ .

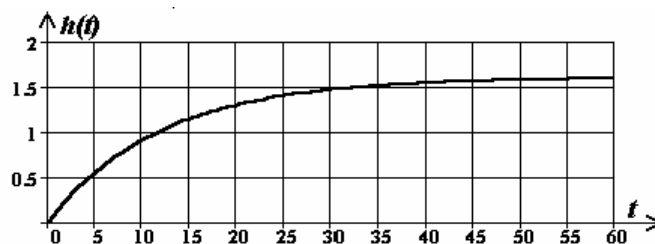


Рис. 2.11. График переходной характеристики

### 2.5.2. Решение дифференциального уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка с положительными коэффициентами решается аналогично, но переходная характеристика в зависимости от вида корней характеристического уравнения может быть как монотонной, так и содержать колебания.

Рассмотрим решение такого дифференциального уравнения:

$$T_2^2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t). \quad (2.19)$$

При единичном ступенчатом входном воздействии решение будет иметь вид:

$$y(t) = y_{\text{н\acute{a}}}(t) + y_{\text{\acute{a}и\acute{и}}}(t) = k + \sum_{j=1}^2 C_j \cdot e^{r_j t} = k + C_1 \cdot e^{r_1 t} + C_2 \cdot e^{r_2 t}, \quad (2.20)$$

где:  $C_1$  и  $C_2$  - константы, зависящие от начальных условий;  $r_1$  и  $r_2$  - корни характеристического уравнения

$$T_2^2 \cdot r^2 + T_1 \cdot r + 1 = 0. \quad (2.21)$$

Два его корня могут быть найдены из известного выражения:

$$r_{1,2} = -\frac{T_1}{2 \cdot T_2^2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2 \cdot T_2^2}\right)^2 - \frac{1}{T_2^2}} = -\frac{T_1}{2 \cdot T_2^2} \pm \frac{1}{T_2} \cdot \sqrt{\left(\frac{T_1}{2 \cdot T_2}\right)^2 - 1}. \quad (2.22)$$

Вид переходной характеристики зависит от соотношения между постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$ .

Если  $T_1 \geq 2 \cdot T_2$ , то корни характеристического уравнения вещественные и отрицательные:  $r_1 = -\alpha_1$  и  $r_2 = -\alpha_2$ , а переходная характеристика вычисляется из формул:

$$h(t) = k \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot e^{-\alpha_2 t} \right\}, \quad (2.23)$$

при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  и  $T_1 > 2 \cdot T_2$ ;

$$h(t) = k \cdot \{ 1 - (1 + \alpha \cdot t) \cdot e^{-\alpha t} \}, \quad (2.24)$$

при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  и  $T_1 = 2 \cdot T_2$ .

При  $T_1 < 2 \cdot T_2$  корни характеристического уравнения становятся сопряженно-комплексными  $r_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ , причем:

$$\alpha = -\frac{T_1}{2 \cdot T_2^2}, \quad \omega = \frac{\frac{1}{T_2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{2 \cdot T_2}\right)^2}}{T_2}. \quad (2.25)$$

Переходная характеристика в этом случае вычисляется по формуле:

$$h(t) = k \cdot \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[ \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right] \right\}, \quad (2.26)$$

она имеет колебательный характер, а такая система называется колебательной.

Объективно интенсивность затухания колебаний в колебательной системе определяется относительным уменьшением соседних амплитуд переходной характеристики  $A_3$  и  $A_1$ :

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}. \quad (2.27)$$

Этот показатель получил название степени затухания. С учетом того, что  $A_3 = A_1 \cdot e^{-\alpha T_0}$  (где  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$  - период собственных колебаний), формулу (2.27) можно представить следующим образом:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}. \quad (2.28)$$

Отношение  $\frac{\alpha}{\omega} = m$  принято называть корневым показателем колебательности или степенью колебательности и тогда:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (2.29)$$

Из формулы (2.29) видно, что с уменьшением степени затухания показатель колебательности  $m$  уменьшается от  $m \rightarrow \infty$  при  $\psi = 1$  до  $m=0$  при  $\psi = 0$ .

При  $T_1=0$  дифференциальное уравнение (2.19) приобретает вид:

$$T_2^2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = k \cdot x(t), \quad (2.30)$$

а переходная характеристика имеет характер незатухающих колебаний:

$$h(t) = k \cdot [1 - \cos(\omega \cdot t)], \quad (2.31)$$

при этом корни характеристического уравнения становятся мнимыми  $r_{1,2} = \pm j\omega$ .

На рис. 2.12 показаны переходные характеристики для рассмотренных случаев.

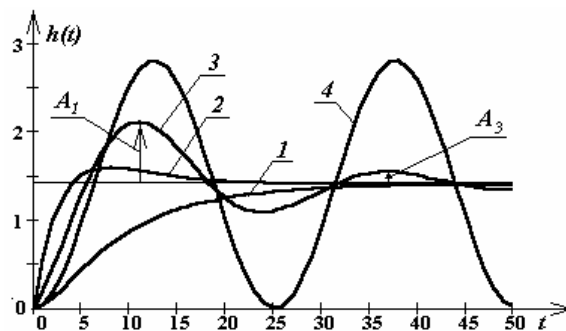


Рис. 2.12. Переходные характеристики для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка

1.  $h(t)$  для  $T_1 \geq 2 \cdot T_2$ ; 2.  $h(t)$  для  $T_1 = 2 \cdot T_2$ ;
3.  $h(t)$  для  $T_1 < 2 \cdot T_2$ ; 4.  $h(t)$  для  $T_1 = 0$ .

## 2.6. Интегральное преобразование Лапласа. Передаточные функции

Общеизвестны методы решения задач с заменой переменных. Часто такая замена, не имея физического смысла, существенно упрощает решение. Нечто подобное имеет место при использовании интегрального преобразова-

ния Лапласа в задачах решения и анализа линейных дифференциальных уравнений.

Существуют операции прямого и обратного преобразований Лапласа. Формула прямого преобразования имеет вид:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = L[f(t)], \quad (2.32)$$

где  $L$  – символ преобразования Лапласа;  $s = -\alpha + j\omega$  – комплексная переменная или оператор Лапласа ( $\alpha$  и  $\omega$  – вещественные переменные;  $j = \sqrt{-1}$ ).

Функция  $f(t)$  называется оригиналом, функция  $F(s)$  – его изображением.

В результате интегрирования вместо исходной функции – оригинала  $f(t)$  с физическим аргументом время  $t$  получаем функцию изображение  $F(s)$  с комплексным аргументом  $s$ . Аргумент  $s$  не имеет физического смысла, однако позволяет существенно упростить формы математического описания динамических систем. Решение дифференциальных уравнений и анализ динамических систем в пространстве изображений сводится к алгебраическим преобразованиям.

После проведения алгебраических операций с изображениями возможен обратный переход к функции-оригиналу, представляющему собой решение дифференциального уравнения во временной области. Для этого необходимо выполнить обратное преобразование Лапласа:

$$f(t) = \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} F(s) \cdot e^{-st} ds = L^{-1}[F(s)], \quad (2.33)$$

где  $L^{-1}$  – символ обратного преобразования Лапласа;  $\alpha$  – вещественная переменная, определяющая область распространения функции  $F(s)$ .

Интегральное преобразование Лапласа широко используется в математике для решения линейных дифференциальных уравнений и их систем. Ниже показано, как преобразуются производные от функций. Интеграл прямого преобразования Лапласа:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{df(t)}{dt} dt \quad (2.34)$$

берется по частям. Если принять:

$$u = e^{-st} \quad \text{и} \quad dv = \frac{df(t)}{dt} dt,$$

тогда:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = u \cdot v \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du = f(t) \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = 0 - f(0) + s \cdot F(s) = s \cdot F(s) - f(0). \quad (2.35)$$

Для производной  $n$ -го порядка:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f(0). \quad (2.36)$$

Дифференциальное уравнение может быть преобразовано в алгебраическое формальной заменой операторов дифференцирования на операторы Лапласа:

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow s, \quad \frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow s^2 \quad \text{и} \quad \frac{d^n}{dt^n} \Rightarrow s^n.$$

Подробнее процедуру прямого преобразования Лапласа рассмотрим на примере дифференциального уравнения (2.12). В стационарном состоянии выходная переменная уравнения и её производные имеют нулевые начальные условия:

$$y(t)|_{t=0} = 0; \quad y'(t)|_{t=0} = 0; \dots y^n(t)|_{t=0} = 0. \quad (2.37)$$

Нулевыми будут начальные условия для входного воздействия  $x(t)$ .

Пусть в момент времени  $t = 0$  на вход исследуемой динамической системы вносится некоторое возмущение  $x(t)$  и затем наблюдается переходный процесс  $y(t)$ .

В соответствии с (2.36) могут быть найдены изображения:

$$L\{y(t)\}, L\{y'(t)\}, \dots, L\{y^n(t)\}, L\{x(t)\}, L\{x'(t)\}, \dots, L\{x^n(t)\}.$$

Несложно показать, что при нулевых начальных условиях выражения для изображений имеют достаточно простой вид:

$$\begin{aligned} L\{y(t)\} &= Y(s), \quad L\{y'(t)\} = s \cdot Y(s), \dots, \quad L\{y^n(t)\} = s^n \cdot Y(s), \\ L\{x(t)\} &= X(s), \quad L\{x'(t)\} = s \cdot X(s), \dots, \quad L\{x^n(t)\} = s^n \cdot X(s). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Выполняя операции прямого преобразования Лапласа над левой и правой частями уравнения (2.12) получим алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} T_n^n \cdot s^n \cdot Y(s) + T_{n-1}^{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \dots + T_2^2 \cdot s^2 \cdot Y(s) + T_1 \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = \\ = k \cdot [T_{m,x}^m \cdot s^m \cdot X(s) + \dots + T_{2,x}^2 \cdot s^2 \cdot X(s) + T_{1,x} \cdot s \cdot X(s) + X(s)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Уравнение (2.39) легко преобразуется к виду:

$$Y(s) = W(s) \cdot X(s), \quad (2.40)$$

где функция  $W(s)$  несет всю информацию о свойствах динамической системы и называется передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{k \cdot [T_{m,x}^m \cdot s^m + \dots + T_{2,x}^2 \cdot s^2 + T_{1,x} \cdot s + 1]}{T_n^n \cdot s^n + T_{n-1}^{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1}. \quad (2.41)$$

Таким образом, формально передаточная функция может быть определена как отношение преобразованной по Лапласу выходной величины  $Y(s)$  к преобразованной по Лапласу входной величине  $X(s)$ , полученных при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}. \quad (2.42)$$

Установим соответствие между передаточной функцией  $W(s)$  и переходной характеристикой  $h(t)$  на примере динамической системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением вида (2.15).

В соответствии с определением переходная характеристика  $h(t)$  является реакцией системы на ступенчатое единичное входное воздействие:

$$h(t) = y(t)|_{x(t)=1(t)}. \quad (2.43)$$

Изображение по Лапласу для ступенчатого единичного воздействия  $1(t)$  имеет вид:

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}. \quad (2.44)$$

В соответствии с (2.42):

$$H(s) = W(s) \cdot X(s) = W(s) \cdot \frac{1}{s}, \quad (2.45)$$

или:

$$W(s) = s \cdot H(s) = L\{h'(t)\} = L\{w(t)\}, \quad (2.46)$$

где  $w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$  - производная по времени от переходной характеристики, называемая импульсной переходной характеристикой.

Таким образом, передаточную функцию динамической системы  $W(s)$  можно определить как преобразование Лапласа импульсной переходной характеристики системы  $w(t)$ . Следовательно, передаточная функция содержит такую же информацию о динамических свойствах системы, что и переходные характеристики  $w(t)$  и  $h(t)$ , а, следовательно, и дифференциальное уравнение.

Используя прямое и обратное преобразования Лапласа, несложно найти реакцию динамической системы во временной области на определенный вид входного воздействия  $x(t)$ .

Пример. Дана динамическая система, описание которой определено обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка (2.19).

Применяя прямое преобразование Лапласа, несложно получить из дифференциального уравнения (2.19) передаточную функцию для исследуемой системы:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1}. \quad (2.47)$$

Аналитическое выражение оригинала функции переходного процесса имеет вид:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{X(s) \cdot W(s)\} = L^{-1}\left\{X(s) \cdot \frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1}\right\}. \quad (2.48)$$

Для практического использования приемов преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений существуют таблицы прямого и обратного преобразований для достаточно большого числа стандартных функций. В таблицах по виду функции оригинала для прямого преобразования, или по виду функции изображения для обратного преобразования приведены соответствующие функции.

Прогрессивным подходом к решению подобных задач является использование специального программного обеспечения ЭВМ. В программе Mathcad имеется символьный процессор (*Symbolics*), содержащий операции прямого (*laplace*) и обратного (*invlaplace*) преобразований Лапласа. На рис. 2.13

показан фрагмент программы обращения к символьному процессору для получения аналитического выражения переходной характеристики для единичного ступенчатого входного воздействия. Аналитическое выражение использовано для расчета и построения графиков переходных процессов и исследования динамических свойств системы для различных значений постоянных времени  $T_1$  и  $T_2$ .

$$W(s, T_1, T_2, k) := \frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1} \quad \begin{array}{l} \text{Передаточная функция} \\ \text{исследуемого объекта} \end{array}$$

$$X(s) := \frac{1}{s} \quad \begin{array}{l} \text{Преобразованное по Лапласу (изображение)} \\ \text{единичное ступенчатое возмущение} \end{array}$$

$$H(s, T_1, T_2, k) := \frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad \begin{array}{l} \text{Преобразованная по Лапласу (изображение)} \\ \text{переходная характеристика} \end{array}$$

Ввести  $h(t, T_1, T_2, k) :=$  Войти в меню "View → Toolbars → Symbolic"

В правую часть скопировать  $\frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s}$ .

Ввести аргумент  $s$ .

$$h(t, T_1, T_2, k) := \frac{k}{T_2^2 \cdot s^2 + T_1 \cdot s + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad \begin{array}{l} \text{Здесь появится длинное} \\ \text{выражение переходной} \\ \text{характеристики} \end{array}$$

$t := 0..400$

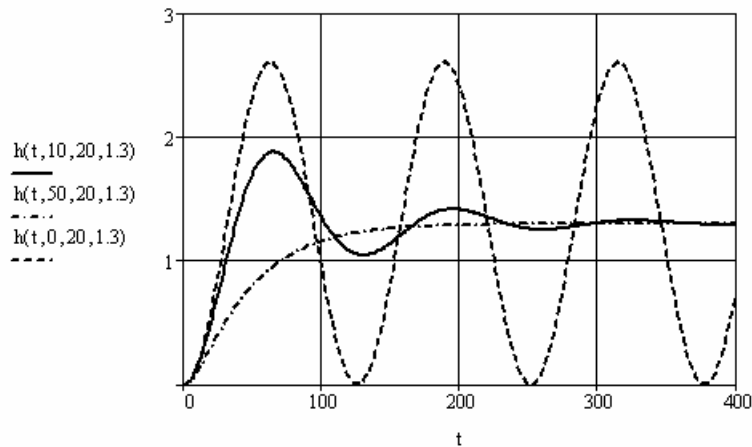


Рис. 2.13. Вычисление переходных характеристик методом обратного преобразования Лапласа с помощью символьного процессора "Symbolics" программы Mathcad

## 2.7. Интегральное преобразование Фурье.

Аналитические выражения для частотных характеристик

Недостатком передаточных функций является отсутствие их физического смысла. Физический смысл интегрального преобразования появляется, если комплексную переменную  $s$  заменить на чисто мнимую  $j\omega$ , где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  - частота. В результате такой замены операция интегрального преобразова-

ния Лапласа (2.32) вырождается в операцию интегрального преобразования Фурье:

$$F(j\omega) = \Phi[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (2.49)$$

На основе операции преобразования Фурье базируется математический аппарат частотного анализа линейных динамических систем.

Функция  $W(s)|_{s=j\omega}$  называется аналитическим выражением комплексной частотной характеристики (КЧХ) динамической системы и записывается в виде:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \quad (2.50)$$

По аналогии с определением передаточной функции можно сказать, что аналитическое выражение комплексной частотной характеристики является преобразованием Фурье импульсной характеристики динамической системы.

Аналитическое выражение КЧХ является комплексной функцией, и на нее распространяются все правила преобразования комплексных чисел. Она может быть представлена в виде вещественной  $Re(\omega)$  и мнимой  $Im(\omega)$  составляющих комплексной функции от частоты  $\omega$ :

$$W(j\omega) = Re(\omega) + j \cdot Im(\omega), \quad (2.51)$$

а также в полярных координатах:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.52)$$

где  $A(\omega)$  - модуль комплексной функции, аналитическое выражение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) динамической системы,  $\varphi(\omega)$  - аргумент комплексной функции, аналитическое выражение фазово-частотной характеристики (ФЧХ) динамической системы.

Формы задания аналитических выражений (2.51) и (2.52) связаны между собой зависимостями:

$$A(\omega) = \sqrt{Re^2(\omega) + Im^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \quad (2.53)$$

и

$$Re(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega), \quad Im(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega). \quad (2.54)$$

Формально аналитическим выражением КЧХ является передаточная функция, в которой комплексный аргумент  $s$  заменен на чисто мнимый аргумент  $j\omega$ .

Ниже рассмотрен пример аналитической оценки частотных характеристик, полученных из передаточной функции (2.47):

а) преобразуем выражение комплексной частотной характеристики в сумму вещественной и мнимой составляющих:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{k}{T_2^2 \cdot (j\omega)^2 + T_1 \cdot j\omega + 1} = \frac{k \cdot (1 - T_2^2 \cdot \omega^2) - j(T_1 \cdot k \cdot \omega)}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2} = \\ &= \frac{k \cdot (1 - T_2^2 \cdot \omega^2)}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2} - j \frac{T_1 \cdot k \cdot \omega}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2}, \end{aligned}$$

откуда:

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{k \cdot (1 - T_2^2 \cdot \omega^2)}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}(\omega) = \frac{T_1 \cdot k \cdot \omega}{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2}; \quad (2.55)$$

б) амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2}}; \quad (2.56)$$

в) фазо-частотная характеристика (ФЧХ):

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{T_1 \cdot \omega}{1 - T_2^2 \cdot \omega^2} \right); \quad (2.57)$$

г) комплексная частотная характеристика в полярных координатах (КЧХ):

$$W(i\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T_2^2 \cdot \omega^2)^2 + T_1^2 \cdot \omega^2}} \cdot e^{-j \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{T_1 \cdot \omega}{1 - T_2^2 \cdot \omega^2} \right)}. \quad (2.58)$$

В настоящее время во многих операционных средах ПЭВМ имеется программное обеспечение для работы с комплексными числами. В Mathcad имеется набор встроенных функций для вычисления амплитудных частотных, фазовых частотных и комплексных частотных характеристик.

На рис. 2.14 приведена программа вычисления и построения годографа КЧХ двух передаточных функций для различных значений параметров  $T$  и  $k$ .

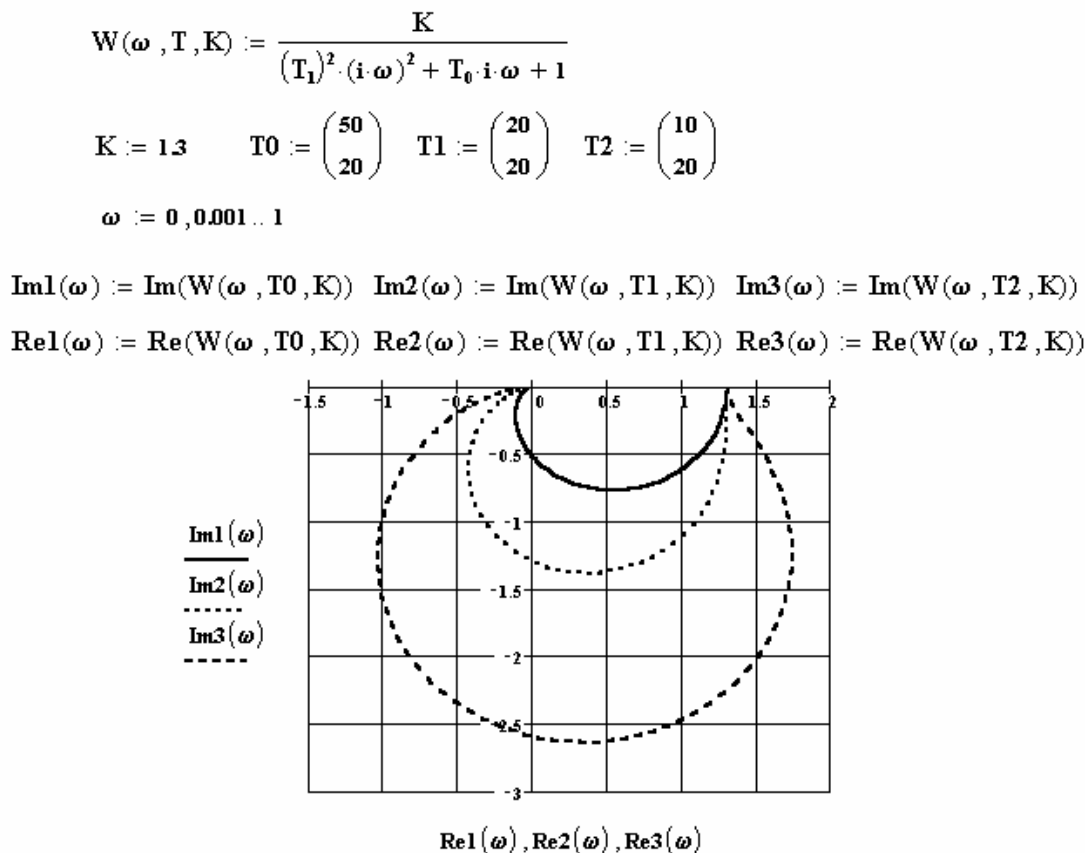


Рис. 2.14. Вычисление и построение КЧХ в программе Mathcad

Существует принципиальная возможность обратного преобразования Фурье аналитических выражений КЧХ во временные характеристики:

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_{cp}} \frac{\operatorname{Re}(W(j\omega))}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) d\omega, \quad (2.59)$$

где  $\omega_{cp}$  - частота среза, выше которой  $\operatorname{Re}(W(j\omega))$  становится незначимой.

Следует заметить, что формула (2.59) применима для расчета только устойчивых переходных процессов.

На рис. 2.15 приведена программа в среде Mathcad для вычисления переходных характеристик по формуле (2.59).

## 2.8. Основные понятия имитационного моделирования.

### Численное решение дифференциальных уравнений

Характер изменения выходных величин динамических систем во времени не всегда можно исследовать путем непосредственного решения дифференциальных уравнений или с использованием интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Во-первых, не всегда математическое описание может быть получено в явном виде и линеаризовано. Иногда линеаризация недопустима по причине того, что в алгоритмах управления должны быть учтены нелинейности объектов управления. Во-вторых, исследуемый объект может быть подвержен одновременному воздействию нескольких возмущений по различным входам, а также различного, в том числе случайного характера.

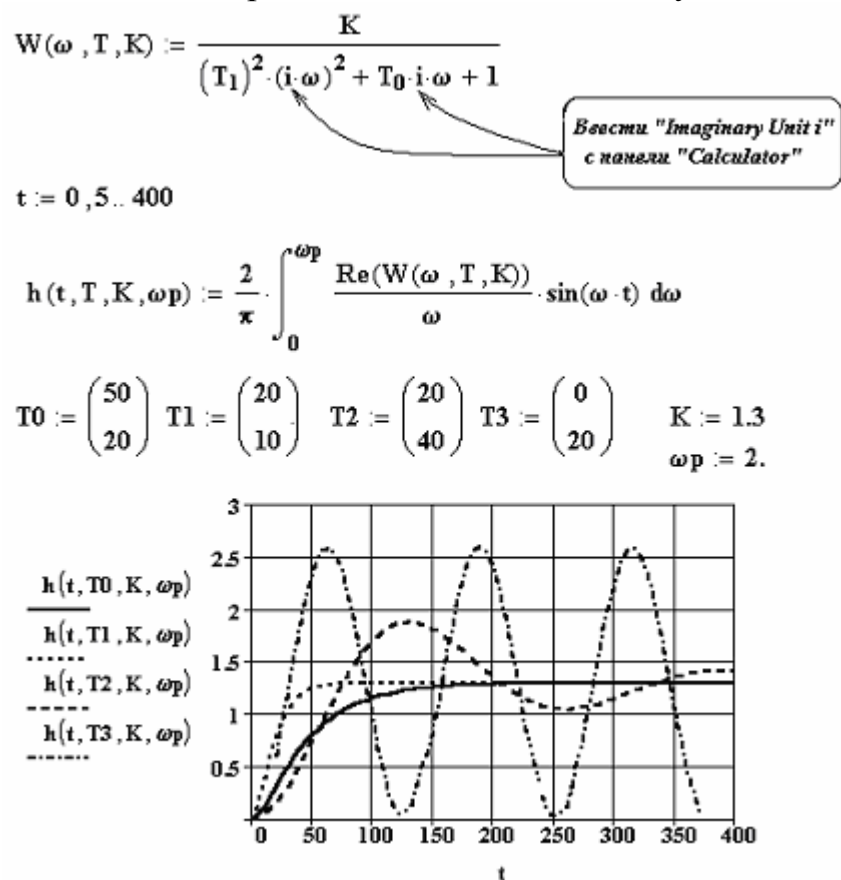


Рис. 2.15. Вычисление переходных характеристик по формуле обратного преобразования Фурье

В этих случаях динамические системы исследуются с помощью численных алгоритмов имитационного моделирования. Для динамических систем высокого порядка со многими входами и выходами, со сложной структурой внутренних связей и большим числом одновременно вносимых возмущений по различным каналам метод имитационного моделирования является практически единственным инструментом исследования.

Для реализации имитационного моделирования разрабатываются алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений. При этом обычно методом имитационного моделирования исследуется динамическая система в рабочем состоянии, состоящая из объекта регулирования и управляющего устройства.

Для дифференциальных уравнений и систем уравнений первого порядка можно довольно просто построить алгоритм численного решения по методу Эйлера.

Суть простейшего метода Эйлера состоит в представлении производной интегрируемой функции в виде разностей:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t}, \quad (2.60)$$

где  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ .

Уравнение (2.60) записанное в приращениях будет иметь вид:

$$T \cdot \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} + y_{n-1} = k \cdot x_{n-1}. \quad (2.61)$$

После преобразования получим рекуррентное выражение для вычисления  $y_n$ :

$$y_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right) \cdot y_{n-1} + \frac{\Delta t}{T} \cdot k \cdot x_{n-1}. \quad (2.62)$$

На рис. 2.16 показана графическая иллюстрация численного решения дифференциального уравнения.

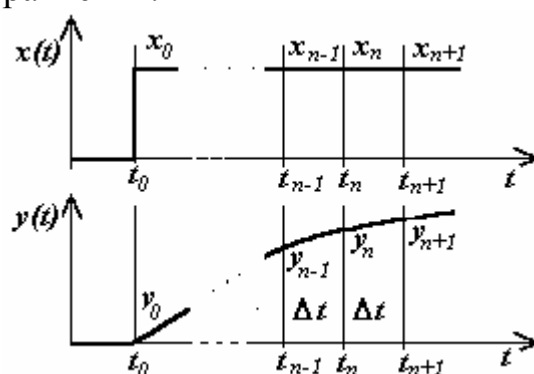


Рис. 2.16. Графическая иллюстрация численного решения дифференциального уравнения

На рис. 2.17 приведены программы в среде Mathcad для вычисления ординат переходных характеристик из рекуррентных выражений для одного дифференциального уравнения.

### Пример решения дифференциального уравнения

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \cdot x$$

Функция - рекуррентное выражение для численного решения дифференциального уравнения методом Эйлера

$$fy(y, x, T, k, \Delta t) := \left(1 - \frac{\Delta t}{T}\right) \cdot y + \frac{\Delta t}{T} \cdot k \cdot x$$

$\Delta t := 0.1$     $y_0 := 0$     $tn := 0$     $n := 1..600$

$t_n := n \cdot \Delta t$     $x_n := \text{if}(t_n < tn, 0, 1)$     $y_{n+1} := fy(y_n, x_n, 10, 1.6, \Delta t)$

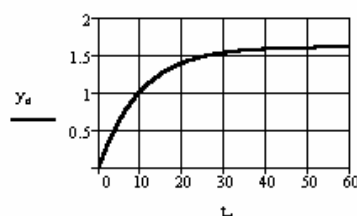


Рис.2.17. Численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера в программе Mathcad

## 2.9. Элементарные динамические звенья

Среди всего разнообразия звеньев особого внимания заслуживают так называемые элементарные звенья, описываемые дифференциальными уравнениями не выше первого порядка с постоянными коэффициентами. Из таких звеньев чаще всего строят математические модели систем регулирования. Непременное условие, которое должно соблюдаться при разложении системы на звенья, состоит в соблюдении правила однонаправленной передачи воздействий (свойство детектируемости звена).

Следует также отметить, что каждое из таких включенных в систему звеньев обладает свойством автономности в том смысле, что изменение динамических свойств одного звена не отражается на свойствах других звеньев.

Физическая природа процессов, протекающих в звеньях, оказывается совершенно безразличной, если они имеют одинаковые дифференциальные уравнения (например, механическое или электрическое звено).

Разбиение динамических систем, в том числе и систем регулирования, на элементарные звенья существенно упрощает их расчет, анализ и конструирование. Образно говоря, звенья - это кирпичи, из которых строится система.

Дифференциальное уравнение элементарного динамического звена имеет аналитическое решение.

Параметрами звена являются постоянные коэффициенты дифференциального уравнения. Для элементарных динамических звеньев они имеют свои названия и определяют инерционные свойства или свойства усиления входных сигналов звена. Буквой  $T$  обозначают постоянные времени, характеризующие инерционные свойства, а буквой  $k$  коэффициенты передачи или усиления звена.

Динамические характеристики пяти элементарных динамических звеньев приведены в табл.1. В первом столбце таблицы приведены тип звеньев и их математическое описание в виде дифференциальных и алгебраических уравнений. Во втором столбце представлены графики и аналитические выражения переходных характеристик, являющиеся частными решениями уравнений звеньев. На графиках переходных характеристик показаны приемы определения параметров звеньев. В третьем столбце приведены передаточные функции звеньев. В остальных столбцах приведены частотные характеристики с их аналитическими описаниями.

Таблица позволяет изучить все аналитические описания и графики динамических характеристик для пропорционального, интегрирующего, апериодического, реального дифференцирующего и запаздывающего звеньев.

### 2.9.1. Пропорциональное звено (П-звено)

П-звено преобразует сигнал в соответствии с уравнением:

$$y(t) = k_D \cdot x(t), \quad (2.63)$$

где  $k_D$  - коэффициент передачи или усиления.

Рекуррентное выражение для численного решения уравнения (2.63) имеет вид:

$$y_n = k_D \cdot x_n. \quad (2.64)$$

Пропорциональное звено является безинерционным. Оно пропускает колебания любой частоты, масштабируя их на коэффициент передачи. Начальных условий для численного решения уравнения (2.64) не требуется.

Примером П-звена может служить жесткий рычаг, в котором коэффициент передачи определяется соотношением длин плеч:

$$k_D = \frac{L_1}{L_2}. \quad (2.65)$$

### 2.9.2. Интегрирующее звено (И-звено)

И-звено преобразует сигнал в соответствии с дифференциальным уравнением:

$$T_C \cdot \frac{y(t)}{dt} = x(t), \quad (2.66)$$

$T_C$  - постоянная времени интегрирования.

Рекуррентное выражение для численного решения уравнения (2.66):

$$y_n = y_{n-1} + \frac{\Delta t}{T_C} x_{n-1}. \quad (2.67)$$

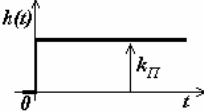
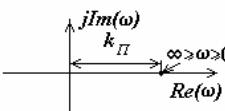
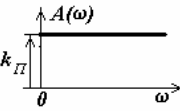
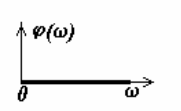
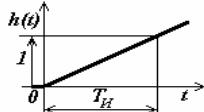
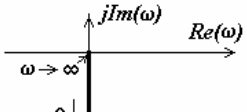
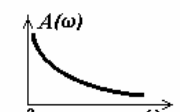
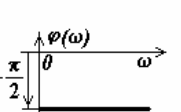
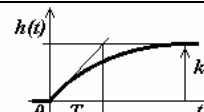
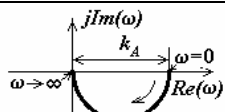
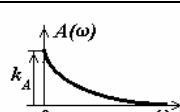
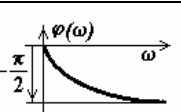
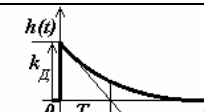
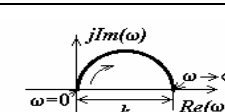
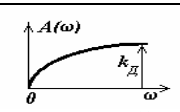
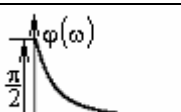
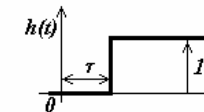
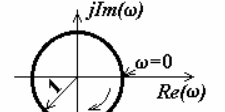
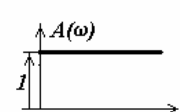
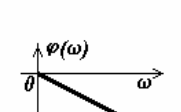
где  $\Delta t$  – интервал времени шага счета.

Для решения уравнения (2.67) требуются начальное значение  $y_0$ .

Интегрирующее звено является инерционным. Колебания на выходе звена отстают от колебаний на входе на угол  $-\pi/2$ . Амплитуда колебаний на выходе с увеличением частоты падает до нуля.

Таблица 2.1.

## Динамические характеристики элементарных звеньев

| Тип и уравнение звена                                                                    | Переходная характеристика                                                                                                     | Передаточная функция                                           | Комплексная частотная характеристика                                                                                                                                  | Амплитудная частотная характеристика                                                                                                                                                | Фазовая частотная характеристика                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| П-звено<br>$y(t) = k_D \cdot x(t)$                                                       |  $h(t) = k_D$                                | $W(s) = k_D$                                                   |  $W(j\omega) = k_D$                                                                |  $A(\omega) = k_D$                                                                               |  $\varphi(\omega) = 0$                                   |
| И-звено<br>$\check{N}_C \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$                                         |  $h(t) = \frac{1}{T_C} \cdot t$              | $W(s) = \frac{1}{T_C \cdot s}$                                 |  $W(j\omega) = \frac{1}{T_H \cdot j\omega}$                                        |  $A(\omega) = \frac{1}{T_H \cdot \omega}$                                                        |  $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$                      |
| А-звено<br>$\check{N}_R \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_R \cdot x(t)$                        |  $h(t) = k_R \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_R}})$ | $W(s) = \frac{k_A}{T_A \cdot s + 1}$                           |  $W(j\omega) = \frac{k_A}{T_A \cdot j\omega + 1}$                                  |  $\dot{R}(\omega) = \frac{k_A}{\sqrt{(T_A \cdot \omega)^2 + 1}}$                                 |  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega \cdot T_A)$           |
| РД-звено<br>$\check{N}_A \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_A \cdot T_A \cdot \frac{dx(t)}{dt}$ |  $h(t) = k_A e^{-\frac{t}{T_A}}$            | $W(s) = \frac{k_A \cdot \check{N}_A \cdot s}{T_A \cdot s + 1}$ |  $W(j\omega) = \frac{k_A \cdot \check{N}_A \cdot j\omega}{T_A \cdot j\omega + 1}$ |  $\dot{R}(\omega) = \frac{k_A \cdot \check{N}_A \cdot \omega}{\sqrt{(T_A \cdot \omega)^2 + 1}}$ |  $\varphi(\omega) = \arctg(\frac{1}{\omega \cdot T_A})$ |
| З-звено<br>$y(t) = x(t - \tau)$                                                          |  $h(t) = 1(t - \tau)$                      | $W(s) = e^{-\tau \cdot s}$                                     |  $W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$                                                 |  $\dot{R}(\omega) = 1$                                                                         |  $\varphi(\omega) = -\tau \cdot \omega$                |



Особенность звена состоит в том, что выходная величина будет увеличиваться (интегрироваться) неограниченно до снятия возмущения, а после снятия - сигнал на выходе звена остается неизменным.

Примером И-звена может служить гидравлическая система с насосом на стоке. Расход на стоке зависит от производительности насоса и при постоянной производительности будет постоянным. Разбаланс возникает при отклонениях расхода на притоке от расхода на стоке. При появлении материального разбаланса уровень начнет изменяться со скоростью, пропорциональной величине разбаланса. После снятия разбаланса скорость изменения уровня станет равной нулю, его значение останется тем, которое было на момент устранения разбаланса.

### 2.9.3. Аперидическое звено (А-звено)

А-звено преобразует сигнал в соответствии с дифференциальным уравнением:

$$T_{\dot{R}} \cdot \frac{y(t)}{dt} + y(t) = k_{\dot{R}} \cdot x(t), \quad (2.68)$$

где  $k_{\dot{A}}$  - параметр звена, который называется коэффициент передачи или усиления;  $T_{\dot{A}}$  - параметр звена, который называется постоянная времени.

Рекуррентное выражение для численного решения уравнения (2.68) имеет вид:

$$y_n = \left(1 - \frac{\Delta t}{T_{\dot{R}}}\right) \cdot y_{n-1} + \frac{\Delta t}{T_{\dot{R}}} \cdot k_{\dot{R}} \cdot x_{n-1}, \quad (2.69)$$

где  $\Delta t$  – интервал времени шага счета.

Решение уравнения (2.69) требует начального значения  $y_0$ .

Аперидическое звено является инерционным, колебания на выходе звена отстают от колебаний на входе. Угол отставания с увеличением частоты растет, а амплитуда колебаний на выходе падает. Предельный угол отставания -  $\pi/2$ .

После подачи на вход ступенчатого возмущения отклонение выходной величины будет изменяться по экспоненте с максимальной скоростью в начальный момент. Затем скорость изменения плавно уменьшится до нуля, а выходная величина достигнет нового установившегося значения. После снятия возмущения сигнал на выходе так же по экспоненте достигнет первоначального значения.

Примерами А-звена являются гидравлическая емкость с дросселем на выходе или нагревательная камера.

### 2.9.4. Реальное дифференцирующее звено (РД-звено)

РД-звено преобразует сигнал в соответствии с дифференциальным уравнением:

$$T_{\ddot{A}} \cdot \frac{y(t)}{dt} + y(t) = k_{\ddot{A}} \cdot T_{\ddot{A}} \cdot \frac{x(t)}{dt}, \quad (2.70)$$

где  $k_D$  - коэффициент передачи или усиления;  $T_D$  - постоянная времени.

Численным методом дифференциального уравнения (2.70) можно решить с помощью системы рекуррентных выражений:

$$\begin{aligned} y1_n &= k_{\bar{A}} \cdot x_n \\ y2_n &= \left(1 - \frac{\Delta t}{T_{\bar{A}}}\right) \cdot y2_{n-1} + \frac{\Delta t}{T_{\bar{A}}} \cdot k_{\bar{A}} \cdot x_{n-1} \\ y_n &= y1_n - y2_n \end{aligned} \quad (2.71)$$

где  $\Delta t$  – интервал времени шага счета.

Для решения системы (2.71) требуется начальное значение  $y2_0$ .

Особенностью РД-звена является то, что сигнал на его выходе пропорционален скорости изменения сигнала на входе.

В теоретических расчетах часто используется выражение для идеального дифференцирующего звена. В идеальном дифференцирующем звене отсутствует инерционность. В реальных физических системах такое звено отсутствует. Дифференциальное уравнение идеального дифференцирующего звена получается устремлением постоянной времени реального дифференцирующего звена к нулю  $T_D \rightarrow 0$  с одновременным сохранением произведения  $k_{\bar{A}} \cdot T_{\bar{A}} = \text{const}$  и имеет вид:

$$y(t) = T_{\bar{C}\bar{A}} \cdot \frac{dx(t)}{dt}, \quad (2.72)$$

где  $T_{\bar{C}\bar{A}} = k_{\bar{A}} \cdot T_{\bar{A}}$  - коэффициент пропорциональности идеального дифференцирующего звена.

В численных расчетах рекуррентное выражение для идеального дифференцирующего звена получается, если принять значение постоянной времени реального дифференцирующего звена равной интервалу шага  $T_{\bar{A}} = \Delta t$ :

$$y_n = \frac{T_{\bar{C}\bar{A}}}{\Delta t} \cdot (x_n - x_{n-1}). \quad (2.73)$$

Для решения требуется начальное условие  $x_n$ .

### 2.9.5. Запаздывающее звено (З-звено)

З-звено преобразует сигнал на выходе в соответствии с уравнением:

$$y(t) = x(t-\tau), \quad (2.74)$$

где  $\tau$  - время запаздывания.

Динамические характеристики звена приведены в табл.1. Численное решение дифференциального уравнения (2.74) может быть получено из логического рекуррентного выражения:

$$y_n = \begin{cases} x_{n-\frac{\tau}{\Delta t}}, & n \geq \frac{\tau}{\Delta t} \\ 0, & n < \frac{\tau}{\Delta t} \end{cases} \quad (2.75)$$

где  $\Delta t$  - шаг счета.

Для решения требуются начальные условия  $y_0$ .

Рассмотренное звено реализует чистое запаздывание и называется звеном транспортного запаздывания.

Примером запаздывающего звена может служить лента транспортера для подачи сыпучего материала (угля) на большое расстояние или длинная труба по которой подается нагретый теплоноситель.

## 2.10. Соединения элементарных динамических звеньев

Практически любую сложную динамическую систему можно представить в виде соединений элементарных звеньев.

Существуют различные виды соединений:

- а) параллельное;
- б) последовательное;
- в) встречно-параллельное;
- г) соединение с единичной обратной связью;
- д) комбинированное соединение.

На рис. 2.18 показаны примеры структурных схем соединений звеньев.

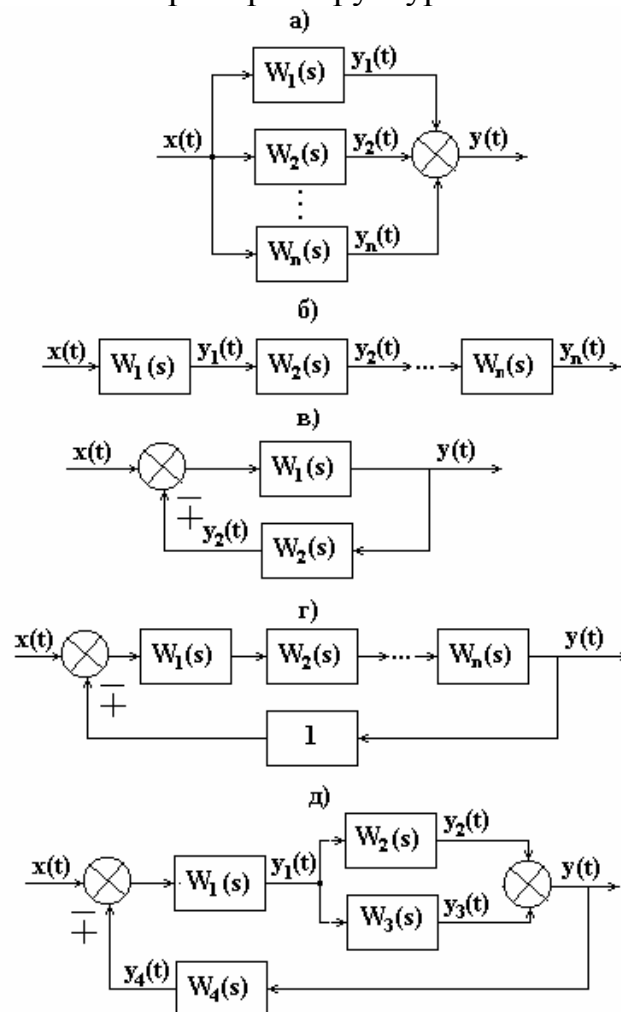


Рис. 2.18. Структурные схемы соединений звеньев

### 2.10.1. Правила преобразования передаточных функций

для различных соединений элементарных динамических звеньев

Для параллельного соединения (рис. 2.18,а) передаточные функции складываются:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_n(s). \quad (2.76)$$

Для последовательного соединения (рис. 2.18,б) передаточные функции перемножаются:

$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot \dots \cdot W_n(s). \quad (2.77)$$

Параллельные и последовательные соединения звеньев относятся к простейшим соединениям, в которых сохраняются свойства детектируемости.

В них влияние каждого звена распространяется только на последующие звенья. Такие схемы могут быть исследованы поочередно по одному звену.

Представленные на рис. 2.18. в, г, д схемы соединений относятся к классу сложных с внутренними обратными связями. В них существуют звенья, которые на входе воспринимают результаты собственной реакции.

Сложные схемы могут содержать один или несколько контуров. Под контуром понимается фрагмент схемы, состоящий из такой цепочки последовательно и параллельно включенных звеньев, чтобы, передвигаясь от звена к звену по стрелке, можно было достигнуть входа звена, от выхода которого было начато движение.

В теории графов существует правило получения передаточной функции для схем, содержащих контуры. В соответствии с правилом передаточной функцией схемы, содержащей контуры, является дробь. В числителе дроби произведение передаточных функций звеньев, содержащихся в прямом канале схемы от входа до выхода. В знаменателе дроби – единица плюс (минус) сумма произведений передаточных функций. Число слагаемых определяется числом контуров в схеме, а в произведения входят передаточные функции всех звеньев, составляющих цепочку контура.

Знак плюс в сумме знаменателя устанавливается для цикла с отрицательной обратной связью, минус – для цикла с положительной обратной связью.

Для встречно-параллельного соединения (рис. 2.18,в) в соответствии с правилом передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_1(s) \cdot W_2(s)}. \quad (2.78)$$

Для соединения с единичной обратной связью (рис. 2.18,г) передаточная функция запишется в виде:

$$W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot \dots \cdot W_n(s)}{1 \pm W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot \dots \cdot W_n(s)}. \quad (2.79)$$

Для комбинированного соединения, приведенного на рис.2.18,д, передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{W_1(s) \cdot [W_2(s) + W_3(s)]}{1 \pm W_1(s) \cdot W_4(s) \cdot [W_2(s) + W_3(s)]}. \quad (2.80)$$

### 2.10.2. Примеры получения КЧХ соединений элементарных звеньев

КЧХ рассмотренных соединений получаются заменой в формулах (2.76 ÷ 2.80) оператора Лапласа  $s$  на  $j \cdot \omega$ .

Для графического получения КЧХ параллельного соединения необходимо сложить векторы КЧХ составляющих звеньев для одинаковых частот. На комплексной плоскости сложение векторов подчиняется правилу параллелограмма. При последовательном соединении КЧХ звеньев перемножаются. При перемножении векторов их модули перемножаются, а аргументы складываются с учетом знака.

Для сложных структур КЧХ можно получить графоаналитическим методом, комбинируя правила для параллельного и последовательного соединений.

Ниже рассмотрены примеры КЧХ параллельного и последовательного соединения элементарных звеньев, а также соединения с отрицательной обратной связью.

Пример 1. Определение КЧХ параллельного соединения П-звена и И-звена. Рассматриваемые звенья соединены в соответствии со схемой на рис. 2.19,а) и имеют аналитические выражения КЧХ вида:

а) в полярных координатах:

$$\text{П-звено:} \quad W_D(j\omega) = k_D; \quad (2.81)$$

$$\text{И-звено:} \quad W_C(j\omega) = \frac{1}{T_C \cdot \omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (2.82)$$

Аналитическое выражение КЧХ такого соединения имеет вид:

$$W_{DC}(j\omega) = k_D + \frac{1}{T_C \cdot \omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (2.83)$$

Суммирование векторов для одинаковых частот осуществляется по правилу параллелограмма (рис. 2.19,б).

Б) на комплексной плоскости в виде функции комплексного переменного:

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega). \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} &\text{П-звено:} \quad W_D(j\omega) = k_D; \quad (2.85) \\ &\text{где} \quad \operatorname{Re}_D(\omega) = k_D; \quad \operatorname{Im}_D(\omega) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{И-звено:} \quad W_C(j\omega) = -j \frac{1}{T_C \cdot \omega}; \quad (2.86)$$

$$\text{где} \quad \operatorname{Re}_C(\omega) = 0; \quad \operatorname{Im}_C(\omega) = -\frac{1}{T_C \cdot \omega}.$$

Для параллельного соединения:

$$W_{DC}(j\omega) = W_D(j\omega) + W_C(j\omega) = k_D - j \frac{1}{T_C \cdot \omega}. \quad (2.87)$$

Вещественная часть КЧХ рассматриваемого соединения не зависит от частоты и при всех частотах остается равной  $k_D$ . Мнимая часть зависит от

частоты и располагается на отрицательной части мнимой оси. Полученный при этом годограф КЧХ соединения показан на рис. 2.19,б.

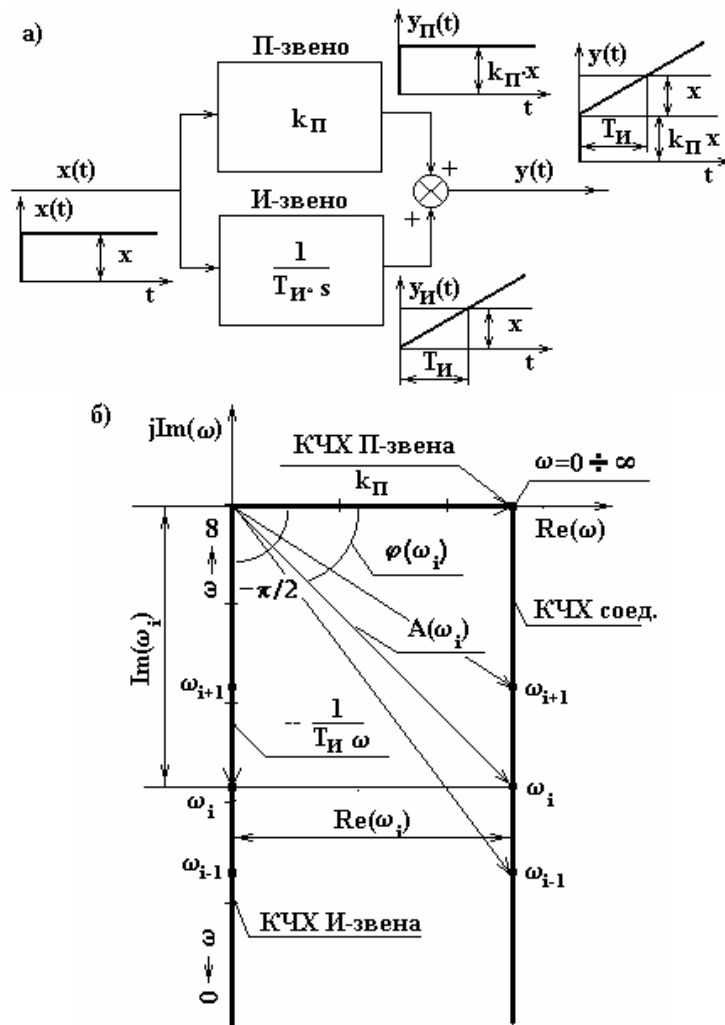


Рис. 2.19. Параллельное соединение П-звена и И-звена  
а) структурная схема соединения; б) графическая иллюстрация процедуры построения КЧХ соединения

Пример 2. Определение КЧХ последовательного соединения И-звена и А-звена. Рассматриваемые звенья соединены в соответствии со схемой на рис. 2.20,а и имеют аналитические выражения КЧХ вида

а) в полярных координатах

$$\text{И-звено:} \quad W_{\dot{C}}(j\omega) = \frac{1}{T_{\dot{C}} \cdot \omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad (2.88)$$

$$\text{А-звено:} \quad W_{\dot{R}}(j\omega) = \frac{k_{\dot{R}}}{\sqrt{T_{\dot{R}}^2 \cdot \omega^2 + 1}} \cdot e^{-j \arctg(T_{\dot{R}} \cdot \omega)}. \quad (2.89)$$

При последовательном соединении звеньев аналитические выражения их КЧХ перемножаются, при этом модули  $A(\omega)$  перемножаются, а аргументы  $\varphi(\omega)$  складываются с учетом знака (рис. 2.20,б). Аналитическое выражение соединения имеет вид:

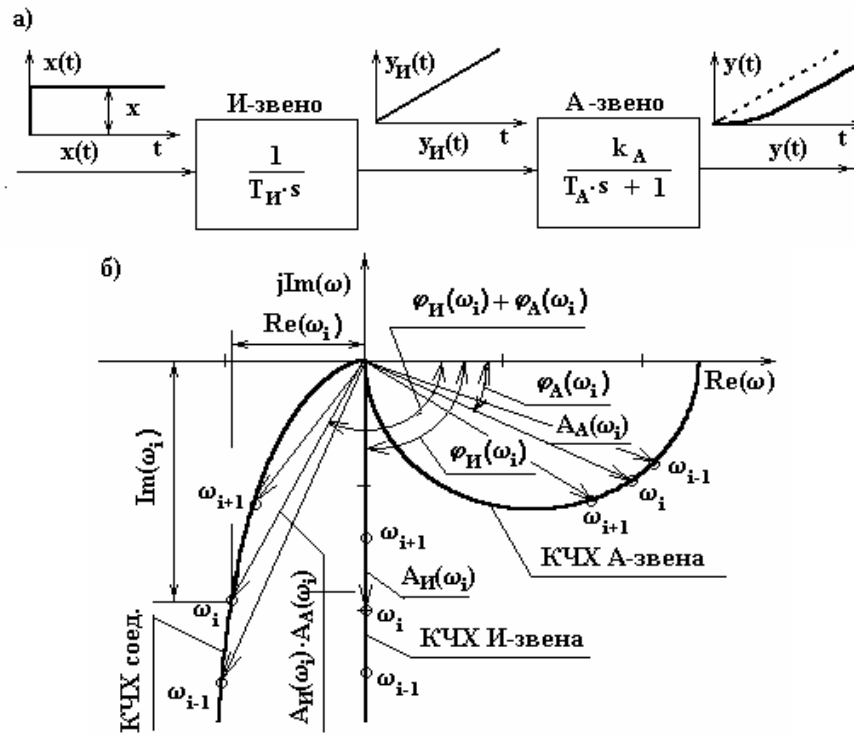


Рис. 2.20. Последовательное соединение И-звена и А-звена

- а) структурная схема соединения;  
б) графическая иллюстрация процедуры построения КЧХ соединения.

$$W_{\check{C}\check{R}}(j\omega) = \frac{1}{T_{\check{C}} \cdot \omega} \cdot \frac{k_{\check{R}}}{\sqrt{\check{N}_{\check{R}}^2 \cdot \omega^2 + 1}} \cdot e^{-j(\frac{\pi}{2} + \arctg T_{\check{R}} \omega)}, \quad (2.90)$$

где  $A_{\check{C}\check{R}}(\omega) = \frac{1}{T_{\check{C}} \cdot \omega} \cdot \frac{k_{\check{R}}}{\sqrt{\check{N}_{\check{R}}^2 \cdot \omega^2 + 1}};$   $\varphi_{\check{C}\check{R}}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(T_{\check{R}} \cdot \omega).$

Б) представление КЧХ на комплексной плоскости в виде функции комплексного переменного:

$$W(j\omega) = Re(\omega) + j Im(\omega):$$

И-звено:  $W_{\check{C}}(j\omega) = -j \frac{1}{T_{\check{C}} \cdot \omega};$  (2.91)

где  $Re_{\check{C}}(\omega) = 0;$   $Im_{\check{C}}(\omega) = -\frac{1}{T_{\check{C}} \cdot \omega}.$

А-звено:  $W_{\check{R}}(j\omega) = \frac{k_A}{T_A \cdot j\omega + 1} = \frac{k_A}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1} - j \cdot \frac{k_A \cdot T_A \cdot \omega}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1};$  (2.92)

где  $Re_A(\omega) = \frac{k_A}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1};$   $Im_A(\omega) = -\frac{k_A \cdot T_A \cdot \omega}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1}.$

КЧХ соединения вычисляется из выражения:

$$\begin{aligned} W_{\check{C}\check{R}}(j\omega) &= -j \frac{1}{T_{\check{C}} \cdot \omega} \cdot \left( \frac{k_A}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1} - j \cdot \frac{k_A \cdot T_A \cdot \omega}{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1} \right) = \\ &= -\frac{k_A \cdot T_A \cdot \omega}{T_{\check{C}} \cdot \omega(T_A^2 \cdot \omega^2 + 1)} - j \cdot \frac{k_A}{T_{\check{C}} \cdot \omega(T_A^2 \cdot \omega^2 + 1)}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\text{где } Re_{\check{C}A}(\omega) = -\frac{k_A \cdot T_A \cdot \omega}{T_{\check{C}} \cdot \omega \cdot (T_A^2 \cdot \omega^2 + 1)}; \quad Im_{\check{C}R}(\omega) = -\frac{k_A}{T_{\check{C}} \cdot \omega \cdot (T_A^2 \cdot \omega^2 + 1)}.$$

Подставляя в выражение (2.93) значения параметров звеньев  $T_H$ ,  $k_A$  и  $T_A$  и заданные частоты  $\omega_i$ , получим соответствующие значения вещественной и мнимой частей КЧХ соединения.

При дальнейшем построении по полученным результатам векторов  $W_{\check{C}R}(j\omega)$  на комплексной плоскости получим годограф КЧХ рассматриваемого соединения звеньев, вид которого показан на рис. 2.20,б.

Пример 3. Определение КЧХ последовательного соединения И-звена и А-звена с отрицательной единичной обратной связью, выполненного в соответствии со схемой, представленной на рис. 2.21,а.

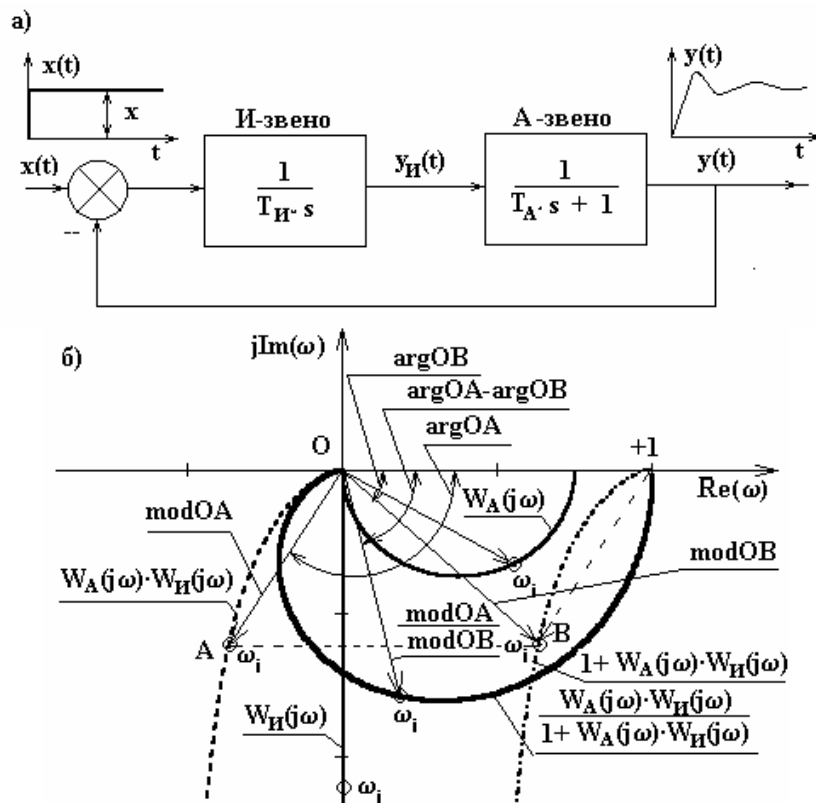


Рис 2.21. Соединение с отрицательной единичной обратной связью

а) структурная схема соединения;

б) графическая иллюстрация процедуры построения КЧХ соединения

На практике такие структурные схемы используются при построении автоматических систем регулирования (АСР), при этом в качестве объекта регулирования можно рассматривать А-звено, а в качестве регулятора И-звено (И-регулятор).

Аналитическое выражение КЧХ имеет вид:

$$W_{\check{C}A}(j\omega) = \frac{W_{\check{C}}(j\omega) \cdot W_A(j\omega)}{1 + W_{\check{C}}(j\omega) \cdot W_A(j\omega)}. \quad (2.94)$$

Выражение (2.94) значительно сложнее ранее рассмотренных. Поэтому ограничимся наиболее простым и наглядным графоаналитическим методом построения годографа КЧХ  $W_{y\bar{e}a}(j\omega)$ .

Числитель выражения (2.94) представляет собой годограф КЧХ последовательного соединения И- и А-звена (для частоты  $\omega_1$  вектор ОА), а знаменатель – сумму этого годографа с единичным вектором (для частоты  $\omega_1$  вектор ОВ). Годографы числителя и знаменателя выражения (2.94) показаны на рис. 2.21,б.

Для получения годографа  $W_{y\bar{e}a}(j\omega)$  необходимо для каждой частоты поделить модуль числителя на модуль знаменателя и из аргумента числителя вычесть аргумент знаменателя с учетом их знаков.

Примеры 1 ÷ 3 приведены для иллюстрации аналитических и графических преобразований комплексных функций. На практике КЧХ легко строятся в программной среде Mathcad с использованием двух встроенных функций  $Re(W(\omega))$  – вещественная часть комплексной функции  $Im(W(\omega))$  – мнимая часть комплексной функции или, в полярных координатах,  $|W(\omega)|$  – модуль комплексной функции, аналитическое выражение АЧХ и  $arg(W(\omega))$  – аргумент комплексной функции, аналитическое выражение ФЧХ.

### 2.10.3. Вычисление переходных характеристик для различных соединений элементарных динамических звеньев

В соответствии с вышеизложенным, графики переходных характеристик для различных соединений можно получить тремя различными методами:

1. С использованием символьного процессора Mathcad, содержащего операции прямого и обратного преобразования Лапласа (см. раздел 2.6);
2. С использованием метода обратного преобразования Фурье, позволяющего преобразовать аналитические выражения КЧХ во временные характеристики (см. раздел 2.7);
3. С использованием метода имитационного моделирования, в основе которого лежат рекуррентные выражения для элементарных динамических звеньев и структурная схема их соединения (см. раздел 2.8).

## 2.11. Устойчивость динамических систем

Под устойчивостью понимается способность динамических систем возвращаться в исходное установившееся состояние после снятия внешних воздействий (возмущений). Устойчивость является внутренним свойством динамической системы и не зависит от вида и точки внесения возмущения. Устойчивость не является абсолютным свойством системы и зависит от её параметров. Изменяя параметры, можно вывести систему из устойчивого состояния и наоборот.

Для динамических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, устойчивость можно оценить по корням характеристического уравнения.

### 2.11.1. Оценка устойчивости по корням характеристического уравнения

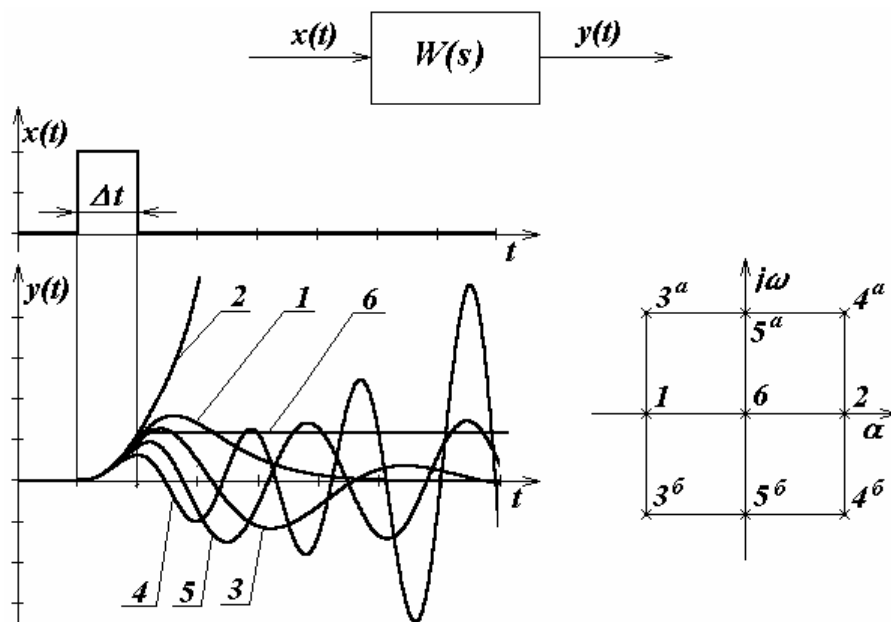
Для линейного дифференциального уравнения свободная составляющая решения может быть найдена из выражения:

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{r_i t}, \quad (2.95)$$

где  $r_i = \pm\alpha \pm j\omega$  - общий вид корней характеристического уравнения, которые могут быть комплексными, действительными, мнимыми или нулевыми.

На рис. 2.22 показана структурная схема анализируемой динамической системы, график импульсного возмущения на входе и графики всех возможных видов переходных процессов на выходе динамической системы. Правее графиков показаны соответствующие переходным процессам корни характеристического уравнения на комплексной плоскости.

Видно, что если на интервале времени  $\Delta t$  переходные процессы практически для всех состояний динамической системы одинаковые (вынужденное движение), то после снятия возмущения переходные процессы различные (свободное движение).



2.22. К понятию устойчивости

Существуют шесть видов состояний динамических систем:

- 1 – монотонный затухающий процесс, корни вещественные и отрицательные (устойчивая система);
- 2 – монотонный расходящийся процесс, корни вещественные положительные (неустойчивая система);
- 3 – колебательный затухающий процесс, корни комплексные, вещественная часть отрицательная (устойчивая система);

4 – колебательный расходящийся процесс, корни комплексные, вещественная часть положительная (неустойчивая система);

5 – колебательный не расходящийся и не затухающий процесс, корни мнимые (система на границе устойчивости);

6 – выходной сигнал после снятия возмущения остается неизменным, среди корней имеется нулевой (нейтральная система).

Соответствующие каждому виду переходного процесса корни характеристического уравнения показаны на комплексной плоскости.

Таким образом, если корни расположены слева от мнимой оси, то система будет устойчивой. Если хотя бы один корень окажется справа от мнимой оси, то система будет неустойчивой. Система будет находиться на границе устойчивости, если среди корней есть мнимые, и будет нейтральной, если один из корней равен нулю. Процессы будут колебательными при комплексных корнях и монотонными при действительных корнях.

Эти простые правила выводятся из анализа свободной составляющей решения дифференциального уравнения динамической системы.

Первым шагом анализа систем управления является оценка их устойчивости. Устойчивость является необходимым условием работоспособности системы регулирования.

Оценка устойчивости методом прямого эксперимента на работающих объектах не всегда приемлема. Это может быть опасно, а на уровне проектирования невозможно. Поэтому разработаны методы оценки устойчивости, которые используют аналитическое описание систем управления в виде линейных дифференциальных уравнений. Эти методы косвенные и известны как критерии устойчивости.

## 2.12. Критерии устойчивости

В теории управления существуют классические алгебраические критерии устойчивости, позволяющие оценивать устойчивость по коэффициентам характеристического уравнения, и частотные критерии устойчивости, в основу которых заложен анализ частотных характеристик.

### 2.12.1. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Наибольшее распространение среди алгебраических критериев устойчивости получил критерий Гурвица (Швейцарский математик, 1885 г.). В основе этого критерия лежит анализ коэффициентов характеристического уравнения динамической системы вида:

$$a_0 \cdot r^n + a_1 \cdot r^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot r + a_n = 0. \quad (2.96)$$

Из коэффициентов уравнения составляется определитель Гурвица: по главной диагонали последовательно записываются  $n$  коэффициентов характеристического уравнения, начиная с  $a_1$ . Столбцы определителя, начиная от

элементов главной диагонали, заполняются вверх по возрастающим индексам, вниз – по убывающим. Коэффициенты с индексом меньше нуля или больше  $n$  заменяются нулями

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & . & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & a_n & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-3} & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}. \quad (2.97)$$

Для того, чтобы динамическая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все диагональные миноры определителя Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad (2.98)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (2.99)$$

.....

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0.$$

Система находится на границе устойчивости, если

$$\Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} = 0. \quad (2.100)$$

Как видно из выражений (2.98) – (2.100), вычисление диагональных миноров не представляет труда, и устойчивость конкретной системы может быть легко определена вручную.

Пример. Проведем анализ устойчивости динамической системы, состоящей из последовательно соединенных П-звена и трех А-звеньев, охваченных единичной отрицательной обратной связью.

А-звенья имеют одинаковые постоянные времени  $T_A = 10,0$  с., коэффициент передачи  $k_A = 1,0$  ед..

Проанализируем случай, когда коэффициент передачи П-звена принимает значения:

а)  $k_{II} = 5,0$  ед.; б)  $k_{II} = 10,0$  ед..

Определить устойчивость системы при заданных значениях  $k_{II}$ . Найти значение  $k_{II}$ , соответствующее границе устойчивости.

Характеристическим уравнением анализируемой системы является знаменатель передаточной функции:

$$a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0, \quad (2.101)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{T_A^3}{1 + K_D \cdot k_A^3}; \quad a_1 = \frac{3 \cdot T_A^2}{1 + k_D \cdot k_A^3}; \quad a_2 = \frac{3 \cdot T_A}{1 + k_D \cdot k_A^3}; \quad a_3 = 1.$$

Определитель Гурвица для полученного характеристического уравнения запишется в виде:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Проверим знаки миноров определителя:

а)  $k_D = 5$ .

$$\Delta_1 = a_1 = \frac{300}{6} = 50 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = \frac{9000}{36} - \frac{6000}{36} = \frac{500}{6} = 83,33 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 = 1 \cdot \frac{500}{6} = 83,33 > 0.$$

Согласно условию Гурвица при  $k_D = 5$  анализируемая система устойчива.

Б)  $k_D = 10$ .

$$\Delta_1 = a_1 = \frac{300}{11} = 27,27 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3 = -\frac{2000}{121} = -16,53 < 0;$$

$$\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 = 1 \cdot (-16,53) = -16,53 < 0.$$

При  $k_D = 10$  из условия Гурвица следует, что система становится неустойчивой.

В) Условие границы устойчивости:

$$\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 = a_3 \cdot (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) = 0,$$

откуда

$$1 \cdot (9000 - 1000 \cdot (1 + k_D^{ed})) = 0;$$

$$\text{следовательно: } 9000 - 1000 - 1000 \cdot k_D^{ed} = 0, \text{ или } k_D^{ed} = 8.$$

На рис. 2.23 показаны графики переходных процессов в исследуемой системе после введения ступенчатого единичного возмущения  $\lambda$  на вход первого А-звена для трех значений коэффициента передачи П-звена.

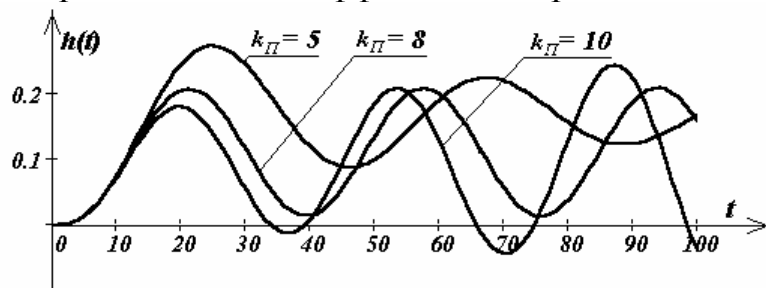


Рис. 2.23. Переходные процессы в динамической системе для различных значений коэффициента передачи П-звена в обратной связи

### 2.12.2. Частотный критерий устойчивости Найквиста

Алгебраический критерий достаточно прост для исследования устойчивости динамических систем, имеющих характеристические уравнения невысокого порядка. Однако для уравнений высших порядков их применение становится затруднительным, а если в системе имеются запаздывающие звенья, то и вовсе невозможно, так как в этом случае характеристическое уравнение становится трансцендентным.

В подобных случаях оказывается более удобным исследовать устойчивость системы с использованием частотного критерия, обладающего большей наглядностью в силу простой геометрической интерпретации. Частотный критерий получил название критерия Найквиста (английский математик, 1932 г.) и разработан специально для анализа устойчивости динамических систем, имеющих обратные связи.

Для трактовки частотного критерия устойчивости введем понятия замкнутой и разомкнутой системы. На рис. 2.24 изображена структурная схема динамической системы, где входное воздействие поступает по каналу  $u(t)$ .

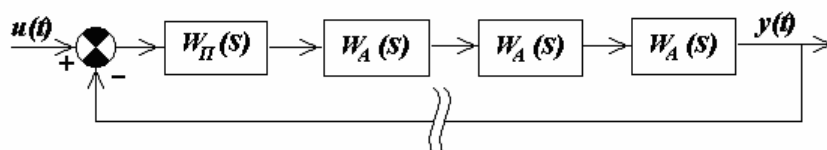


Рис. 2.24. Структурная схема динамической системы в замкнутом и разомкнутом состоянии

Динамической системой в замкнутом состоянии является система с функционирующей обратной связью. Динамической системой в разомкнутом состоянии является система с разорванной обратной связью.

Частотный критерий устойчивости использует КЧХ разомкнутой динамической системы и утверждает следующее.

Динамическая система в замкнутом состоянии является устойчивой тогда, когда ее КЧХ в разомкнутом состоянии не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами  $-1, j \cdot 0$ . Динамическая система в замкнутом состоянии является неустойчивой тогда, когда ее КЧХ в разомкнутом состоянии охватывает эту точку и система находится на границе устойчивости, когда ее КЧХ в разомкнутом состоянии проходит через эту точку.

На рис. 2.25 показаны годографы КЧХ устойчивой системы (1), неустойчивой системы (2) и системы на границе устойчивости (3).

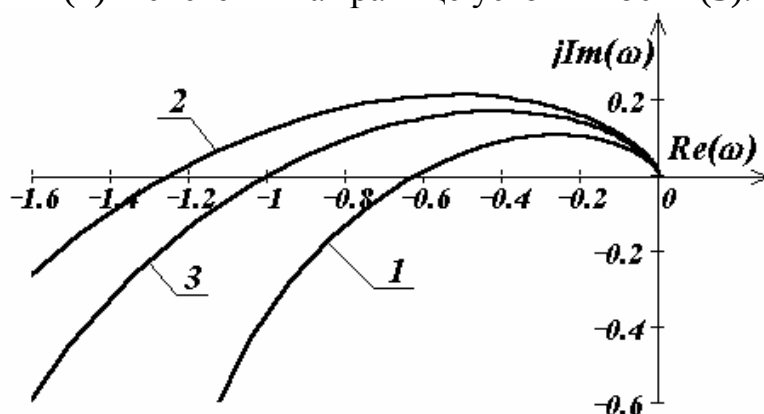


Рис. 2.25. К понятию о частотном критерии устойчивости

Пример. Выполним анализ устойчивости динамической системы с помощью критерия Найквиста для случая с передаточной функцией системы в разомкнутом состоянии вида:

$$W_{\text{дн}}(s) = k_D \cdot \frac{k_R^3}{(\tilde{N}_R \cdot s + 1)^3}. \quad (2.102)$$

Заменив в передаточной функции (2.102)  $s \Rightarrow j\omega$ , получим аналитическое выражение КЧХ в полярных координатах:

$$W_{\dot{a}i}(j\omega) = \frac{k_{\dot{D}} \cdot k_{\dot{R}}^3}{(\sqrt{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1})^3} \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot \arctg(T_{\dot{R}} \cdot \omega)}, \quad (2.103)$$

где  $A_{\dot{a}i}(\omega) = \frac{k_{\dot{D}} \cdot k_{\dot{R}}^3}{(\sqrt{T_A^2 \cdot \omega^2 + 1})^3}$ ; и  $\varphi_{\dot{a}i}(\omega) = -3 \cdot \arctg(T_A \cdot \omega)$ .

Условие границы устойчивости по критерию Найквиста:

$$A_{\dot{a}i}(\omega) = 1; \quad \text{и} \quad \varphi_{\dot{a}i}(\omega) = -\pi. \quad (2.104)$$

2.□. Определим частоту, соответствующую критической точке  $(-1, j 0)$ :

$$-3 \cdot \arctg(T_A \cdot \omega_{-180}) = -\pi \Rightarrow T_{\dot{R}} \cdot \omega_{-180} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3},$$

откуда  $\omega_{-180} = \frac{\sqrt{3}}{T_{\dot{R}}}$ . Подставляя  $\omega_{-180}$  в выражение  $A_{\dot{a}i}(\omega) = 1$ ; получим:

$$\frac{k_{\dot{D}}}{(\sqrt{3}+1)^3} = 1,$$

откуда коэффициент передачи П-звена для системы, находящейся на границе устойчивости, будет  $k_{\dot{D}}^{ed} = 8$ .

Для варианта а) при  $k_{\dot{D}} = 5$  система устойчивая, поскольку

$$k_{\dot{D}} = 5 < k_{\dot{D}}^{ed} = 8.$$

Для варианта б) при  $k_{\dot{D}} = 10$  система неустойчивая, поскольку

$$k_{\dot{D}} = 10 > k_{\dot{D}}^{ed} = 8.$$

Как видно из рассмотренных примеров, расчеты устойчивости по алгебраическому критерию Гурвица и частотному критерию Найквиста дают одинаковые результаты.

### 2.13. Аналитические методы расчета границы устойчивости АСР с регуляторами, имеющими два настроечных параметра

Одной из главных задач при анализе и синтезе автоматических систем регулирования является определение ограничений на параметры регулятора с учетом его устойчивой работы. Для регуляторов с одним настроечным параметром это его критическое значение.

Наиболее распространенными в настоящее время являются регуляторы, содержащие в своей структуре параллельное соединение пропорционального и интегрирующего звеньев и имеющие два настроечных параметра:  $k_{\Pi}$  — коэффициент усиления пропорционального звена и  $T_{\Pi}$  — постоянная времени интегрирующего звена.

Для регуляторов с двумя настроечными параметрами границей устойчивости АСР является линия на графике, координатами которого являются параметры регулятора. Такой график называется плоскостью настроечных параметров регулятора.

Ординатой графика плоскости параметров удобно принять значение отношения  $\frac{k_D}{T_C}$ , а абсциссой  $k_D$  коэффициент передачи П-звена.

Экспериментальное исследование устойчивости, особенно на действующем производстве, является ответственной операцией. В связи с этим рекомендуется соблюдать следующие правила. Эксперимент начинают при минимальном значении коэффициента передачи  $k_D$  и максимальном значении  $T_H$ . При этом переходные процессы могут быть монотонными (без колебаний). При неизменном значении  $T_H$  увеличивают  $k_D$  до выхода на границу устойчивости. Затем уменьшают значение  $T_H$ , и изменяя  $k_D$  находят границу. Далее последовательно варьируя параметры  $k_D$  и  $T_H$  находят координаты границы устойчивости на всей плоскости.

Аналитически линия границы устойчивости строится на основании частотного критерия Найквиста. Из критерия Найквиста следует, что замкнутая система находится на границе устойчивости, если аналитическое выражение КЧХ разомкнутой системы отвечает условию:

$$W_{pc}(\omega, T_C, k_D) = (k_D + \frac{k_D}{T_C \cdot j\omega}) \cdot \frac{k_R^3}{(T_A \cdot j\omega + 1)^3} = -1. \quad (2.105)$$

Для удобства второй сомножитель выражения (2.105), представляющее собой аналитическое выражение КЧХ объекта регулирования, обозначим комплексной функцией  $W(\omega)$ , в которой параметром будет частота  $\omega$  при заданных значениях параметров  $k_R$  и  $T_A$ :

$$W(\omega) = \frac{k_R^3}{(T_A \cdot j\omega + 1)^3},$$

а первый сомножитель оставим неизменным. После этого всю левую часть уравнения (2.105) запишем в виде суммы действительной и мнимой составляющих:

$$\begin{aligned} W_{pc}(\omega, T_C, k_D) &= (k_D + \frac{k_D}{T_C \cdot j\omega}) \cdot \{Re[W(\omega)] + j \cdot Im[W(\omega)]\} = \\ &= k_D \cdot Re[W(\omega)] + j \cdot k_D \cdot Im[W(\omega)] - j \cdot \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Re[W(\omega)] + \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Im[W(\omega)] = \\ &= \left\{ k_D \cdot Re[W(\omega)] + \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Im[W(\omega)] \right\} + j \left\{ k_D \cdot Im[W(\omega)] - \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Re[W(\omega)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Из вещественной и мнимой частей составим систему уравнений, параметрами которой будут  $\omega$ ,  $k_D$  и  $T_H$

$$\begin{aligned} k_D \cdot Re[W(\omega)] + \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Im[W(\omega)] &= -1; \\ k_D \cdot Im[W(\omega)] - \frac{k_D}{T_C \cdot \omega} \cdot Re[W(\omega)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Уравнения системы (2.107) достаточно легко решаются аналитически относительно двух переменных  $x = k_D$  и  $y = \frac{k_D}{T_C}$ :

$$x = -\frac{\operatorname{Re}[W(\omega)]}{\{\operatorname{Re}[W(\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[W(\omega)]\}^2}$$

$$y = -\frac{\omega \cdot \operatorname{Im}[W(\omega)]}{\{\operatorname{Re}[W(\omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[W(\omega)]\}^2}. \quad (2.108)$$

Произведя расчеты для последовательности частот, получим последовательность координат параметров обратной связи для линии границы устойчивости исследуемой замкнутой динамической системы.

Следует обратить внимание на то, что для систем высокого порядка линия границы устойчивости с ростом частоты представляет собой раскручивающуюся по часовой стрелке спираль. Для объектов с  $s$ -образными переходными характеристиками спираль начинается на вещественной оси от координаты  $-1$ . На рис. 2.26 показана плоскость параметров  $k_D$  и  $\frac{k_D}{T_C}$  с линией границы устойчивости. Для объектов, имеющих интегральную составляющую, линия границы устойчивости выходит из нуля.

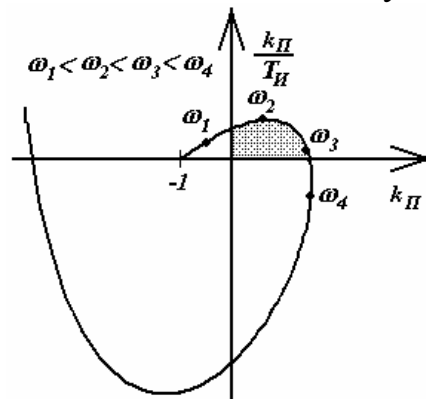


Рис. 2.26. Плоскость параметров обратной связи с линией границы устойчивости

Практическую ценность представляет участок кривой с положительными (реализуемыми) значениями параметров в диапазоне предпочтительных для инерционных систем низких частот. На рис. 2.26 заштрихована область значений параметров, гарантирующих устойчивую работу динамической системы.

Расчеты линии границы устойчивости следует начинать от нулевой частоты с таким шагом, чтобы не пропустить первый виток.

## 2.14. Понятие запаса устойчивости

Оценку запаса устойчивости представляется возможным произвести по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости  $r_i = \alpha \pm j \cdot \omega$ , или по степени удаления годографа разомкнутой динамической системы от критической точки  $-1; j \cdot 0$ .

### 2.14.1. Корневой показатель запаса устойчивости

Объективным прямым методом оценки запаса устойчивости является интенсивность затухания колебаний в системе. Интенсивность затухания колебаний может быть определена по относительному уменьшению соседних амплитуд переходного процесса  $A_3$  и  $A_1$  :

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}. \quad (2.109)$$

В разделе 2.5 этому показателю было дано название **степень затухания**.

С учетом того, что  $A_3 = A_1 \cdot e^{-\alpha T_0}$  (где  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$  - период собственных колебаний), формулу (2.109) можно представить следующим образом:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi \frac{\alpha}{\omega}}. \quad (2.110)$$

Отношение  $\left| \frac{\alpha}{\omega} \right| = m$  принято называть **корневым показателем запаса устойчивости** или **степенью колебательности** и тогда формула (2.110) примет вид:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi \cdot m}. \quad (2.111)$$

Из рис. 2.27а видно, что степень колебательности  $m$  связана с углом лучей на комплексной плоскости соотношением  $\gamma = \arctg(m)$ .

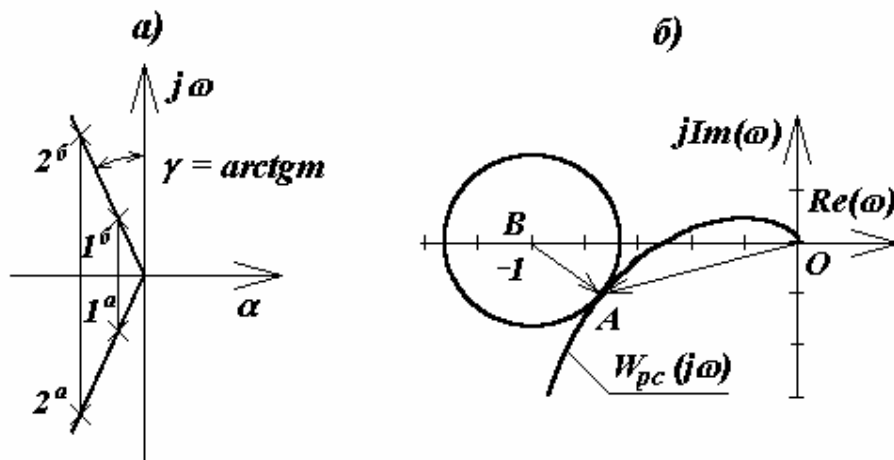


Рис. 2.27. К пояснению понятия запаса устойчивости

Если комплексные корни, лежащие правее лучей отсутствуют, то переходные процессы гарантировано будут иметь степень затухания не менее заданной  $\psi_{30}$ . В табл. 2.2 приведены несколько значений степени затухания  $\psi$  и соответствующие им значения степени колебательности  $m$ .

Таблица 2.2.

|        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\psi$ | 0,65   | 0,70   | 0,75   | 0,80   | 0,85   | 0,90   | 0,95   |
| $m$    | 0,1671 | 0,1916 | 0,2206 | 0,2562 | 0,3019 | 0,3665 | 0,3768 |

### 2.14.2. Частотный показатель запаса устойчивости

В соответствии с критерием устойчивости Найквиста мерой запаса устойчивости можно считать степень удаления точек годографа КЧХ разомкнутой системы от точки  $-1, j 0$ , которая может быть определена по величине максимума АЧХ замкнутой системы.

Допустим, что КЧХ разомкнутой системы  $W_{pc}(j\omega)$  располагается на комплексной плоскости, как показано на рис. 2.27 б. Тогда АЧХ замкнутой системы  $A_{zc}(\omega)$  определится через  $W_{pc}(j\omega)$  с помощью соотношения:

$$\dot{R}_{zn}(\omega) = |W_{zn}(j\omega)| = \frac{|W_{dn}(j\omega)|}{|1 + W_{pc}(j\omega)|}. \quad (2.112)$$

Числитель формулы (2.115) для некоторой частоты  $\omega_i$  равен длине отрезка ОА, а знаменатель – длине отрезка ВА (см. рис 2.27 б). Поэтому значение АЧХ замкнутой системы для этой частоты может быть найдено как частное от деления отрезка ОА на отрезок ВА:

$$A_{zn}(\omega_i) = \frac{\hat{R}}{\hat{A}\bar{R}}. \quad (2.113)$$

Отношение длин отрезков ОА и ВА при  $\omega \Rightarrow 0$  равно единице. При повышении частоты точка А перемещается вверх. Если КЧХ разомкнутой системы проходит достаточно далеко от точки  $-1, j 0$ , то длина отрезка ВА все время остается больше длины отрезка ОА и при  $\omega \Rightarrow \infty$  стремится к единице. Одновременно с этим длина отрезка ОА, уменьшаясь, стремится к нулю. Поэтому при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega \Rightarrow \infty$  АЧХ замкнутой системы монотонно уменьшается от единицы до нуля (см. рис. 2.28, кривая 1).

Если АЧХ проходит достаточно близко от точки  $-1, j 0$ , длина отрезка ВА при низких частотах оказывается меньше длины отрезка ОА. Поэтому в некотором диапазоне частот от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_p$  АЧХ замкнутой системы возрастает от единицы до некоторого максимального значения  $A_{zn}(\omega_p)$ . Затем, вследствие того, что при  $\omega \Rightarrow \infty$  ОА стремится к нулю, а ОВ – к единице, эта характеристика стремится к нулю (см. рис. 2.28, кривая 2). Чем ближе проходит КЧХ замкнутой системы от точки  $-1, j 0$ , тем большей оказывается величина максимума АЧХ замкнутой системы. Наконец, в случае, когда она проходит через точку  $-1, j 0$ , максимум АЧХ замкнутой системы уходит в бесконечность (см. рис. 2.28, кривая 3).

Таким образом, чем больший максимум имеет АЧХ замкнутой системы, тем ближе АЧХ разомкнутой системы к «опасной» точке  $-1, j 0$ , и, следовательно, тем меньший запас устойчивости имеет система.

Относительное значение резонансного пика АЧХ замкнутой системы в виде:

$$M = \frac{A_{zn}(\omega_p)}{A_{zn}(\omega_0)} \quad (2.114)$$

принято называть частотным показателем колебательности. Величина  $M$  может изменяться от 1 до  $\infty$ . Между степенью затухания  $\psi$ , степенью

колебательности  $m$  и показателем колебательности  $M$  существует связь (например:  $\psi=0,9$  соответствует  $m=0,3665$  и  $M=1,5375$ ).

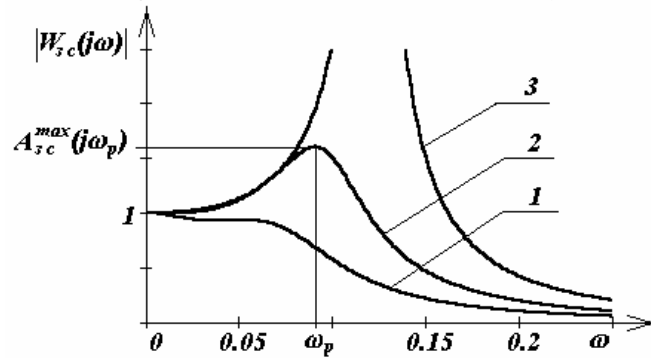


Рис. 2.28. АЧХ замкнутой АСР относительно управляющего воздействия

1. Не колебательный затухающий переходный процесс;
2. Колебательный затухающий переходный процесс;
3. Система на границе устойчивости (незатухающие колебания).

#### 2.14.3. Аналитический расчет границы заданного запаса устойчивости АСР с регуляторами, имеющими два настроечных параметра

Для определения границы заданного запаса устойчивости, как и для определения границы устойчивости, существует косвенный метод с использованием корневого и частотного показателей запаса устойчивости.

В разделе 2.14.1 было показано, что для обеспечения заданного запаса устойчивости действительные части корней должны быть отрицательными и крайние справа корни должны иметь отношение действительной и мнимой частей по абсолютной величине не менее:

$$m = \left| \frac{\alpha}{\omega} \right|. \quad (2.115)$$

Если в оператор Лапласа  $s$  ввести действительную составляющую с отрицательным знаком и связанную с мнимой составляющей соотношением  $\alpha = -m \cdot \omega$ , то для такого оператора Лапласа:

$$s = -m \cdot \omega + j \cdot \omega \quad (2.116)$$

можно построить расширенную КЧХ динамической системы.

Особенность расширенной КЧХ заключается в том, что для разомкнутой системы она всегда проходит через критическую точку  $-1; j0$ . Учитывая это, расширенная КЧХ может быть использована для определения линии границы заданного запаса устойчивости.

Для объекта функция аналитического выражения расширенной КЧХ будет иметь вид:

$$W(m, \omega) = \frac{k_R^3}{[T_A \cdot \omega \cdot (j - m) + 1]^3}. \quad (2.117)$$

Для регулятора функция аналитического выражения расширенной КЧХ запишется:

$$W_{oc}(m, \omega, T_c, k_D) = k_D + \frac{k_D}{T_c \cdot \omega \cdot (j - m)}. \quad (2.118)$$

Перемножая выражения (2.117) и (2.118) и приравнявая полученное произведение  $-1$ , получим:

$$\left[ k_D + \frac{k_D}{T_c \cdot \omega \cdot (j - m)} \right] \cdot W(m, \omega) = -1. \quad (2.119)$$

Расширенная КЧХ разомкнутой системы, формально проходя через критическую точку  $-1, j \cdot 0$ , содержит в себе информацию о запасе устойчивости, заданным степенью колебательности  $m$ .

Далее, как и при определении границы устойчивости, разложим комплексное выражение левой части уравнения (2.119) на вещественную и мнимую составляющие и составим из них систему уравнений. Уравнение вещественной составляющей приравняем  $-1$ , а мнимой нулю:

$$\begin{aligned} k_D \cdot \operatorname{Re}[W(m, \omega)] + \frac{k_D}{T_c \cdot \omega} \cdot \left\{ \frac{\operatorname{Im}[W(m, \omega)] - m \cdot \operatorname{Re}[W(m, \omega)]}{1 + m^2} \right\} &= -1; \\ k_D \cdot \operatorname{Im}[W(m, \omega)] - \frac{k_D}{T_c \cdot \omega} \cdot \left\{ \frac{m \cdot \operatorname{Im}[W(m, \omega)] + \operatorname{Re}[W(m, \omega)]}{1 + m^2} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.120)$$

В результате получим выражения для вычисления координат линии заданного запаса устойчивости:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{m \cdot \operatorname{Im}[W(m, \omega)] + \operatorname{Re}[W(m, \omega)]}{\{\operatorname{Re}[W(m, \omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[W(m, \omega)]\}^2}; \\ y &= -\frac{\omega \cdot (1 + m^2) \cdot \operatorname{Im}[W(m, \omega)]}{\{\operatorname{Re}[W(m, \omega)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[W(m, \omega)]\}^2}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Следует обратить внимание, что если в выражениях (2.121) положить  $m=0$ , то они вырождаются в выражения (2.108) для границы устойчивости.

Линия заданного запаса устойчивости проходит в устойчивой зоне плоскости параметров. На рис. 2.29 показаны линии границ заданных запасов устойчивости для трех значений  $m$ . Там же построена линия границы устойчивости для  $m=0$ .

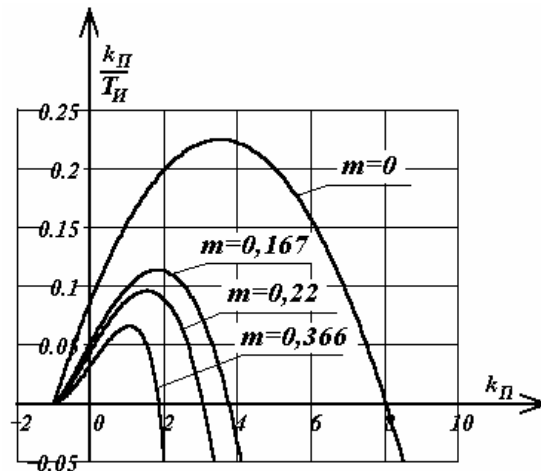


Рис. 2.29. Линии границ заданного запаса устойчивости и граница устойчивости в плоскости настроечных параметров регулятора

### 3. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТОВ

Рекомендации по содержательной части отчетов лабораторных работ будут сделаны в описаниях работ. В данном разделе приведены общие рекомендации по организации, используемых средств вычисления и оформления отчетов.

Во-первых, следует заметить, что ограничений на методы организации вычислений не накладывается. В конце каждой лабораторной работы имеются рекомендуемые формулы или ссылки, по которым могут быть сделаны вычисления, как на калькуляторе, так и с использованием различных программных сред на ПЭВМ.

Во-вторых, отчет может быть написан и оформлен, как в рукописном виде на листах формата А4, с выполненными на миллиметровке графиками, так и с использованием различных предназначенных для создания технических документов программных сред на ПЭВМ.

Особенностями отчетов практикума являются достаточно большие объемы вычислений и представление результатов на схемах и графиках.

В отчетах практикума в основном предлагаются к расчету переходные процессы и частотные характеристики. Их вычисления не сложны по содержанию, но рутинные, многократно выполняемые. Выполнять их вручную достаточно обременительно и желательно вычислительный процесс алгоритмизировать и использовать какое-либо автоматическое вычислительное средство, например, программу на ПЭВМ.

Чертежи и схемы являются средством представления идей исследования и расчетов технического документа. Цели отчетов практикума иллюстрируются структурными схемами изучаемых динамических систем. Схемы должны быть понятными. Размеры схем должны быть согласованы с размером выбранного шрифта обозначений и надписей.

Графики являются важным элементом технического документа. Они должны быть понятными и отражать основные черты представленной на них зависимости или процесса. Важными характеристиками графиков являются размеры (шаблоны) и масштабы осей. Удачный выбор шаблонов и масштабов осей графиков в значительной мере определяет качество технического документа. Минимальный размер графиков должен быть не менее одной четверти листа отчета. Масштабы осей должны быть кратными числу деления осей.

Для выполнения расчетов и оформления отчетов рекомендуется современный метод создания технических документов на ПЭВМ с использованием программ Microsoft Word, Mathcad и Paint и OLE-технологии связи и внедрения приложений и их фрагментов.

Рекомендуемый набор программ достаточен:

- для качественного выполнения расчетов и построения графиков в программе Mathcad,
- рисования схем и внесения обозначений и пояснений на графиках в программе Paint,

- написания целей, промежуточных пояснений и выводов лабораторных работ, а также оформления титульного листа и компоновка текста по страницам с учетом схем и графиков в программе Microsoft Word.

Все операции внедрения и связи делаются выделением требуемых фрагментов в программах Mathcad и Paint и переносом содержимого в программу Microsoft Word с помощью опции «Копирование» («Copy»).

Так как во второй и третьей лабораторных работах используются результаты первой, рекомендуется открыть и сохранять в семестре файлы «Отчет.mcd» в Mathcad, «Отчет.bmp» в Paint и «Отчет.doc» в Microsoft Word.

Последняя рекомендация касается электронного метода хранения результатов лабораторных экспериментов в файле «Отчет.mcd». В экспериментах рекомендуется записывать ординаты графиков для фиксированных значений аргументов (времени ил частоты) и найденные из графиков значения параметров и констант.

Для хранения точек всех экспериментально полученных графиков и зависимостей рекомендуется в программе «Отчет.mcd» создавать матрицы. Матрицы удобны для программной обработки, а их хранение позволит легко воспользоваться данными на последующих этапах оформления отчетов всех лабораторных работ.

Пример. В табл. 3.1 ÷ 3.5 приведены результаты экспериментального определения кривой разгона, их обработки, точки переходной характеристики и параметры элементарного динамического звена в первой части первой лабораторной работе. Исходными данными для оформления отчета являются заполненные при выполнении лабораторной работы табл. 3.1 ÷ 3.3.

При оформлении отчета по лабораторной работе в первую очередь следует открыть в Mathcad файл с именем «Отчет.mcd». В программе следует объявить матрицу результатов первого эксперимента, например, `exper1`.

С помощью кнопки инструментов  установить размерность матрицы. В таблице 3.3. записано 11 экспериментальных точек. Поэтому в матрице `exper1` следует объявить 11 строк и 3 столбца для времени  $t_s$ , входной  $x(t_s)$  и выходной  $y(t_s)$  переменных и затем ввести в её элементы данные из табл. 3.3.

## Результаты оперативного анализа результатов эксперимента

### Характеристика ступенчатого возмущения на входе звена

Табл. 3.1

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| Момент времени внесения возмущения $t_0, c$                           | 5   |
| Сигнал на входе звена до подачи возмущения $x(t_s < t_0)$ , ед.вх.    | 0,3 |
| Сигнал на входе звена после подачи возмущения $x(t_s > t_0)$ , ед.вх. | 0,5 |
| Величина возмущения $\Delta x = x(t_s > t_0) - x(t_s < t_0)$ , ед.вх. | 0,2 |

## Характеристика переходного процесса на выходе звена

Табл. 3.2

|                                                         |      |
|---------------------------------------------------------|------|
| Начальное значение $y_{нач} = y(t_0)$ , ед.вых          | 0,7  |
| Установившееся значение (если есть) $y_{уст}$ , ед.вых. | 2,06 |

## Полученные из эксперимента точки кривой разгона

Табл. 3.3

|                  |     |     |       |      |     |     |     |     |      |      |      |
|------------------|-----|-----|-------|------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|
| Время $t$ , с    | 2   | 5   | 5,01  | 10   | 20  | 30  | 40  | 50  | 60   | 70   | 80   |
| $x(t)$ , ед.вх.  | 0,3 | 0,3 | 0,5   | 0,5  | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5  | 0,5  | 0,5  |
| $y(t)$ , ед.вых. | 0,7 | 0,7 | 0,703 | 0,95 | 1,3 | 1,5 | 1,8 | 1,9 | 2,05 | 2,06 | 2,06 |

Рассчитанные из кривой разгона точки переходной характеристики для  $t \geq 0$ 

Табл. 3.4

|                                                                |    |     |       |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------------------------------------------|----|-----|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Время $t=t_i - t_0$ , с                                        | -3 | 0   | 0,01  | 5,0  | 15,0 | 25,0 | 35,0 | 45,0 | 55,0 | 65,0 | 75,0 |
| $h(t) = \frac{y(t_i) - y_{нач}}{\Delta x}$ ,<br>ед.вых./ед.вх. | -  | 0,0 | 0,015 | 1,25 | 3,0  | 4,0  | 5,5  | 6,0  | 6,75 | 6,8  | 6,8  |
| Ординаты переходной характеристики                             |    |     |       |      |      |      |      |      |      |      |      |

## Выводы по эксперименту

Табл. 3.5

|                 |                |                      |          |        |             |                |
|-----------------|----------------|----------------------|----------|--------|-------------|----------------|
| Вид звена       | Апериодическое |                      |          |        |             |                |
| Параметры звена | Название       | Коэффициент усиления | Значение | 6,8    | Размерность | ед.вых./ед.вх. |
|                 | Название       | Постоянная времени   | Значение | 22,667 | Размерность | секунд         |

После этого следует выбрать имена простых переменных для показателей, характеризующих ступенчатое возмущение на входе и переходного процесса на выходе звена из таблиц 3.1 и 3.2. Присвоить им значения и написать блок программы для вычисления ординат переходной характеристики.

Примечание. Указанные показатели могут быть легко вычислены в программе. Пример фрагмента программы в Mathcad для выполнения отчета показан на рис. 3.1.

После выполнения расчетов фрагмент программы был скопирован опцией «Сору» и ее факсимильное изображение вставлено в программу Paint. В программе Paint в рисунок добавлены надписи и рамка. Затем рисунок скопирован в Paint и установлен в текст программы Word.

Примечание. Если фрагмент представляет всю программу, как это показано на рис. 3.1, надписи могут быть внесены в программе Mathcad и образ ее внедрен в Word сразу. В этом случае программа Mathcad может быть активизирована и работать непосредственно в среде Word. Это удобно в случае обработки результатов нескольких экспериментов.

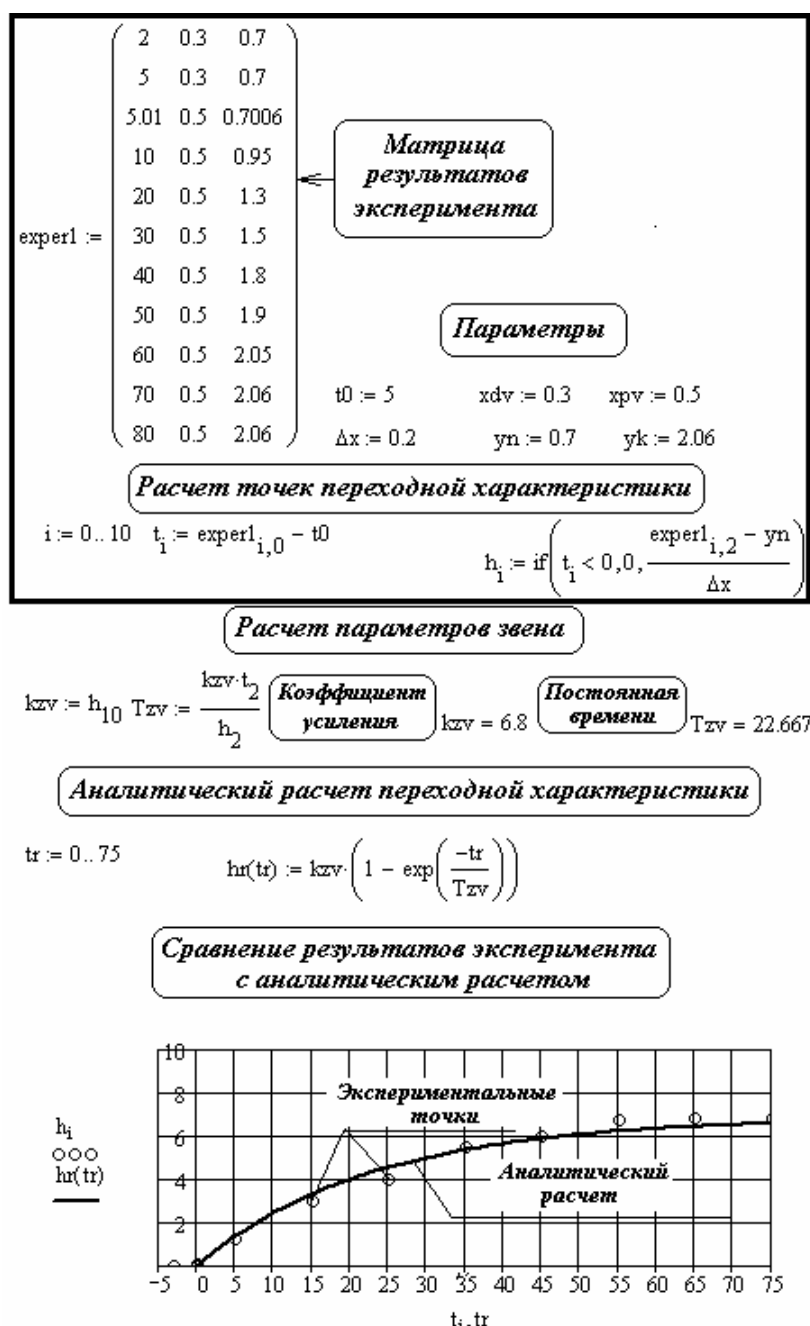


Рис. 3.1. Пример фрагмента программы в Mathcad для выполнения отчета

В фрагменте взята в рамку часть программы применима для обработки любого эксперимента для любого звена. Отличаться программы будут нижней частью, в которой будут другие выражения для определения параметров звеньев, а также будут другие графики.

Таким образом, в данном разделе достаточно подробно изложен пример создания отчета по первой части первой лабораторной работы. Для остальных разделов и лабораторных работ рекомендуется программу Mathcad в файле «Отчет.mcd» продолжить. Тогда в каждом случае потребуются только введение численных значений элементов новых матриц результатов экспериментов, а все ранее составленные программы и результаты их работы с со-

хранением имен переменных могут быть использованы в расчетах при оформлении отчетов последующих лабораторных работ.

Кроме того, следует заметить, что опытный программист редко начинает программировать с чистого листа. Современным прогрессивным методом программирования является модификация или расширение программы с максимальным использованием опции «Копирование» из элементов ранее созданной.

#### 4. КАТАЛОГ ПРОГРАММ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА

В каталоге «ПРОГРАММЫ» содержатся 10 файлов прикладных программ лабораторного практикума. Ниже в табл. 4.1 приведены имена файлов и краткое описание содержания программ.

Таблица 4.1

|    | Имя файла                                                         | Содержание программы                                                                                                                                                                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Элементарное звено.mcd                                            | По представленным результатам опытов определение вида звена, расчет и построение переходной характеристики и параметров элементарного динамического звена.                                                                                         |
| 2  | Элементарное звено КЧХ.mcd                                        | По представленным графикам результатов опытов расчет и построение точек комплексной частотной характеристики элементарных звеньев                                                                                                                  |
| 3  | Последовательное соединение И и А звеньев 1.mcd                   | По представленным графикам результатов опытов расчет и построение переходной характеристики схемы последовательного соединения И и А звеньев..                                                                                                     |
| 4  | Последовательное соединение И и А звеньев 2.mcd                   | По представленным графикам результатов опытов расчет и построение точек комплексной частотной характеристики схемы последовательного соединения И и А звеньев.                                                                                     |
| 5  | Последовательное соединение И и А звеньев с обратной связью 1.mcd | Расчет и построение по представленным графикам результатов опытов переходной характеристики схемы последовательного соединения И и А звеньев с обратной связью.<br>Анализ влияния параметра интегрирующего звена на характер переходных процессов. |
| 6  | Последовательное соединение И и А звеньев с обратной связью 2.mcd | Расчет и построение по представленным графикам результатов опытов точек комплексной частотной характеристики схемы последовательного соединения И и А звеньев с обратной связью.                                                                   |
| 7  | Параллельное соединение П и И звеньев 1.mcd                       | Расчет и построение по представленным графикам результатов опытов переходной характеристики схемы параллельного соединения П и И звеньев.                                                                                                          |
| 8  | Параллельное соединение П и И звеньев 2.mcd                       | Расчет и построение по представленным графикам результатов опытов точек комплексной частотной характеристики схемы параллельного соединения П и И звеньев                                                                                          |
| 9  | Комбинированное соединение 1.mcd                                  | Исследование устойчивости и настройка параметров интегрирующего и пропорционального звена с использованием частотного критерия Найквиста.                                                                                                          |
| 10 | Комбинированное соединение 2.mcd                                  | Изучение влияния параметров интегрирующего и пропорционального звена на характер переходных процессов.                                                                                                                                             |

## 5. ОПИСАНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

В пятом разделе лабораторного практикума приводятся описания шести лабораторных работ, включающих в себя практическое изучение временных и частотных характеристик элементарных динамических звеньев и их соединений, а также изучение и экспериментальное исследование основных положений устойчивости динамических систем.

**ВНИМАНИЕ! Общие положения теории автоматического управления, необходимые для выполнения всего цикла лабораторных работ изложены во втором разделе лабораторного практикума. Параграфы второго раздела, конкретно относящиеся к выполняемой лабораторной работе, указываются непосредственно по тексту описания лабораторных работ.**

### 5.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

#### Экспериментальное определение кривых разгона и переходных характеристик элементарных динамических звеньев

*Цель работы.* Приобретение навыков проведения и обработки экспериментов по определению переходных характеристик элементарных динамических звеньев. Определение вида и параметров звена. Сравнение переходных характеристик звеньев, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Для изучения предлагаются следующие звенья:

П-звено (пропорциональное звено);

И-звено (интегрирующее звено);

А-звено (апериодическое звено);

РД-звено (реальное дифференцирующее звено);

З-звено (запаздывающее звено).

Виды звеньев и число опытов при определении динамических характеристик определяются преподавателем.

#### 5.1.1. Вопросы для коллоквиума

1. Дайте определения функциям  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $h(t)$ ,  $W(s)$ .
2. Изобразите структурную схему динамической системы и расскажите последовательность процедур управления.
3. Чем отличается ручное управление от автоматического управления?
4. Для чего автоматизируют технологические процессы?
5. Какие виды автоматического управления Вы знаете? Где они применяются?
6. Что такое тестовое ступенчатое входное воздействие, для чего оно используется и как выполняется на практике.

7. Из каких элементов состоит и как работает система регулирования температуры горячей воды на водогрейном котле?
8. В чем состоит проблема синтеза и анализа системы управления?
9. С какими проблемами мы сталкиваемся при синтезе и анализе объектов управления в теплоэнергетике?
10. Дайте определение кривой разгона и переходной характеристики. Как их получить экспериментально?
11. Приведите математическое описание входного воздействия в виде ступенчатой функции.
12. Как с использованием дифференциального уравнения получить аналитическое выражение переходной характеристики динамического звена?
13. В чем различие режимов работы программы Mathcad «Automatic Calculation» и «Calculation»?
14. Приведите порядок работы с опцией «Trace» в программе Mathcad.
15. Приведите порядок установки в программу Mathcad и снятия файла прикладной программы с задачей.
16. Расскажите порядок настройки шаблона графика в программе Mathcad.

#### 5.1.2. Задание на работу

*Цель задания.* Приобретение навыков обработки результатов экспериментов по определению переходных характеристик элементарных звеньев. Определение вида и параметров звена. Сравнение переходных характеристик, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Виды звеньев и число опытов при определении динамических характеристик определяются преподавателем.

#### 5.1.3. Порядок выполнения задания

Перед началом работы:

- получите у преподавателя список предлагаемых к изучению звеньев;
- выясните у преподавателя требуемое число опытов при экспериментальном определении динамических характеристик;
- выясните у преподавателя номер Вашего варианта;
- откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Элементарное звено.mcd».

**ВНИМАНИЕ! По номеру варианта программа выберет и установит параметры звеньев, которые будут устанавливаться во всех программах лабораторного практикума при введении номера Вашего варианта.**

**Определенные из эксперимента в настоящем задании значения параметров, будут использованы во всех последующих расчетах.**

1. Введите номер Вашего варианта, установите курсор в поле «Вид звена» и нажмите клавишу F9.

В окне интерфейса программы появятся графики входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  переменных.

**ВНИМАНИЕ! Программа случайным образом установит вид звена и выведет результаты эксперимента.**

По виду графиков определите вид элементарного динамического звена. (Для справки см. второй столбец таблицы динамических характеристик элементарных звеньев в Приложении 1.)

Если установленное программой звено Вам не требуется для изучения, еще раз установите курсор в поле «Вид звена» и нажмите клавишу F9.

**ВНИМАНИЕ! Для выбранного звена программа случайным образом устанавливает начальные значения входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  переменных и величину ступенчатого возмущения  $\Delta x$ . Это результаты опыта по определению кривой разгона – реакции звена на ступенчатое входное воздействие. Кривая разгона зависит от параметров звена и величины входного воздействия. Убедитесь в этом. Установите курсор в поле «Вывод» и нажмите клавишу F9. Вы увидите результаты опыта на установленном звене для другого ступенчатого возмущения.**

**Вашей задачей является получение из кривой разгона переходную характеристику. Переходная характеристика зависит только от параметров звена и не зависит от входного возмущения.**

2. Подготовьте форматы таблиц для записи результатов исследования выбранного динамического звена (см. табл. 5.1.1, 5.1.2 и 5.1.3).

3. По графикам с экрана монитора определите момент времени подачи ступенчатого возмущения:

- на графике найдите момент времени подачи возмущения  $t_0$ ;
- введите  $t_0$  в поле инициативного ввода времени (красное поле) и нажмите клавишу F9;
- ориентируясь по показаниям инициативного вывода  $x(t)$  и изменяя с шагом 1, 0,1 и 0,01 с время, определите с точностью 0,01 с. и запишите в табл. 5.1.1 момент первого отличного от нуля значения сигнала на входе звена после внесения ступенчатого возмущения  $t_0$  ;
- из графиков определите значения на входе и выходе звена до и после подачи возмущения и запишите их в табл. 5.1.1 и 5.1.2.
- вычислите и запишите в табл. 5.1.1 величину возмущения  $\Delta x$ .

4. Последовательно устанавливая в блок инициативного ввода время и считывая в блоке инициативного вывода значения входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  переменных, запишите в таблицу 5.1.3 10 ÷ 12 экспериментальных точек. Для всех точек кроме первых трех шаг по времени выбирать кратным – 8 ÷ 10 с.

## Результаты оперативного анализа результатов эксперимента

### Характеристика ступенчатого возмущения на входе звена

Таблица 5.1.1

|                                                                      |  |
|----------------------------------------------------------------------|--|
| Момент времени внесения возмущения $t_0$ , с                         |  |
| Сигнал на входе звена до подачи возмущения $x(t, < t_0)$ , ед.вх.    |  |
| Сигнал на входе звена после подачи возмущения $x(t, > t_0)$ , ед.вх. |  |
| Величина возмущения $\Delta x = x(t, > t_0) - x(t, < t_0)$ , ед.вх.  |  |

### Характеристика переходного процесса на выходе звена

Таблица 5.1.2

|                                                         |  |
|---------------------------------------------------------|--|
| Начальное значение $y_{нач} = y(t_0)$ , ед.вых          |  |
| Установившееся значение (если есть) $y_{уст}$ , ед.вых. |  |

### Полученные из эксперимента точки кривой разгона

Таблица 5.1.3

|                    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Время $t_j$ , с    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $x(t_j)$ , ед.вх.  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $y(t_j)$ , ед.вых. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**ВНИМАНИЕ!** Для получения достоверной информации о динамических свойствах звена обязательно внести в таблицу 1 точку до подачи возмущения, в момент подачи ступенчатого возмущения (точку в момент времени  $t_0$ ) и точку в момент времени  $t_0 + 0,01$  с.

5. Если по заданию требуется определение более чем один переходный процесс, установите курсор в поле «Вывод» и повторите п.п. 1 ÷ 4.
6. После анализа и записи в таблицы результатов экспериментов заданного звена, приступайте к исследованию следующего звена. Для вызова нового звена, установите курсор в поле «Вид звена» и повторите п. п. 1 ÷ 5.

#### 5.1.4 Требования к отчету

Отчет должен быть оформлен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего практикума и содержать следующие пункты:

1. Титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей;
2. Цель задания на работу;
3. Структурную схему эксперимента;
4. Таблицы экспериментальных данных по всем исследованным звеньям;
5. Расчетные формулы обработки экспериментальных данных;
6. Аналитические формулы расчета переходных характеристик всех исследованных звеньев;
7. Графики переходных характеристик всех исследованных звеньев (можно на одних осях с масштабированием ординат);
8. Сводную таблицу параметров всех исследованных звеньев.

### 5.1.5. Рекомендации по выполнению отчета

Содержательная часть отчета с рекомендациями изложена в третьем разделе пособия.

### 5.1.6. Вопросы для защиты

1. Как по ординатам кривой разгона вычислить ординаты переходной характеристики?
2. Запишите дифференциальное уравнение и передаточную функцию П-звена.
3. Запишите дифференциальное уравнение и передаточную функцию И-звена.
4. Запишите дифференциальное уравнение и передаточную функцию А-звена.
5. Запишите дифференциальное уравнение и передаточную функцию РД-звена.
6. Запишите дифференциальное уравнение и передаточную функцию З-звена.
7. Запишите аналитическое выражение переходной характеристики И-звена.
8. Запишите аналитическое выражение переходной характеристики А-звена.
9. Запишите аналитическое выражение переходной характеристики РД-звена.
10. Запишите аналитическое выражение переходной характеристики З-звена.
11. Каким образом по переходной характеристике можно определить постоянную времени И-звена?
12. Назовите параметры А-звена и порядок их определения по кривой разгона.
13. Назовите параметры РД-звена и порядок их определения по переходной характеристике.
14. Изобразите кривую разгона и переходную характеристику З-звена.
15. Каким образом из графика переходной характеристики определить параметры А-звена?
16. Каким образом, зная дифференциальное уравнение линейной динамической системы, записать ее передаточную функцию?
17. Дайте общие сведения об интегральном преобразовании Лапласа и области его применения.
17. Дано дифференциальное уравнение  $30 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2 \cdot x(t)$ , получите его решение для  $y(0) = 0$  и ступенчатого возмущения  $x(t) = 3 \cdot 1(t)$ .

18. Какие виды элементарных динамических звеньев Вы знаете? Почему они называются элементарными?

19. Нарисуйте качественно переходную характеристику апериодического звена с параметрами  $k_A = 3 \text{ ед.вых./ед.вх.}$  и  $T_A = 25 \text{ с.}$

20. Нарисуйте качественно переходную характеристику интегрирующего звена с постоянной времени  $T_{\text{и}} = 15 \text{ с.}$

21. Даны  $T_{\text{РД}} = 20 \text{ с}$  и  $k_{\text{РД}} = 4 \text{ ед.вых./ед.вх.}$ . Постройте кривую разгона звена для  $X = 0,5 \text{ ед.вх.}$

22. Как по графику кривой разгона и входного воздействия получить постоянную времени интегрирующего звена?

23. Что такое имитационное моделирование и для чего оно применяется?

## 5.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Экспериментальное определение частотных характеристик элементарных динамических звеньев

*Цель работы.* Приобретение навыков обработки результатов экспериментов по определению частотных характеристик элементарных звеньев. Сравнение частотных характеристик звеньев, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Для изучения предлагаются следующие звенья:

П-звено (пропорциональное звено);

И-звено (интегрирующее звено);

А-звено (апериодическое звено);

РД-звено (реальное дифференцирующее звено);

З-звено (запаздывающее звено).

Виды звеньев и число опытов при определении динамических характеристик определяются преподавателем.

#### 5.2.1. Вопросы для коллоквиума

1. Дайте определение комплексной частотной характеристики динамической системы (КЧХ).

2. Дайте определение амплитудной частотной характеристики динамической системы (АЧХ).

3. Дайте определение фазовой частотной характеристики динамической системы (ФЧХ).

4. Как по графикам АЧХ и ФЧХ построить годограф комплексной частотной характеристики.

5. Как аналитически построить годограф КЧХ, если известно дифференциальное уравнение динамического звена.

6. Перечислите последовательность эксперимента по определению частотных характеристик динамической системы.

7. Что означает термин “Отставание по фазе”? “Опережение по фазе”?
8. Как по осциллограммам гармонических колебаний на входе и выходе динамической системы определить фазовый сдвиг колебаний в угловых градусах?
9. Дайте понятие интегрального преобразования Лапласа и передаточной функции.
10. Дайте понятие интегрального преобразования Фурье и аналитического выражения для частотных характеристик.
11. Как в программе Mathcad по известной передаточной функции вычислить ординаты переходной характеристики?

### 5.2.2. Задание на работу

Расчет и построение по результатам экспериментов комплексных частотных характеристик элементарных динамических звеньев.

*Цель работы.* Приобретение навыков определения вида звена, подбора частот гармонических колебаний для получения представительных точек комплексной частотной характеристики (КЧХ) элементарных динамических звеньев. Сравнение полученных из эксперимента КЧХ с результатами аналитических расчетов.

Виды звеньев и число требуемых для построения КЧХ экспериментальных точек задаются преподавателем.

### 5.2.3. Порядок выполнения задания

Перед началом работы:

- получите у преподавателя список предлагаемых к изучению звеньев (обычно это звенья, для которых изучены переходные характеристики);
- откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем заданного для исследования звена «Элементарное звено КЧХ.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

В интерфейсном окне программы появятся графики гармонических колебаний на входе и выходе испытываемого звена.

2. Сделайте анализ графиков. Проверьте соответствие периода колебаний  $T_D$  установленной частоте  $\omega$ .

**ВНИМАНИЕ! Для того, чтобы быстро и качественно выполнить работу внимательно прочитайте нижеприведенные пояснения.**

Предметом изучения динамических систем частотным методом является исследование зависимости амплитуды и фазы колебаний на выходе от периода (частоты) подаваемых на вход колебаний. На рис. 5.1 показана известная из тригонометрии связь фазы гармонических колебаний с точками круговой диаграммы для колебаний на входе и на выходе динамического звена.

Для любого момента времени, например, точки на круговой диаграмме  $a$  и  $a'$  или  $b$  и  $b'$  разнесены на угол  $\varphi$ , который характеризует фазовый сдвиг колебаний в угловых градусах или радианах. Если известна частота  $\omega$ , то фазовый сдвиг

может быть вычислен из выражения  $\varphi = \omega \times \Delta t$ , где  $\Delta t$  – интервал времени между одинаковыми фазовыми состояниями входных и выходных колебаний (см. на рис. 5.1). Следует заметить, что фазовый сдвиг в угловых градусах легко определить из графиков гармонических колебаний, в которых четко просматривается период (360 угловых градусов или  $2\pi$  радиан) и его доли. Остается сопоставить временной интервал  $\Delta t$  с долей периода.

Фазовый сдвиг выходных колебаний относительно входных появляется из-за инерционности динамических систем. Попробуйте изменить частоту колебаний, например, на  $\pm 10 \div 20\%$ , и Вы увидите, что амплитуда и фазовый сдвиг колебаний на выходе звена изменятся.

Если в круговой диаграмме зафиксировать точку  $a$  или  $b$  на правой положительной полуоси, то при постоянной частоте вектор, направленный из центра до точки выходных колебаний будет ориентирован на угол  $\varphi$  (на рис. 11 со знаком минус), а длина его определяется амплитудой выходных колебаний. Как Вы видели, при изменении частоты амплитуда и фазовый сдвиг колебаний на выходе звена изменяются, и соответственно угол  $\varphi$  и длина вектора изменяются. При отставании выходных колебаний от входных угол  $\varphi$  будет отрицательным, а при опережении (предварении), – положительным. Эта предпосылка лежит в основе частотного метода исследования динамических систем.

Отношение амплитуды выходных колебаний  $A_y$  к амплитуде входных  $A_x$  является значением амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) на данной частоте, а угол  $\varphi$  – значением фазо-частотной характеристики (ФЧХ), которые вместе представляют комплексную частотную характеристику (КЧХ).

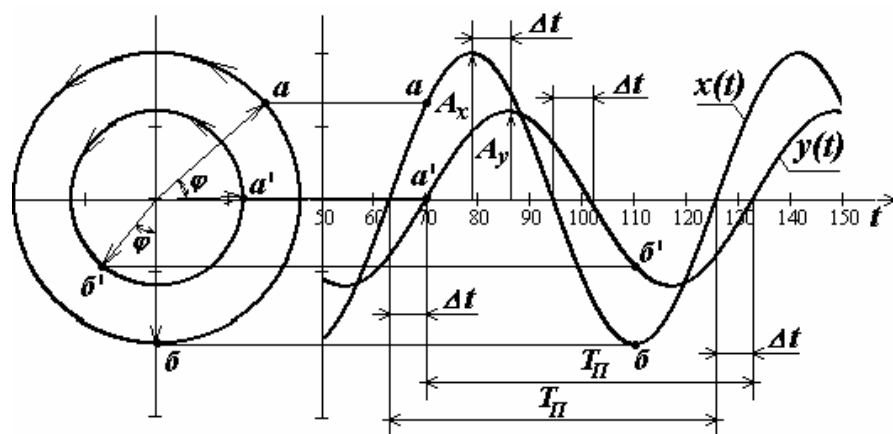


Рис. 5.1. К пояснению комплексной частотной характеристики

Экспериментальное получение частотных характеристик существенно сложнее, чем получение переходных характеристик. Если аргументом переходной характеристики является время, весь диапазон изменения которого заложен в одном экспериментальном графике, то аргументом частотной характеристики является частота колебаний на входе и выходе звена. В результате одного опыта по фазовому сдвигу и отношению амплитуд может быть определена только одна точка КЧХ.

При экспериментальном определении частотных характеристик всегда возникает проблема выбора частоты. В отличие от аргумента времени аргумент частоты может изменяться от нуля до бесконечности. Однако практически такой широкий частотный диапазон не требуется. Значения частот и диапазон их изменения зависят от цели экспериментирования и характера КЧХ.

В лабораторной работе по виду колебаний предлагается качественно по отношению амплитуд и фазовому сдвигу оценить расположение на комплексной плоскости точки КЧХ. Сопоставив найденную точку с КЧХ в таблице динамических характеристик (см. Табл. 2), выдвинуть гипотезу о виде звена. Для верности, изменив в любую сторону частоту, можно проверить гипотезу. Затем, найдя требуемое звено, сделать точную количественную оценку значимых экспериментальных точек КЧХ и внести их в таблицу 5.2.

В данном случае под значимыми точками понимаются такие точки, по которым можно определить общий вид и удобно построить КЧХ звена. Например, для А-, РД- и З-звена это точки равномерно распределенные по углам (рекомендуется выбирать углы 30, 45, 60, 90, 180 угловых градусов); для И-звена – по длине вектора КЧХ (рекомендуется выбирать частоты, для которых значения АЧХ не более двух ед.вых./ед.вх.); а колебания на выходе П-звена от частоты не зависят. П-звено – безинерционное.

### 3. Выберите вид динамического звена:

- сделайте грубую оценку колебаний и выберите вид звена в соответствии с четвертой колонкой таблицы динамических характеристик элементарных звеньев, (при необходимости корректируйте частоту в любую сторону);
- если установленное программой звено Вам не требуется, установите курсор в поле «Вид звена», нажмите клавишу F9; снова сделайте грубую оценку графиков, также при необходимости корректируя частоту в нужную сторону.

**ВНИМАНИЕ! Первым следует искать апериодическое звено. Значимые частоты для его значимых точек КЧХ будут использованы для всех остальных звеньев.**

### 4. Если апериодическое звено найдено:

- заготовьте формат таблицы 5.2.1;
- последовательно, в соответствии с вышеприведенными рекомендациями подберите частоты для трех значимых точек КЧХ.
- для каждой точки точно, с использованием опции «Trace» определите  $\Delta t$ , сделайте требуемые расчеты и заполните таблицу 5.2.1.

5. Повторите п.п. 3 и 4 и определите экспериментальные точки КЧХ других заданных динамических звеньев (эксперименты проводить для частот, найденных для апериодического звена).

Таблица 5.2.1

| Частота, $\omega$                                                               | радиан/с      | 0 |  |  |  | $\infty$ |
|---------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|--|--|--|----------|
| Сдвиг колебаний выхода, $\Delta t$                                              | секунд        |   |  |  |  |          |
| ФЧХ, $\varphi(\omega)$                                                          | радиан        |   |  |  |  |          |
| АЧХ, $A(\omega) = A_y(\omega)/A_x(\omega)$                                      | ед.вых/ед.вх. |   |  |  |  |          |
| Вещественная часть КЧХ<br>$\text{Re}(\omega) = A(\omega) \cos[\varphi(\omega)]$ | ед.вых/ед.вх. |   |  |  |  |          |
| Мнимая часть КЧХ<br>$\text{Im}(\omega) = A(\omega) \sin[\varphi(\omega)]$       | ед.вых/ед.вх. |   |  |  |  |          |

### 5.2.3. Требования к отчету

Отчет должен содержать титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей и выполнен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего пособия и содержать следующие пункты:

- 1.Цель задания на работу;
- 2.Структурную схему эксперимента;
- 3.Заполненные таблицы формата 5.2.1 всех исследованных звеньев;
- 4.Расчетные формулы обработки экспериментальных данных;
- 5.Таблицу аналитических выражений частотных динамических характеристик (дифференциальное уравнение, передаточная функция, аналитическое выражение КЧХ, АЧХ и ФЧХ) для всех исследованных звеньев;
- 6.Аналитически рассчитанные графики годографов КЧХ для исследованных звеньев с нанесением на них экспериментальных точек. В аналитических расчетах использовать параметры звеньев, найденные из экспериментов в первой работе.

### 5.2.4. Рекомендации по выполнению расчетов в отчете

Расчеты комплексных чисел и функций наиболее удобен в программе Mathcad. Для этого в программе только требуется объявить комплексный аргумент (задать признак мнимости для аргумента). Далее записать собственную пользовательскую функцию от частоты  $\omega$ , и пользуясь встроенными функциями производить вычисления.

Для графиков КЧХ следует устанавливать оси одинаковой размерности, т.к. мнимая и вещественная их части имеют одинаковую размерность.

Размер графиков КЧХ следует выбирать не менее формата А5.

Ниже показан фрагмент программы и рекомендуемый вид графика КЧХ в уменьшенном виде. На рис.5.2 показаны вид пользовательской функции, матрицы полученных из эксперимента вещественных и мнимых частей КЧХ и вид графика КЧХ.

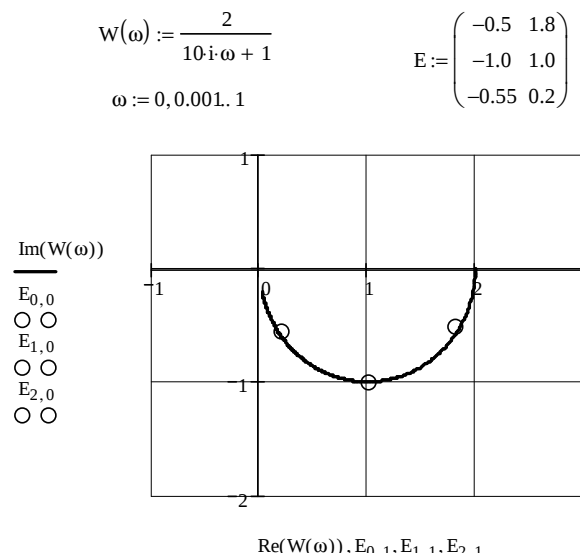


Рис. 5.2. Пример расчета комплексной частотной характеристики

### 5.2.5. Вопросы для защиты

1. Как по известной передаточной функции аналитическим способом построить годограф комплексной частотной характеристики (КЧХ)?
2. Дайте общие сведения об интегральном преобразовании Фурье и области его применения.
3. Назовите формы аналитической записи комплексной частотной характеристики (КЧХ).
4. Как по КЧХ динамической системы определить АЧХ и ФЧХ и наоборот?
5. Расскажите порядок проведения эксперимента для оценки комплексной частотной характеристики динамической системы.
6. Как определяется знак фазового сдвига при экспериментальном определении фазовой частотной характеристики?
7. Что представляет собой КЧХ, ФЧХ и АЧХ П-звена?
8. В каком квадранте комплексной плоскости расположена КЧХ А-звена?
9. Сколько квадрантов комплексной плоскости проходит годограф КЧХ З-звена при изменении частоты от нуля до бесконечности?
10. Изобразите КЧХ, АЧХ и ФЧХ И-звена.
11. Какой знак имеет фазовый сдвиг выходных гармонических колебаний А-звена относительно входных?
12. Какой знак имеет фазовый сдвиг выходных гармонических колебаний РД-звена относительно входных?
13. Как зависит от частоты фазовый сдвиг выходных гармонических колебаний относительно входных для И-звена?
14. Почему фазовый сдвиг для З-звена с увеличением частоты линейно возрастает?
15. В каком квадранте комплексной плоскости расположена КЧХ РД-звена?

### 5.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

#### Экспериментальное определение динамических характеристик параллельного соединения элементарных звеньев

*Цель работы.* Изучение переходных и частотных характеристик схем параллельного соединения элементарных звеньев. Исследование влияния параметров звеньев на динамические характеристики соединения. Сравнение переходных и частотных характеристик соединения, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Для изучения предлагается схема параллельного соединения пропорционального и интегрирующего звена, экспериментальные и частотные характеристики которых экспериментально и аналитически были определены в первой и второй работах.

**ВНИМАНИЕ! В данной лабораторной работе предлагается исследовать динамические характеристики схемы параллельного соединения пропорционального и интегрирующего звеньев. Параметры этих звеньев следует брать из отчетов первой и второй лабораторных работ.**

Число опытов при определении переходных характеристик и число точек комплексных частотных характеристик соединения определяются преподавателем.

#### 5.3.1. Вопросы для коллоквиума

1. Нарисуйте структурную схему параллельного соединения нескольких динамических звеньев.
2. Как преобразовать структурную схему и передаточную функцию параллельного соединения в структурную схему и передаточную функцию одного сложного звена?
3. Как аналитически рассчитать ординаты переходной характеристики для параллельного соединения звеньев?
4. Сформулируйте правило алгебраического преобразования передаточных функций для параллельного соединения звеньев.
5. Расскажите порядок определения точек для нескольких частот на комплексной плоскости для двух параллельно соединенных И-звена и А-звена.
6. Расскажите порядок определения точек для нескольких частот на комплексной плоскости для двух параллельно соединенных И-звена и П-звена.
7. Расскажите порядок определения точек для нескольких частот на комплексной плоскости для двух параллельно соединенных З-звена и П-звена.

### 5.3.2. Порядок выполнения работы

Задание 1. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер переходных характеристик схемы их параллельного соединения.

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Параллельное соединение.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

2. Найдите в отчете первой работы параметры  $K_{II}$  и  $T_{II}$ , введите их и нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики изменения сигналов на входе и выходе испытываемой схемы соединения.

3. Сделайте анализ графиков и качественно нарисуйте его в протоколе испытаний.

4. По методике, изложенной в лабораторной работе № 1, определите момент времени подачи ступенчатого возмущения, характеристики возмущения и переходного процесса на выходе соединения.

5. Подготовьте форматы таблиц для записи результатов исследования схемы соединения такие же, как в первой работе (см. табл. 5.1.1, 5.1.2 и 5.1.3), и внесите в таблицы требуемые характеристики и ординаты графиков переходных процессов на входе и выходе исследуемого соединения.

6. Установите значения параметров  $K_{II1} = 0,8 \times K_{II}$  и  $T_{II1} = 1,2 \times T_{II}$  и повторите п. п. 2 ÷ 5.

7. Установите значения параметров  $K_{II2} = 1,2 \times K_{II}$  и  $T_{II2} = 0,8 \times T_{II}$  и повторите п. п. 2 ÷ 5.

Задание 2. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер частотных характеристик схемы их параллельного соединения.

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Параллельное соединение КЧХ.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

2. Найдите в отчете первой работы и установите параметры пропорционального и интегрирующего звеньев  $K_{II}$  и  $T_{II}$ .

3. Возьмите из табл. 5.2. отчета по второй работе минимальную значимую частоту исследования апериодического звена, введите ее в программу и нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики колебаний на входе и выходе испытываемой схемы соединения.

4. Пользуясь освоенной во второй работе методикой (п. 5.2.4), определите для этой частоты значения АЧХ и ФЧХ и внесите их во второй столбец таблицы формата 5.2.1.

5. Повторить п. 4 для других, принятых в качестве значимых для апериодического звена частот. Значения частот, АЧХ и ФЧХ внесите в столбцы таблицы формата 5.2.1.

6. Установите значения параметров  $K_{II1} = 0,8 \times K_{II}$  и  $T_{II1} = 1,2 \times T_{II}$  и повторите п. п. 3 и 5.

7. Установите значения параметров  $K_{II2} = 1,2 \times K_{II}$  и  $T_{II2} = 0,8 \times T_{II}$  и повторите п. п. 3 и 5.

### 5.3.3. Требования к отчету

Отчет должен содержать титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей, выполнен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего пособия и содержать следующие пункты:

- 1 Цель задания на работу;
- 2 Структурную схему соединения;
- 3 Заполненные таблицы форматов 4.1, 4.2, 4.3 и 5.2. для трех наборов параметров звеньев в схеме параллельного соединения;
- 4 Расчетные формулы обработки экспериментальных данных;
- 5 Таблицу аналитических выражений для расчета переходных и частотных динамических характеристик (дифференциальное уравнение, передаточная функция, аналитическое выражение переходной характеристики, КЧХ, АЧХ и ФЧХ) для схемы параллельного соединения пропорционального и интегрирующего звена;
- 6 Аналитически рассчитанные графики переходных процессов и годографов КЧХ с нанесенными на них экспериментальными точками для схемы параллельного соединения, а также переходных процессов и годографов КЧХ для пропорционального и интегрирующего звена (из отчетов первой и второй работ).

### 5.3.4. Рекомендации по выполнению расчетов

При выполнении расчетов и оформлении отчета рекомендуется следовать рекомендациям для первой и второй работ. Расчеты желательно производить в прикладной программе Mathcad, используя результаты всех ранее произведенных расчетов и при необходимости создавая методом копирования новые программные фрагменты.

### 5.3.5. Вопросы для защиты

1. Качественно построить график переходной характеристики для параллельно соединенных интегрирующих звеньев с постоянными времени 10 и 20 с.
2. Параллельно соединены пропорциональное звено с коэффициентом передачи 2 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 20 с. Чему равна мнимая составляющая точки КЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?
3. Параллельно соединены пропорциональное звено с коэффициентом передачи 3 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 40 с. Чему равно значение АЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?
4. Как определить постоянную времени интегрирующего звена, если известно, что это звено включено в схему параллельного соединения вместе с апериодическим звеном?
5. Определите постоянную времени интегрирующего звена соединенного параллельно с другим интегрирующим звеном, имеющим постоянную

ную времени 20 с, если известно значение переходной характеристики схемы соединения для времени  $t=100$  с.

6. Как построить годограф КЧХ для параллельного соединения звеньев если заданы годографы КЧХ звеньев схемы ?

7. Как аналитически определяется КЧХ для параллельного соединения известных звеньев ?

8. Можно ли определить переходную характеристику параллельного соединения звеньев по известным для этих звеньев КЧХ ?

#### 5.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

##### Экспериментальное определение динамических характеристик последовательного соединения элементарных динамических звеньев

*Цель работы.* Изучение переходных и частотных характеристик схем последовательного соединения элементарных звеньев. Исследование влияния постоянной времени интегрирующего звена  $T_{II}$  на динамические характеристики соединения. Сравнение переходных и частотных характеристик звеньев, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Для изучения предлагается схема последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев, частотные характеристики которых экспериментально и аналитически были определены в первой и второй работах.

**ВНИМАНИЕ! В данной лабораторной работе предлагается исследовать динамические характеристики схемы последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев. Постоянную времени интегрирующего звена и частоты для исследования следует брать из отчетов первой и второй лабораторных работ.**

Число опытов при определении переходных характеристик и число точек комплексных частотных характеристик определяются преподавателем.

##### 5.4.1. Вопросы для коллоквиума

1. Нарисуйте структурную схему последовательного соединения нескольких динамических звеньев.

2. Как преобразовать структурную схему и передаточную функцию последовательного соединения в структурную схему и передаточную функцию одного сложного звена?

3. Сформулируйте правило алгебраического преобразования передаточных функций для последовательного соединения звеньев.

4. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, И-звена и А-звена).

5. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, И-звена и И-звена).

6. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, З-звена и П-звена).

7. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух и для трех последовательно соединенных А-звеньев.

#### 5.4.2. Порядок выполнения работы

Задание 1. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер переходных характеристик их последовательного соединения.

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Последовательное соединение.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

2. Найдите в отчете первой работы постоянную времени  $T_{II}$  для интегрирующего звена, введите ее и нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики изменения сигналов на входе и выходе испытываемой схемы соединения.

3. Сделайте анализ графиков и качественно нарисуйте его в протоколе испытаний.

4. По методике, изложенной в лабораторной работе №1, (п. 4.2.3), определите момент времени подачи ступенчатого возмущения, характеристики возмущения и переходного процесса на выходе схемы соединения.

5. Подготовьте форматы таблиц для записи результатов исследования схемы соединения такие же, как в первой работе (см. табл. 4.1, 4.2 и 4.3), и внесите в таблицы требуемые характеристики и графики переходных процессов на входе и выходе исследуемой схемы соединения.

6. Установите для интегрирующего звена значение постоянной времени  $T_{II1} = 0,5 \times T_{II}$  и повторите п. п. 2 ÷ 5.

7. Установите для интегрирующего звена значение постоянной времени  $T_{II2} = 0,2 \times T_{II}$  и повторите п. п. 2 ÷ 5.

Задание 2. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер частотных характеристик схемы их последовательного соединения.

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Последовательное соединение КЧХ.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

2. Установите постоянную времени  $T_{II}$  для интегрирующего звена.

3. Возьмите из табл. 5.2.1 отчета по второй работе минимальную значимую частоту исследования апериодического звена, введите ее в программу и

нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики колебаний на входе и выходе испытываемой схемы соединения

4. Пользуясь освоенной во второй работе методикой (п.4), определите для этой частоты значения АЧХ и ФЧХ и внесите их во второй столбец таблицы формата 5.2.1.

5. Повторить п. 4 для других, принятых в качестве значимых для апериодического звена частот. Значения частот, АЧХ и ФЧХ внесите в столбцы таблицы формата 5.2.1.

6. Установите значения параметра  $T_{И1} = 0,5 \times T_{И}$  и повторите п. п. 3 и 5.

7. Установите значения параметра  $T_{И2} = 0,2 \times T_{И}$  и повторите п. п. 3 и 5.

#### 5.4.3. Требования к отчету

Отчет должен содержать титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей, выполнен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего пособия и содержать следующие пункты.

1. Цель задания на работу;
2. Структурную схему соединения;
3. Заполненные таблицы форматов 4.1, 4.2, 4.3 и 5.2. для трех наборов параметров звеньев в схеме последовательного соединения;
4. Расчетные формулы обработки экспериментальных данных;
5. Таблицу аналитических выражений для расчета переходных и частотных динамических характеристик (дифференциальное уравнение, передаточная функция, аналитическое выражение переходной характеристики, КЧХ, АЧХ и ФЧХ) для схемы последовательного соединения апериодического и интегрирующего звена;
6. Аналитически рассчитанные графики переходных процессов и годографов КЧХ с нанесенными на них экспериментальными точками для схемы последовательного соединения, а также переходных процессов и годографов КЧХ для апериодического и интегрирующего звена (из отчетов первой и второй работ).

#### 5.4.4. Рекомендации по оформлению отчета и выполнению расчетов

При выполнении расчетов и оформлении отчета рекомендуется следовать рекомендациям третьего раздела. Расчеты желательно проводить в прикладной программе Mathcad, используя результаты всех ранее произведенных расчетов и при необходимости создавать новые программные фрагменты методом копирования.

#### 5.4.5. Вопросы для защиты

1. Качественно построить график переходной характеристики для последовательно соединенных интегрирующего звена с постоянной времени 10 с и запаздывающего звена с временем запаздывания 20 с.

2. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, И-звена и А-звена).

3. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, двух И-звеньев).

4. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев, (например, З-звена и А-звена).

5. Последовательно соединены пропорциональное звено с коэффициентом передачи 2 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 20 с. Чему равна мнимая составляющая точки КЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?

6. Последовательно соединены пропорциональное звено с коэффициентом передачи 3 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 40 с. Чему равно значение АЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?

7. Как определить постоянную времени интегрирующего звена, если известно, что это звено включено в схему последовательного соединения вместе с пропорциональным звеном?

8. Как построить годограф КЧХ для последовательного соединения если заданы годографы КЧХ входящих в соединение звеньев ?

9. Как аналитически определяется КЧХ для последовательного соединения известных звеньев ?

10. Как аналитически рассчитать переходную характеристику последовательного соединения звеньев по известным для этих звеньев аналитическим выражениям КЧХ ?

## 5.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### Экспериментальное определение динамических характеристик последовательного соединения элементарных звеньев с обратной связью

*Цель работы.* Изучение переходных и частотных характеристик последовательного соединения элементарных звеньев с отрицательной обратной связью. Исследование влияния постоянной времени интегрирующего звена  $T_{II}$  на динамические характеристики соединения. Сравнение переходных и частотных характеристик звеньев, полученных из эксперимента и аналитическим расчетом.

Для изучения предлагается схема последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев, частотные характеристики которых экспериментально и аналитически были определены в первой и второй работах.

Число опытов при определении переходных характеристик и число точек комплексных частотных характеристик определяются преподавателем.

**ВНИМАНИЕ! В данной лабораторной работе предлагается исследовать динамические характеристики схемы последовательного соединения интегрирующего и апериодического звеньев с обратной связью. Постоянную времени интегрирующего звена и частоты для исследования следует брать из отчетов первой и второй лабораторных работ.**

#### 5.5.1. Вопросы для коллоквиума

1. Нарисуйте структурную схему последовательного соединения с отрицательной обратной связью нескольких динамических звеньев.
2. Как преобразовать структурную схему и передаточную функцию последовательного соединения с отрицательной обратной связью в структурную схему и передаточную функцию соединения?
3. Сформулируйте правило алгебраического преобразования передаточных функций для последовательного соединения звеньев с обратной связью.
4. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев с отрицательной обратной связью, (например, И-звена и А-звена).
5. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев с отрицательной обратной связью, (например, И-звена и И-звена).
6. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух последовательно соединенных звеньев с отрицательной обратной связью, (например, З-звена и П-звена).
7. Расскажите порядок определения точек на комплексной плоскости для двух и для трех последовательно соединенных А-звеньев с отрицательной обратной связью.

#### 5.5.2. Порядок выполнения работы

Задание 1. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер переходных характеристик их последовательного соединения с отрицательной обратной связью..

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Соединение с ОС.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.
2. Найдите в отчете первой работы постоянную времени  $T_{II}$  для интегрирующего звена, введите ее и нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики изменения сигналов на входе и выходе испытываемой схемы соединения.
3. Сделайте анализ графиков и качественно нарисуйте его в протоколе испытаний.
4. По методике, изложенной в первой лабораторной работе, (п. 4.2.3), определите момент времени подачи ступенчатого возмущения, характеристики возмущения и переходного процесса на выходе схемы соединения.

5. Подготовьте форматы таблиц для записи результатов исследования схемы соединения такие же, как в первой работе (см. табл. 5.1.1, 5.1.2 и 5.1.3), и внесите в таблицы требуемые характеристики и графики переходных процессов на входе и выходе исследуемой схемы соединения.

6. Установите для интегрирующего звена значение постоянной времени  $T_{И1} = 0,5 \times T_{И}$ , и повторите п. п. 2 ÷ 5.

7. Установите для интегрирующего звена значение постоянной времени  $T_{И1} = 0,2 \times T_{И}$ , и повторите п. п. 2 ÷ 5.

Задание 2. Экспериментальное изучение влияния параметров звеньев на характер частотных характеристик схемы их последовательного соединения.

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и активизируйте файл с именем «Соединение с ОС КЧХ.mcd».

1. Введите номер варианта и нажмите клавишу F9.

2. Установите постоянную времени  $T_{И}$  для интегрирующего звена.

3. Возьмите из табл. 5.2. отчета по второй работе минимальную значимую частоту исследования апериодического звена, введите ее в программу и нажмите клавишу F9. В интерфейсном окне программы появятся графики колебаний на входе и выходе испытываемой схемы соединения

4. Пользуясь освоенной во второй работе методикой (п. 4), определите для этой частоты значения АЧХ и ФЧХ и внесите их во второй столбец таблицы формата 5.2.1.

5. Повторить п. 4 для других, принятых в качестве значимых для апериодического звена частот. Значения частот, АЧХ и ФЧХ внесите в столбцы таблицы формата 5.2.1.

6. Установите значения параметра  $T_{И1} = 0,5 \times T_{И}$  оставив без изменения параметры апериодического звена и повторите п. п. 7.2.3 и 7.2.5.

7. Установите значения параметра  $T_{И2} = 0,2 \times T_{И}$  и оставив без изменения параметры апериодического звена повторите п. п. 7.2.3 и 7.2.5.

### 5.5.3. Требования к отчету

Отчет должен содержать титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей, выполнен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего пособия и содержать следующие пункты:

1. Цель задания;

2. Структурная схема соединения;

3. Заполненные таблицы форматов 4.1, 4.2, 4.3 и 5.2. для трех наборов параметров интегрирующего звена в схеме последовательного соединения с отрицательной обратной связью;

4. Расчетные формулы обработки экспериментальных данных;

5. Таблицу аналитических выражений для расчета переходных и частотных динамических характеристик (дифференциальное уравнение, передаточная функция, аналитическое выражение переходной характеристики, КЧХ,

АЧХ и ФЧХ) для схемы последовательного соединения апериодического и интегрирующего звена с отрицательной обратной связью;

6. Аналитически рассчитанные графики переходных процессов и годографов КЧХ с нанесенными на них экспериментальными точками для схемы последовательного соединения с отрицательной обратной связью, а также переходных процессов и годографов КЧХ для апериодического и интегрирующего звена (из отчетов первой и второй работ).

#### 5.5.4. Рекомендации по оформлению отчета и выполнению расчетов

При выполнении расчетов и оформлении отчета рекомендуется следовать рекомендациям третьего раздела практикума. Расчеты желательно производить в прикладной программе Mathcad, используя результаты всех ранее произведенных расчетов и при необходимости создавать новые программные фрагменты методом копирования.

#### 5.5.5. Вопросы для защиты

1. Качественно построить график переходной характеристики для последовательно соединенных с отрицательной обратной связью интегрирующего звена с постоянной времени 10 с и запаздывающего звена с временем запаздывания 20 с.

2. Последовательно соединены и охвачены отрицательной обратной связью пропорциональное звено с коэффициентом передачи 2 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 20 с. Чему равна мнимая составляющая точки КЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?

3. Последовательно соединены и охвачены отрицательной обратной связью пропорциональное звено с коэффициентом передачи 3 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 40 с. Чему равно значение АЧХ схемы соединения для частоты  $\omega=0,1$  рад./с?

4. Как определить постоянную времени интегрирующего звена, если известно, что это звено включено в схему последовательного соединения с отрицательной обратной связью вместе с пропорциональным звеном?

5. Как построить годограф КЧХ для последовательного соединения с отрицательной обратной связью если заданы годографы КЧХ входящих в соединение звеньев?

6. Как аналитически определяется КЧХ для последовательного соединения известных звеньев?

7. Можно ли определить переходную характеристику последовательного соединения с отрицательной обратной связью звеньев по известным для этих звеньев аналитическим выражениям КЧХ?

## 5.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### Экспериментальное исследование устойчивости динамических систем с обратной связью

( на примере комбинированного соединения звеньев, моделирующего автоматическую систему регулирования с ПИ-регулятором)

*Цель работы.* Экспериментальное исследование устойчивости динамической системы, представляющей комбинированное соединение элементарных звеньев с отрицательной обратной связью (рис. 5.3).

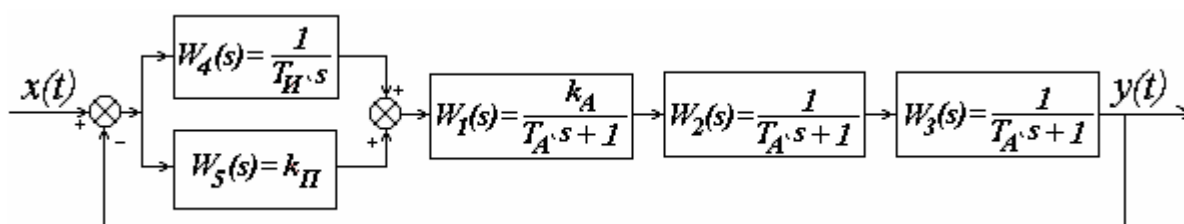


Рис. 5.3. Схема комбинированного соединения звеньев, моделирующего АСР с ПИ-регулятором

Представленное на рис. 5.3 комбинированное соединение элементарных динамических звеньев реализовано в программной среде Mathcad в виде временной имитационной модели, позволяющей получать переходные процессы по каналу:  $x(t) - y(t)$ .

Принятая для исследования структура моделирует одноконтурную автоматическую систему регулирования (АСР), в которой три последовательно соединенных А-звена являются объектом регулирования с передаточной функцией:

$$W_{ia}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s) = \frac{k_A}{(T_A \cdot s + 1)^3},$$

а параллельно соединенные П-звено и И-звено реализуют ПИ-регулятор с передаточной функцией:

$$W_p(s) = W_5(s) + W_4(s) = k_D + \frac{1}{\tilde{N}_C \cdot s}$$

и настроечными параметрами  $K_{II}$  и  $K_{II} = 1/T_I$ .

Такая реализация ПИ-регулятора может быть использована для анализа работы частных случаев: П-регулятора, при постоянной времени интегрирования  $T_I$ , стремящейся к бесконечности, и И-регулятора, при коэффициенте усиления П-звена  $K_{II}$ , равного нулю.

В работе предлагается:

1. Для своего варианта при заданных параметрах объекта регулирования  $K_A$  и  $T_A$  подобрать такие настроечные параметры регулятора  $K_{II}$  и  $T_I$ , при которых переходные процессы по каналу  $x(t) - y(t)$  имели бы вид не-

затухающих гармонических колебаний, что соответствует системе, находящейся на границе устойчивости. По рекомендациям, изложенным в задании на работу, путем подбора параметров  $K_D$  и  $T_D$  получить также переходные процессы с затухающими и расходящимися колебаниями, что соответствует устойчивой и неустойчивой АСР.

2. По виду КЧХ разомкнутой системы с использованием основных положений частотного критерия Найквиста подтвердить полученные на первом этапе результаты эксперимента, характеризующие устойчивость.

3. В соответствии с заданным запасом устойчивости (степень колебательности  $m = 0.221$ ) путем практического использования критерия Найквиста определить настроечные параметры регулятора  $K_D$  и  $T_D$ , отвечающие требованиям заданного запаса устойчивости.

4. По характеру переходных процессов в замкнутой системе (рис.5.3) экспериментально доказать объективность косвенной настройки регулятора с использованием частотного критерия Найквиста.

5. Аналитически рассчитать координаты линий границы устойчивости ( $m = 0$ ) и заданного запаса устойчивости ( $m = 0.221$ ) на плоскости параметров ПИ-регулятора (пропорционального звена  $K_D$  и интегрирующего звена  $K_I = 1/T_D$ ) и нанести на них экспериментально найденные точки.

**ВНИМАНИЕ! Теоретический материал, необходимый для подготовки и выполнения лабораторной работы № 6, а также для оформления отчета и защиты изложен в разделах 2.11 - 2.14.**

#### 5.6.1. Вопросы для коллоквиума

1. Дайте определение устойчивости динамической системы.
2. Какое движение называют свободным движением динамической системы?
3. Какое движение называют вынужденным движением динамической системы?
4. Какое движение, свободное или вынужденное определяет устойчивость динамической системы?
5. Изобразите график свободного движения в устойчивой динамической системе.
6. Изобразите график свободного движения в неустойчивой динамической системе.
7. Что такое запас устойчивости динамической системы?
8. Что такое степень колебательности колебательного переходного процесса в динамической системе?
9. Что такое степень затухания колебательного переходного процесса?
10. Что значит замкнутая и разомкнутая динамическая система с обратной связью?
11. Если система находится на границе устойчивости (незатухающие колебания), чем характерен годограф КЧХ её разомкнутого контура?

12. Чему равна, или в каких пределах изменяется степень затухания в системе, находящейся:

- а) на границе устойчивости;
- б) внутри области устойчивости;
- в) за пределами области устойчивости.

**ВНИМАНИЕ! Ответ рекомендуется выбрать из следующих соотношений:**  $0 < \psi \leq 1$ ;  $\psi = 0$ ;  $-\infty < \psi < 0$ .

13. Чему равна, или в каких пределах изменяется степень колебательности в системе, находящейся:

- а) на границе устойчивости;
- б) внутри области устойчивости;
- в) за пределами области устойчивости.

**ВНИМАНИЕ! Ответ рекомендуется выбрать из следующих соотношений:**  $0 < m < \infty$ ;  $m = 0$ ;  $-\infty < m < 0$

#### 5.6.2. Порядок выполнения работы

**ВНИМАНИЕ! В лабораторной работе № 6 используются два файла с задачами: « Комбинированное соединение процесс.mcd » - для определения искомых параметров по виду переходных процессов в замкнутой системе и « Комбинированное соединение частотный критерий .mcd » - для анализа устойчивости по критерию Найквиста. Для удобства работы предлагается сразу установить в программу Mathcad оба файла и во время работы по необходимости активировать их через раздел меню «Window».**

Перед началом работы откройте каталог «ПРОГРАММЫ» и установите в программу Mathcad файлы « Комбинированное соединение процесс.mcd » и «Комбинированное соединение частотный критерий.mcd ».

Поочередно активизируя через раздел меню «Window» прикладные программы введите в них номер Вашего варианта и в каждой задаче нажмите клавишу F9.

**ВНИМАНИЕ! После введения номера варианта в программах установлены параметры апериодических звеньев, значения которых Вы определили в лабораторной работе №1.**

*Задание 1.* Экспериментальное определение параметров пропорционального звена  $K_{II}$  и интегрирующего звена  $T_{II}$  и  $K_{II}=1/T_{II}$ , соответствующих границе устойчивости исследуемой системы (переходные процессы по каналу:  $x(t) - y(t)$  с незатухающими гармоническими колебаниями).

1. Заготовьте шаблон таблицы 5.6.1.
2. Активизируйте файл программы «Комбинированное соединение процесс.mcd».
3. Установите значение постоянной времени интегрирующего звена  $T_{И,1} = 1000$  с. При этом коэффициент передачи ед. вых./ед.вх. с.

Таблица 5.6.1

| Номер точки                                                                                       | Коэффициент усиления П-звена, $K_{П}$ , ед.вых./ед.вх. | Постоянная времени И-звена, $T_{И}$ , с | Коэффициент передачи И-звена, $K_{И}$ , ед.вых./ед.вх.×с. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $K_{П}$ и $T_{И}$ на границе устойчивости ( $m = 0$ ; т.1,2,3), т.4-устойчивая, т.5-неустойчивая. |                                                        |                                         |                                                           |
| 1                                                                                                 | $K_{П,1} = \dots\dots$                                 | $T_{И,1} = 1000$                        | $K_{И,1} = 1/T_{И,1} = 0,001$                             |
| 2                                                                                                 | $K_{П,2} = 0$                                          | $T_{И,2} = \dots$                       | $K_{И,2} = 1/T_{И,2} = \dots$                             |
| 3                                                                                                 | $K_{П,3} = 0.5 * K_{П,1} = \dots\dots$                 | $T_{И,3} = \dots\dots$                  | $K_{И,3} = 1/T_{И,3} = \dots$                             |
| 4                                                                                                 | $K_{П,3} = 0.5 * K_{П,1} = \dots\dots$                 | $T_{И,4} = 1.2 * T_{И,3} = \dots\dots$  | $K_{И,4} = 1/T_{И,4} = \dots$                             |
| 5                                                                                                 | $K_{П,3} = 0.5 * K_{П,1} = \dots\dots$                 | $T_{И,5} = 0.8 * T_{И,3} = \dots\dots$  | $K_{И,5} = 1/T_{И,5} = \dots$                             |
| $K_{П}$ и $T_{И}$ для заданного запаса устойчивости, $m = 0,221$                                  |                                                        |                                         |                                                           |
| 6                                                                                                 | $K^*_{П,1} = \dots\dots$                               | $T^*_{И,1} = 1000$                      | $K^*_{И,1} = 1/T^*_{И,1} = 0,001$                         |
| 7                                                                                                 | $K^*_{П,2} = 0$                                        | $T^*_{И,2} = \dots\dots$                | $K^*_{И,2} = 1/T^*_{И,2} = \dots$                         |
| 8                                                                                                 | $K^*_{П,2} = 0.5 * K^*_{П,1} = \dots\dots$             | $T^*_{И,3} = \dots\dots$                | $K^*_{И,3} = 1/T^*_{И,3} = \dots$                         |
| 9                                                                                                 | $K^*_{П,2} = 0.25 * K^*_{П,1} = \dots\dots$            | $T^*_{И,4} = \dots\dots$                | $K^*_{И,4} = 1/T^*_{И,4} = \dots$                         |
| 10                                                                                                | $K^*_{П,2} = 0.75 * K^*_{П,1} = \dots\dots$            | $T^*_{И,5} = \dots\dots$                | $K^*_{И,5} = 1/T^*_{И,5} = \dots$                         |

**ВНИМАНИЕ!** Анализ таблицы 5.6.1 показывает, что экспериментальному определению подлежат параметры:

**По заданию 1:**  $K_{П,1}$   $T_{И,2}$   $T_{И,3}$

**По заданию 2:**  $K^*_{П,1}$   $T^*_{И,2}$   $T^*_{И,3}$   $T^*_{И,4}$   $T^*_{И,5}$

4. Изменяя коэффициент усиления пропорционального звена  $K_{П}$  найдите его «критическое» значение  $K_{П,1}$ , соответствующее границе устойчивости (переходный процесс по каналу:  $x(t) - y(t)$  должен быть с незатухающими гармоническими колебаниями) и запишите найденное значение  $K_{П,1}$  в первую строку табл. 5.6.1.

5. Заготовьте шаблон таблицы 5.6.2.

6. Включив в разделе меню «Window» активность файла «Комбинированное соединение частотный критерий.mcd», установите значения настроечных параметров первой строки табл.5.6.1 и при степени колебательности  $m = 0$ , воспользовавшись опцией “Trace”, найдите координаты точки, при которых КЧХ разомкнутой системы будут пересекать отрицательную вещественную ось, после чего результат зафиксируйте в табл. 5.6.1 (строка 1).

8. Повторите пункты 2,3,4,6,7 задания 1 для условий, записанных в строках 2-5 табл.5.6.1.

9. Сформулируйте выводы о соответствии признаков устойчивости (неустойчивости) по критерию Найквиста фактическим переходным процессам, полученным в результате экспериментов при условиях, записанных в строках 1-5 табл.5.6.1.

**ВНИМАНИЕ!** После установки исходных данных или их изменения не забывайте для запуска программы на решение нажимать клавишу F9.

Таблица 5.6.2

|          |        | $0,0$ | $max$ | $min$ | $max$ | $min$ | $max$ | $min$ |
|----------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Точка 1  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 2  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 3  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 4  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 5  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 6  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 7  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 8  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 9  | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |
| Точка 10 | $t,c$  |       |       |       |       |       |       |       |
|          | $y(t)$ |       |       |       |       |       |       |       |

6. Найдите, с помощью опции “Trace”, значения “max” и “min” полученного переходного процесса и запишите их в первую строку табл. 5.6.2.

Задание 2. Экспериментальное определение параметров пропорционального звена  $K_P$  и интегрирующего звена  $T_I$  и  $K_I=1/T_I$ , соответствующих границе заданного запаса устойчивости ( $m = 0,221$ ) с использованием частотного критерия Найквиста с последующим экспериментальным подтверждением полученных результатов по виду переходных процессов исследуемой системы (переходные процессы по каналу:  $x(t) - y(t)$ )

1. Активизируйте файл программы «Комбинированное соединение частотный критерий.mcd», введите номер вашего варианта и установите заданное значение степени колебательности  $m = 0,221$ .

2. В соответствии с ранее заготовленной табл. 5.6.1 (строка 6) установите значение постоянной времени И-звена  $T_I = 1000$  с, после чего изменяя коэффициент пропорциональности П-звена  $K_P$  добейтесь, чтобы КЧХ разомкнутой системы проходила через точку с координатами  $-1, j0$ .

**ВНИМАНИЕ! Первоначальное значение  $K_{II}$  рекомендуется выбирать не более 0.5-0.6 от  $K_{II}$ , полученного в строке 1 табл.5.6.1 (задание 1).**

3. Запишите найденное значение  $K_{II}$  в строку 6 табл. 5.6.1.
4. Включите в разделе меню “Window” активность файла «Комбинированное соединение процесс.mcd».
5. Установите полученные параметры  $K_{II}$  и  $K_{II}=1/T_{II}$ , нажмите клавишу F9 и по полученному переходному процессу с помощью опции “Trace” зафиксируйте “max” и “min” и внесите полученные результаты в строку 6 табл. 5.6.2.

**ВНИМАНИЕ! Число контролируемых “max” и “min” должно быть не менее двух, с тем, чтобы определить степень затухания с последующим вычислением степени колебательности в соответствии с выражениями:**

6. Повторите пункты 1-5 задания 2 для условий, записанных в строках 7-10 табл. 5.6.1.
7. Сформулируйте выводы о соответствии экспериментально полученной степени колебательности  $\epsilon$  заданному значению  $m = 0,221$ , а также оцените близость полученной степени затухания переходных процессов (строки 6-10 табл. 5.6.2) к ее аналитическому значению  $\psi = 0,75$ .

*Задание 3.* Выполните аналитический расчет границы устойчивости в координатах  $K_{II}$  и  $K_{II}=1/T_{II}$  для  $m = 0$  и границы заданного запаса устойчивости в тех же координатах для  $m = 0,221$  с нанесением на них экспериментальных точек из табл. 5.6.1.

**ВНИМАНИЕ! Задание 3 выполняется в процессе оформления отчета по работе № 6.**

1. В соответствии с методикой, изложенной в разделах 2.11.3 и 2.12.3 лабораторного практикума в программной среде написать программу для расчета границы заданного запаса устойчивости и провести расчет для исходных данных своего варианта при  $m = 0$  и  $m = 0,221$ .

Пример. Аналитический расчет линии границы заданного запаса устойчивости в координатах настроечных параметров ПИ–регулятора  $K_{II}$  и  $K_{II}=1/T_{II}$  для  $m=0$  и  $m=0,221$ .

### 5.6.3. Требования к отчету

Отчет должен быть оформлен в соответствии с требованиями третьего раздела настоящего практикума и содержать следующие пункты:

1. Титульный лист с названием работы и фамилиями исполнителей;
2. Цель задания на работу;
3. Структурную схему изучаемой системы (рис.5.3) с записанными

передаточными функциями объекта регулирования, регулятора, разомкнутой и замкнутой системы по каналу:  $x(t) - y(t)$ ;

4. Таблицы экспериментальных результатов (табл.5.6.1 и 5.6.2) по заданиям 1 и 2;

5. Графики переходных процессов, соответствующие следующим строкам табл.5.6.1 и 5.6.2:

- а) на одних осях строки 1,2,3;
- б) на одних осях строки 3,4,5;
- в) на одних осях строки 6,7,8;
- г) на одних осях строки 8,9,10.

**ВНИМАНИЕ! Масштабы осей устанавливать одинаковыми для всех переходных процессов.**

6. Графики линии границы устойчивости и границы заданного запаса устойчивости по заданию 3, с нанесением на них экспериментальных точек в соответствии с табл.5.6.1;

7. Сравнительный анализ графиков переходных процессов с экспериментальной оценкой степени затухания и степени колебательности;

8. Выводы о достоинствах и недостатках П-, И- и ПИ-регулятора (соответственно строки 6,7,8 табл.5.6.1 и табл. 5.6.2).

#### 5.6.4 Вопросы для защиты

1. От чего зависит устойчивость динамической системы?
2. Изложите метод анализа устойчивости динамических систем с использованием алгебраического критерия.
3. В чем состоит утверждение частотного критерия устойчивости динамических систем?
4. Что можно сказать о корнях характеристического уравнения, если переходный процесс колебательный и затухающий?
5. Переходный процесс в АСР монотонный и затухающий, какие корни характеристического уравнения?
6. Как с помощью критерия устойчивости Найквиста оценивается устойчивость АСР?
7. Каким образом по степени колебательности  $m$  можно судить о запасе устойчивости АСР?
8. Назовите настроечные параметры для П-, И- и ПИ-регуляторов.
9. Что такое плоскость настроечных параметров ПИ-регулятора?
10. Как построить линию границы области устойчивой работы АСР в координатах параметров ПИ-регулятора?
11. Как построить линию границы области заданного запаса устойчивости АСР в координатах настроечных параметров ПИ-регулятора?

12. Покажите на одних осях качественный вид переходных процессов в АСР с П-, И- и ПИ-регуляторами.

13. Как изменится вид переходного процесса в АСР с ПИ-регулятором, если : а)  $K_P > K_{P,онт}$  ; б)  $K_P < K_{P,онт}$  ; в)  $T_i > T_{i,онт}$  ; г)  $T_i < T_{i,онт}$  ?

14. Чем характерен переходный процесс в АСР с ПИ-регулятором при настройках в точке  $K_P / T_i = \max$  , на линии  $m = m_{зд}$  ?

15. Как изменится вид переходного процесса в АСР с П-регулятором, если : а) “ $m$ ” увеличить, б) “ $m$ ” уменьшить?

16. Как изменится вид переходного процесса в АСР с И-регулятором, если : а) “ $m$ ” увеличить, б) “ $m$ ” уменьшить?

17. Как изменится вид переходного процесса в АСР с ПИ-регулятором, если : а) “ $m$ ” увеличить, б) “ $m$ ” уменьшить?

18. Нарисовать структурную схему АСР. Пояснить термины “регулируемая величина”, “регулирующее воздействие”. Пояснить назначение регулятора.

19. Из-за чего возможна неустойчивость АСР?

20. Как экспериментально определить устойчивость АСР?

21. Как по степени затухания переходного процесса определить запас устойчивости АСР?

22. Почему коэффициент усиления регулятора не должен быть слишком большим и не слишком маленьким?

23. Качественно построить график переходной характеристики для последовательно соединенных с отрицательной обратной связью интегрирующего звена с постоянной времени 10 с и запаздывающего звена с временем запаздывания 20 с.

24. Последовательно соединены и охвачены отрицательной обратной связью пропорциональное звено с коэффициентом передачи 2 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 20 с. Чему равна мнимая составляющая точки КЧХ схемы соединения для частоты  $\omega = 0,1$  рад./с?

25. Последовательно соединены и охвачены отрицательной обратной связью пропорциональное звено с коэффициентом передачи 3 ед.вых/ед.вх. и интегрирующее звено с постоянной времени 40 с. Чему равно значение АЧХ схемы соединения для частоты  $\omega = 0,1$  рад./с?

26. Как определить постоянную времени интегрирующего звена, если известно, что это звено включено в схему последовательного соединения с отрицательной обратной связью вместе с пропорциональным звеном?

27. Как построить годограф КЧХ для последовательного соединения с отрицательной обратной связью, если заданы годографы КЧХ входящих в соединение звеньев?

28. Как аналитически определяется КЧХ для последовательного соединения известных звеньев?

29. Можно ли определить переходную характеристику последовательного соединения с отрицательной обратной связью звеньев по известным для этих звеньев аналитическим выражениям КЧХ?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Промышленная теплоэнергетика и теплотехника: Справочник/ Под общ. Ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. (Раздел шестой. Автоматизированные системы управления). – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 552 с., ил.
2. Плетнев Г.П. Автоматическое управление и защита теплоэнергетических установок электростанций: Учебник для техникумов 3-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 344 с.: ил.
3. Ротач В.Я. Теория автоматического управления; Учебник для вузов.- 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство МЭИ, 2004. – 400 с., ил.
4. Плетнев Г.П. Автоматизация технологических процессов и производств в теплоэнергетике: учебник для студентов вузов 4-е изд., стереот. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 352 с. ил.
5. Гурский Д.А. Вычисления в MathCAD – Мн.: Новое знание, 2003. – 814 с.: ил.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                      | 3  |
| 1. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ОПЕРАЦИЙ                             |    |
| В ПРОГРАММЕ MATHCAD .....                                           | 4  |
| 1.1 Общие сведения о программном продукте Mathcad .....             | 4  |
| 1.2. Запуск и подготовка к работе программы Mathcad .....           | 6  |
| 1.3. Работа с программой Mathcad .....                              | 7  |
| 2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ .....                           | 11 |
| 2.1. Предмет изучения .....                                         | 11 |
| 2.2. Способы реализации управления .....                            | 12 |
| 2.2.1. Ручное и дистанционное управление .....                      | 12 |
| 2.2.2. Автоматическое управление .....                              | 13 |
| 2.3. Проблемы синтеза и анализа систем управления в теплоэнергетике | 15 |
| 2.4. Динамические характеристики объектов регулирования             |    |
| и методы их определения .....                                       | 17 |
| 2.4.1. Тестовые ступенчатые входные воздействия .....               | 18 |
| 2.4.2. Кривые разгона и переходные характеристики .....             | 18 |
| 2.4.3. Тестовые гармонические входные воздействия .....             | 19 |
| 2.4.4. Частотные характеристики .....                               | 20 |
| 2.5. Дифференциальные уравнения динамических систем и их решение    | 23 |
| 2.5.1. Решение дифференциального уравнения первого порядка .....    | 24 |
| 2.5.2. Решение дифференциального уравнения второго порядка .....    | 25 |
| 2.6. Интегральное преобразование Лапласа. Передаточные функции ...  | 27 |
| 2.7. Интегральное преобразование Фурье. Аналитические выражения     |    |
| для частотных характеристик .....                                   | 31 |

|                                                                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.8. Основные понятия имитационного моделирования.                                                                                     |    |
| Численное решение дифференциальных уравнений ) . . . . .                                                                               | 33 |
| 2.9. Элементарные динамические звенья ) . . . . .                                                                                      | 36 |
| 2.9.1. Пропорциональное звено (П-звено) . . . . .                                                                                      | 36 |
| 2.9.2. Интегрирующее звено (И-звено) . . . . .                                                                                         | 37 |
| 2.9.3. Аperiodическое звено (А-звено) . . . . .                                                                                        | 39 |
| 2.9.4. Реальное дифференцирующее звено (РД-звено) . . . . .                                                                            | 40 |
| 2.9.5. Запаздывающее звено (З-звено) . . . . .                                                                                         | 40 |
| 2.10. Соединения элементарных динамических звеньев . . . . .                                                                           | 41 |
| 2.10.1. Правила преобразования передаточных функций для<br>различных соединений элементарных динамических звеньев . . . . .            | 42 |
| 2.10.2. Примеры получения КЧХ соединений элементарных звеньев . . . . .                                                                | 43 |
| 2.10.3. Вычисление переходных характеристик для различных<br>соединений элементарных динамических звеньев . . . . .                    | 47 |
| 2.11. Устойчивость динамических систем . . . . .                                                                                       | 48 |
| 2.11.1. Оценка устойчивости по корням характеристического<br>уравнения . . . . .                                                       | 48 |
| 2.12. Критерии устойчивости . . . . .                                                                                                  | 49 |
| 2.12.1. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица . . . . .                                                                         | 49 |
| 2.12.2. Частотный критерий устойчивости Найквиста . . . . .                                                                            | 52 |
| 2.13. Аналитические методы расчета границы устойчивости<br>АСР с регуляторами, имеющими два настроечных параметра . . . . .            | 53 |
| 2.14. Понятие запаса устойчивости. . . . .                                                                                             | 55 |
| 2.14.1. Корневой показатель запаса устойчивости . . . . .                                                                              | 56 |
| 2.14.2. Частотный показатель запаса устойчивости . . . . .                                                                             | 57 |
| 2.12.3. Аналитический расчет границы заданного запаса устойчивости<br>АСР с регуляторами, имеющими два настроечных параметра . . . . . | 58 |
| 3. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ОТЧЕТОВ . . . . .                                                                                  | 60 |
| 4. КАТАЛОГ ПРОГРАММ ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМА . . . . .                                                                                 | 64 |
| 5. ОПИСАНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ . . . . .                                                                                               | 65 |
| 5.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1 . . . . .                                                                                                 | 65 |
| 5.1.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                                                                                               | 65 |
| 5.1.2. Задание на работу . . . . .                                                                                                     | 66 |
| 5.1.3. Порядок выполнения задания . . . . .                                                                                            | 66 |
| 5.1.4 Требования к отчету . . . . .                                                                                                    | 68 |
| 5.1.5. Рекомендации по выполнению отчета . . . . .                                                                                     | 69 |
| 5.1.6. Вопросы для защиты . . . . .                                                                                                    | 69 |
| 5.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 . . . . .                                                                                                 | 70 |
| 5.2.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                                                                                               | 70 |
| 5.2.2. Задание на работу . . . . .                                                                                                     | 71 |
| 5.2.3. Порядок выполнения задания . . . . .                                                                                            | 71 |
| 5.2.4 Требования к отчету . . . . .                                                                                                    | 74 |
| 5.2.5. Рекомендации по выполнению отчета . . . . .                                                                                     | 74 |
| 5.2.6. Вопросы для защиты . . . . .                                                                                                    | 75 |
| 5.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3 . . . . .                                                                                                 | 76 |

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| 5.3.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                            | 76 |
| 5.3.2. Порядок выполнения задания. . . . .                          | 77 |
| 5.3.3. Требования к отчету. . . . .                                 | 78 |
| 5.3.4 Рекомендации по выполнению отчета. . . . .                    | 78 |
| 5.3.5. Вопросы для защиты. . . . .                                  | 78 |
| 5.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4 . . . . .                              | 79 |
| 5.4.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                            | 79 |
| 5.4.2. Порядок выполнения задания. . . . .                          | 80 |
| 5.4.3. Требования к отчету . . . . .                                | 81 |
| 5.4.4. Рекомендации по оформлению отчета и выполнению расчетов. . . | 81 |
| 5.4.5. Вопросы для защиты . . . . .                                 | 81 |
| 5.5. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5 . . . . .                              | 82 |
| 5.5.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                            | 83 |
| 5.5.2. Порядок выполнения задания . . . . .                         | 84 |
| 5.5.3. Требования к отчету . . . . .                                | 84 |
| 5.5.5. Рекомендации по оформлению отчета и выполнению расчетов . .  | 85 |
| 5.5.6. Вопросы для защиты . . . . .                                 | 85 |
| 5.6. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6 . . . . .                              | 86 |
| 5.6.1. Вопросы для коллоквиума . . . . .                            | 87 |
| 5.6.2. Порядок выполнения задания. . . . .                          | 88 |
| 5.6.3. Требования к отчету . . . . .                                | 91 |
| 5.6.4. Вопросы для защиты . . . . .                                 | 92 |
| ЛИТЕРАТУРА . . . . .                                                | 94 |
| СОДЕРЖАНИЕ . . . . .                                                | 94 |

Владимир Романович Сабанин,  
Николай Иванович Смирнов,  
Андрей Иванович Репин

## **Элементарные динамические звенья, их соединения и устойчивость**

Лабораторный практикум  
по дисциплине  
" Управление, сертификация и инноватика "

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул. д. 14