Цена 12 коп.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. В. ВОЛГИН, В. В. УСЕНКО

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Москва 1981

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.В.ВОЛГИН, В.В.УСЕНКО

Утверждено
Учебно-методическим управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по курсу

Теория эксперимента

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Редактор В.С.МУХИН

Москва 1981

В основу конспекта лекций положена часть материала, прочитанного авторами для студентов специальности 0649.

В данном конспекте сделана попытка систематизированно изложить важный раздел курса "Теории эксперимента", связанного с проверкой статистических гипотез о законах распределения и их параметров. Описываются как традиционные методы проверки статистических гипотез, так и специальные методы, ориентированные на эффективное решение инженерных задач.

Несмотря на небольшой объем конспекта, он достаточно полно иллюстрирован практическими примерами из области пром- и теплоэнергетики.

Конспект лекций предназначен для студентов специальности 0649. Однако он может быть полезен студентам других специальностей, а также преподавателям, аспирантам и инженерам, интересующихся вопросами практического использования методов теории эксперимента.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение физических явлений, технологических и других процессов связано с необходимостью построения их математических моделей. Большой класс процессов и явлений описывается детерминированными моделями. Наряду с ними существует множество процессов, описание которых выходит за рамки детерминированного подхода. В частности, к ним относятся практически все технологические процессы. Для их описания обращаются к математической статистике, с помощью которой строится вероятностная модель процесса.

Построение вероятностной модели производится на основе статистического анализа результатов измерения случайных величин. Логическая основа статистического исследования случайных величин базируется на абстрактном понятии гипотетической генеральной совокупности (ГГС). Это понятие определяется как множество всех мыслимых (не реально существующих!) наблюдений случайной величины при заданных условиях эксперимента. В процессе эксперимента фиксируется конечное число значений случайных величин $x_1; x_2; \ldots; x_N$. Полученные числа называются выборочной совокупностью. Они рассматриваются, как случайная выборка из некоторой ГГС. На основе результатов статистического анализа случайной выборки делается вывод о законе распределения ГГС, оцениваются статистические параметры распределения и т.д.

Следует особо отметить, что объектом статистического исследования может служить лишь такая выборка случайных величин, которая имеет устойчивую функцию распределения. Это замечание весьма существенно. Оно ограничивает класс явлений, которые могут быть описаны вероятностными методами.

Например, результат хоккейного матча в известной мере явление случайное, так как заранее его предсказать нельзя. Однако с позиций математической статистики исход матча не есть случайное событие в виду того, что матч нельзя повторить многократно при одних и тех же условиях. Следовательно, такое явление не имеет устойчивой функции распределения и описать его статистической моделью невозможно.

В дальнейшем предполагается, что изучаемые случайные величины или процессы статистически устойчивы, т.е. имеют устойчивую функцию распределения.

Знание функции распределения необходимо при решении большого круга практических задач пром- и теплоэнергетики. Возьмем, например, одну из актуальных задач оснащения современного предприятия контрольно-измерительной аппаратурой. Без знания функции распределения реальных случайных сигналов, действующих в исследуемом канале измерения, невозможно правильно выбрать измерительный прибор, оценить погрешность производимого контроля и т.д.

Знание функции распределения случайных сигналов требуется при решении задач сигнализации и защиты оборудования предприятий для правильного выбора уровней сигнализации и защиты. И, наконец, знание функции распределения совершенно необходимо при постановке различного рода промышленных экспериментов и в задачах планирования. Например, сколько нужно снять реализаций переходной характеристики, чтобы ее оценка была достоверной? Если число реализаций весьма мало, то возникают сомнения о достоверности полученного результата. Наоборот, чем больше число реализаций переходной характеристики, тем надежнее будет ее оценка. Однако каждый опыт это - затраты времени и средств. Обоснованное решение поставленной задачи может быть осуществлено лишь на основе знания функции распределения и других статистических характеристик случайных шумов, действующих в исследуемом канале объекта.

Информация о законе распределения и других статистических характеристиках случайных сигналов используется при решении задач автоматического регулирования - для выбора схем и законов регулирования, а также при оценке сложных технико-экономических показателей. Информация о вероятностных характеристиках сигналов требуется для правильного выбора алгоритмов адаптации АСР, при решении задач фильтрации и прогнозирования, для оценки точности результатов эксперимента и для решения многих других задач АСУ ТП.

Поэтому при проектировании и эксплуатации любого реального объекта в той либо иной мере возникает проблема построения статистических моделей случайных сигналов, действующих в информационных каналах объекта. На практике эта проблема часто сводится к проверке статистических гипотез о законе распределения случайных сигналов или гипотез о значениях параметров распределения.

I. Основные понятия

При изучении различных случайных явлений широко используют статистические модели. Построение таких моделей производится с помощью теории вероятностей и математической статистики. В первой из них на основе принятия статистической модели изучаются вероятностные закономерности появления различных событий. В математической статистике предметом изучения является множество случайных величин, для которых требуется подобрать статистическую модель.

Теория вероятностей, как правило, оперирует бесконечно большим числом наблюдений. В математической статистике объем экспериментальных наблюдений всегда ограничен.

В процессе эксперимента фиксируется конечная выборка случайных величин (элементов) $X_I, X_2, \ldots, X_N$. Число N всех частных значений случайной величины называют объемом выборки. Последовательность элементов выборки, записанную в возрастающем порядке называют вариационным рядом. Пусть в вариационном ряде элемент X_I содержится n_1 раз, X_2 - n_2 раз и т.д. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_N$ называют частотами. Отношения частот к объему выборки называют относительными частотами

$$P_i = \frac{n_i}{N} . \qquad (I)$$

Всеобъемлющей статистической характеристикой фиксированной выборки случайных величин является эмпирическая функция распределения $F^*(x)$. Она определяет для каждого значения x относительную частоту события $X \leq x$, т.е. функция распределения устанавливает связь между конкретными значениями случайных величин выборки и соответствующими им относительными частотами. Например, чтобы найти относительную частоту события $X \leq x_3$ достаточно просуммировать те элементы вариационного ряда, которые меньше x_3 и результат разделить на объем выборки

$$F^*(x_3) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} .$$

Очевидно, что сумма относительных частот выборки равна единице

$$\sum_1^N P_i = 1. \qquad (2)$$

Аналогичной характеристикой ГГС является теоретическая функция распределения

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{3}$$

Функция распределения есть вероятность того, что случайно выбранная величина X из ГГС не будет превышать некоторого заданного значения x, т.е. $F(x)$ характеризует долю наблюдений в совокупности со значениями, меньшими x.

Геометрически равенство (3) интерпретируется следующим образом: функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое на числовой оси будет находиться левее точки x.

Таким образом, различие между эмпирической и теоретической функциями распределения состоит в том, что функция $F(x)$ определяет вероятность события $X \leq x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернули следует, что при большом объеме выборки N эмпирическая функция $F^*(x)$ мало отличается от $F(x)$, а при $N \to \infty$ функция $F^*(x)$ стремится по вероятности к теоретической функции распределения $F(x)$. Это обстоятельство позволяет использовать эмпирическую функцию распределения для характеристики ГГС.

Функция распределения является одной из форм описания закона распределения случайной величины и обладает следующими основными свойствами:

I) $F(x) \geq 0$ для всех x;

2) $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$;

3) $F(-\infty) = 0$; $F(\infty) = I$.

Другой распространенной формой описания закона распределения случайной величины является плотность распределения вероятностей

$$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}. \tag{4}$$

С помощью плотности распределения можно решать те же задачи, что и с помощью функции распределения. В частности, можно найти:

I) вероятность того, что случайная величина X примет значение не превышающее x_1

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx; \tag{5}$$

2) вероятность того, что случайная величина примет значение, превышающее x_2

$$P(X > x_2) = 1 - F(x_2) = \int_{x_2}^{\infty} f(x)\,dx; \tag{6}$$

3) вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала, заключенного между x_1 и x_2

$$P(x_2 < X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1) = \tag{7}$$
$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

На основе выражений (5) - (7) можно сделать следующие выводы:

I) вероятность попадания случайной величины X в интервал от минус бесконечности до x_1 равна площади под кривой плотности распределения вероятностей влево от точки x_1;

2) вероятность попадания случайной величины X в интервал от x_2 до плюс бесконечности равна площади под кривой плотности распределения вероятностей вправо от точки x_2;

3) вероятность попадания случайной величины X в интервал от x_1 до x_2 равна площади под кривой плотности распределения вероятностей между точками x_1 и x_2.

Очевидно также, что

I. $f(x) \geq 0$ для всех x,

2. $F(\infty) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Плотность распределения вероятностей может быть использована непосредственно для вычисления математического ожидания, дисперсии и других числовых характеристик случайных величин.

2. Построение распределения выборки, гистограммы, полигона

Исходной информацией для анализа статистических свойств случайного сигнала служит выборка случайных чисел, с помощью которой строится эмпирическое распределение выборки. Для построения распределения необходимо:

I) определить число частичных интервалов K, на которые разбивается исходное множество чисел выборки, из условия

$$(1 + 3{,}2 \cdot \lg N) < k < N/5 \qquad (8)$$

с округлением до ближайшего целого;

2) определить длину частичных интервалов

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{K}\ ; \qquad (9)$$

3) определить границы частичных интервалов

$$x_1 = x_{min} + \Delta\ ;$$

$$x_2 = x_{min} + 2\Delta\ ; \qquad (10)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_k = x_{min} + K\Delta\ .$$

4) подсчитать число элементов выборки n_i попавших в i -ый частичный интервал;

5) определить варианты ряда

$$x_i^* = x_{min} + (i - 0{,}5)\Delta = (x_i + x_{i+1})/2\ , \qquad (11)$$

где x_i ; x_{i+1} - соответственно левый и правый концы интервала.

Выборку представленную вариантами x_i^* и соответствующими им частотами n_i, называют распределением выборки.

Распределение выборки можно изобразить графически в виде полигона или гистограммы (рис.1).

Полигоном частот называют ломанную линию, соединяющую точки (x_i^* ; n_i).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины Δ , а высоты равны плотности частоты, т.е. отношению n_i/Δ. Очевидно, что площадь гистограммы в этом случае равна объему выборки N .

Часто при построении гистограммы в качестве ординат выбирают не частоту, а относительную частоту событий

$$P_i^* = \frac{n_i}{N}\ .$$

В этом случае площадь под гистограммой будет равна единице.

Гистограмма частоты и гистограмма относительной частоты отличаются друг от друга лишь масштабом по оси ординат.

Эмпирическое распределение выборки, представленное в виде гистограммы или полигона, в ряде случаев может служить априорной информацией для выдвижения первоначальной гипотезы о законе распределения генеральной совокупности.

Фактические частоты вариант, представленные гистограммой, следует сравнить с ожидаемыми частотами. Такое сравнение показывает характер отклонения эмпирической модели от принятой (гипотетической) модели распределения и служит исходным материалом для ее дальнейшей коррекции.

Пример 1. При работе энергоблока мощностью 300 МВт в регулирующем режиме проведено 250 независимых измерений его мощности в диапазоне от x_{min} = 205 МВт до x_{max} = 295 МВт.

Требуется по результатам измерений построить гистограмму и полигон частот.

Решение: 1) с помощью формулы (8) находим число частичных интервалов

$$K = 1 + 3{,}2 \cdot \lg N = 1 + 3{,}2 \cdot \lg 250 \approx 9\ ;$$

2) определяем длину частичных интервалов

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{K} = \frac{295 - 205}{9} = 10\ ;$$

3) по формулам (10) находим границы частичных интервалов

$x_1 = x_{min} + \Delta = 205 + 10 = 215$,

$x_2 = x_{min} + 2\Delta = 205 + 2 \cdot 10 = 225$,

....

$x_9 = x_{min} + 9\Delta = 205 + 9 \cdot 10 = 295$;

4) подсчитываем число элементов выборки n_i, попавших в частичные интервалы K = 1 + 9. Результаты подсчета приведены в табл. 1 (столбец 5);

5) определяем варианты x_i^* и строим гистограмму и полигон частот (рис. 1).

Таблица I

i	x_i	x_{i+1}	x_i^*	n_i	P_i	z_i^*	$f(z_i^*)$	$f(x)$	$P_i/\Delta i$
I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO
I	205	2I5	2I0	I3	0,052	I,95	0,060	0,0029	0,0052
2	2I5	225	220	I7	0,068	I,46	0,I37	0,0067	0,0068
3	225	235	230	3I	0,I24	0,98	0,276	0,0I35	0,0I24
4	235	245	240	39	0,I56	0,49	0,354	0,0I73	0,0I56
5	245	255	250	50	0,200	0,00	0,399	0,0I95	0,0200
6	255	265	260	40	0,I60	0,49	0,354	0,0I73	0,0I60
7	265	275	270	28	0,II2	0,98	0,276	0,0I35	0,0II2
8	275	285	280	20	0,080	I,46	0,I36	0,0067	0,0080
9	285	295	290	I2	0,048	I,95	0,060	0,0029	0,0048

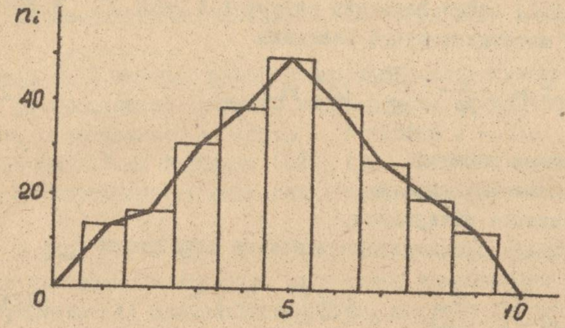

Рис. 1

3. Выравнивание вариационных рядов

В любом эмпирическом распределении присутствуют элементы случайности, связанные с ограниченностью объема выборки. Возникает задача аппроксимации статистического материала некоторой теоретической кривой гипотетического распределения, отражающей наиболее существенные черты (сигнатуру) исходной выборки вариант. Эта задача называется выравниванием (сглаживанием) вариационных рядов. Она состоит в подборке теоретической плавной кривой распределения, описывающей данное эмпирическое распределение, в некотором смысле наилучшим образом. При этом выбор теоретической кривой диктуется не чисто математическими соображениями, а исходя из существа решаемой задачи, с учетом характера гистограммы и точности результатов статистической обработки.

Допустим, что из физических соображений для исследуемой случайной величины выбран нормальный закон распределения. Тогда задача выравнивания вариационного ряда переходит в задачу о выборе параметров μ и σ теоретической плотности нормального распределения, которые соответствовали бы статистическим оценкам μ^* и σ^*.

Выравнивание вариационного ряда удобно проводить в следующем порядке:

1. По формуле (II) найти варианты интервалов ряда x_i^* и вычислить оценку математического ожидания

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{m} x_i^* n_i , \qquad (I2)$$

где N – объем выборки;
m – число интервалов;
n_i – частота интервалов.

2. Вычислить оценку среднеквадратического отклонения

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{m} n_i (x_i^* - \bar{x})^2 . \qquad (I3)$$

3. Выбрать параметры нормального распределения μ и σ таким образом, чтобы выполнялись условия:

$$\mu = \bar{x}; \quad \sigma = S .$$

4. Провести нормировку вариант

$$z_i^* = \frac{x_i^* - \bar{x}}{S} \qquad (I4)$$

и с помощью табл. 2п найти значения нормированной теоретической плотности распределения в точках z_i^*

$$f_0(z_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z_i^{*2}/2) . \qquad (I5)$$

5. Вычислить значения теоретической плотности распределения в точках

$$f(x_i^*) = f_0(z_i^*)/S . \qquad (I6)$$

6. Вычислить отношение относительной частоты P_i к ширине частичного интервала Δ_i и построить гистограмму относительных частот;

7. Построить на одном графике гистограмму и выравнивающую ее теоретическую кривую распределения.

Между эмпирическим распределением и теоретической кривой всегда существуют расхождения, как бы тщательно не подбирались параметры распределения. Причины расхождения определяются либо ограниченным объемом выборки, либо ошибкой в выборе выравнивающей теоретической кривой распределения.

Для ответа на вопрос, какая из указанных причин имеет место,

служат статистические критерии проверки гипотез о законе распределения.

Пример 2. С помощью функции плотности вероятностей нормального закона распределения провести выравнивание эмпирического распределения, приведенного в табл.I (столбцы I – 5).

Решение: I) по формулам (I2), (I3) вычислить соответственно оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения

$\bar{x} = 250; \quad S = 20{,}5$,

которые принимаем в качестве параметров нормального распределения;
2) по формуле (4) провести нормировку вариант x_i^* и по табл. 2п найти соотвествующие им значения теоретической нормированной плотности распределения. После этого с помощью (I6) вычислить значения $f(x_i^*)$. Результаты расчета сведены в табл. I (столбцы 6 – 8);
3) вычислить отношение P_i/Δ_i (столбец 10) и построить гистограмму и выравнивающую функцию плотности вероятностей нормального распределения (рис. 2)

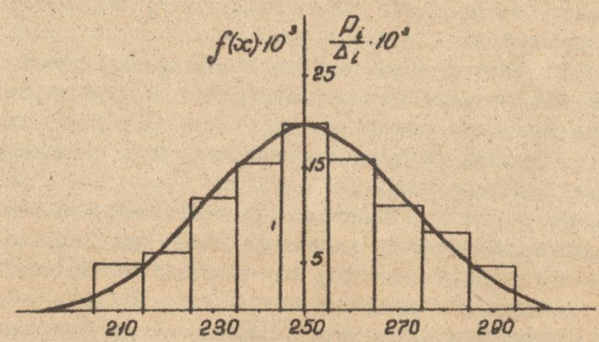

Рис. 2

Сравнивая значения $f(x)$ и P_i/Δ_i, убеждаемся, что отличие эмпирического и теоретических распределений несущественно.

4. Общая задача проверки статистических гипотез

Статистической называют гипотезу о неизвестной вероятности некоторого события, гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известного распределения случайной величины. Например, статистическими являются следующие гипотезы:

I) вероятность отклонения температуры пара на выходе из парогенератора за уровень 540°С равна 0,9;

2) распределение мощности энергоблока при работе в базовом режиме подчиняется равномерному закону;

3) математическое ожидание μ плотности нормального распределения равно нулю.

Различают нулевую (основную) H гипотезу и конкурирующую (альтернативную) $\bar{H}$ гипотезу. Если, например, нулевая гипотеза состоит в предположении, что дисперсия σ^2 нормального распределения равна единице, то конкурирующая предполагает обратное, т.е. $\sigma \neq I$.

Гипотезу, состоящую из одного конкретного предположения, называют простой.

Гипотезу, состоящую из двух или более простых гипотез, называют сложной. Примером сложной гипотезы может служить гипотеза об экспоненциальном распределении КПД парогенератора при условии, что расходы топлива, воздуха и питательной воды подчинены нормальному закону распределения.

Решение принять или отклонить гипотезу базируется на знании оценки некоторой случайной величины, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают t, если она распределена по закону Стьюдента, F – по закону Фишера, χ^2 (хи квадрат) – по закону Пирсона и т.д. Эти величины называют статистическими критериями. В целях общности подхода к использованию критериев проверки гипотез любой из них обозначим через С.

Множество возможных значений критерия С разбивают на область принятия гипотезы и критическую область. При попадании экспериментального значения критерия С в критическую область гипотеза отвергается. Попадание экспериментального значения критерия С в

область принятия гипотезы свидетельствует о том, что экспериментальные данные не противоречат проверяемой гипотезе.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $C > C_{кр} > 0$.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $C < C_{кр} < 0$.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами $C < C_{1кр};\ C > C_{2кр}$, где $C_{2кр} > C_{1кр}$.

Если $C_{2кр} = C_{1кр}$, т.е. критические значение критерия симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенством

$$|C| > C_{кр},$$

Границы критических областей зависят от многих причин и, в первую очередь, от закона распределения самого критерия C.

В основе проверки любых статистических гипотез лежат следующие правила:

I) события, происходящие с вероятностью близкой к единице, считаются достоверными;

2) события, происходящие с вероятностью близкой к нулю, считаются практически невозможными.

Непосредственное использование этих правил при проверке статистических гипотез сводится к выбору такого критического значения $C_{кр}$, вероятность превышения которого равна величине α, называемой уровнем значимости. Если вычисленное значение критерия C больше критической величины $C_{кр}$ (значение C принадлежит критической области), то это событие считается маловероятным и гипотеза отвергается. Если вычисленное значение критерия C меньше величины $C_{кр}$ (значение C принадлежит внекритической области), то такое событие считается достоверным и гипотеза принимается. Очевидно, что при этом величина уровня значимости α должна быть достаточно малой.

От выбора конкретного значения α весьма существенно зависят границы критической области критериев проверки статистических гипотез. Однако, рекомендовать какую-либо определенную величину α для всех практических случаев не представляется возможным, так как этот выбор в значительной мере определяется важностью следствий ошибок, возможных при проверке статистических гипотез. Поэтому в зависимости от конкретных целей величина уровня значимости α выбирается по разному.

В инженерных задачах стало обычным выбирать одно из стандартных значений α, таких,как 0,05; 0,01; 0,005. Эта стандартизация проведена с единственной целью - сократить объем статистических таблиц, необходимых для определения критических значений, соответствующих критериев проверки.

Следует отметить, что даже при заданном уровне значимости границы критической области критерия C задаются неоднозначно. Их положение, наряду с зависимостью от величины α, определяется спецификой цели исследования, особенностями формулировки задачи, вызвавшей необходимость определения границ критической области и др.

При заданном уровне значимости α границы критической области очень часто определяются, исходя из следующих соотношений:

1) для правосторонней критической области

$$P(C > C_{кр}) = \alpha, \text{ если } C_{кр} > 0; \qquad (17)$$

2) для левосторонней критической области

$$P(C < C_{кр}) = \alpha, \text{ если } C_{кр} < 0; \qquad (18)$$

3) для двусторонней симметричной критической области

при больших по абсолютной величине отклонениях

$$P(|C| > C_{кр}) = \alpha/2; \qquad (19)$$

при малых по абсолютной величине отклонениях

$$P(|C| < C_{кр}) = \alpha/2. \qquad (20)$$

Из сравнения (17) - (20) легко убедиться, что при одном и том же уровне значимости α границы критической области критерия C для различных соотношений будут изменяться.

Пусть, например, проверяется гипотеза с помощью некоторого критерия C^*, имеющего нормальный закон распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Если находить критическое значение C^* для больших положительных отклонений при $\alpha = 0,05$, то из условия

$$P(C > C^*_{кр}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{C_{кр}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 - \Phi(C^*_{кр}) = 0.05$$

с помощью табл.1п находим величину $C_{1кр} = 1,64$.

Если же находить критическое значение критерия для больших по абсолютной величине отклонений при прежнем уровне значимости $\alpha = 0,05$, то из условия

$$P(|C| > C^*_{кр}) = 1 - \Phi(C^*_{кр}) = 0,025$$

получаем, что критическое значение имеет другую величину равную $C_{2кр} = 1,96$.

Следовательно, в зависимости от формулировки условий типа (17) - (20) при одном и том же уровне значимости α могут получаться совершенно различные критические значения $C_{кр}$.

Таким образом, при выбранном критерии проверки статистической гипотезы C и уровне значимости α границы критической области остаются подвижными. Для их фиксации в общем случае, кроме знания закона распределения и уровня значимости α, требуется четкая формулировка условий типа (17) - (20), которые определяются конкретной целью, вызвавшей необходимость проверки статистической гипотезы.

5. Ошибки первого и второго рода

Выдвинутая гипотеза может быть правильной и неправильной, поэтому и возникает необходимость ее проверки. В процессе проверки статистической гипотезы возможны два результата. Можно прийти к правильному решению или совершить одну из ошибок:

1) отвергнуть гипотезу, когда она в действительности верна (ошибка первого рода);

2) принять гипотезу, когда она неверна (ошибка второго рода).

Вероятность ошибки первого рода характеризуется уровнем значимости α, а вероятность ошибки второго рода характеризуется показателем β.

Очевидно, что чем меньше уровень значимости, тем меньше вероятность совершить ошибку первого рода. Однако одновременно с уменьшением уровня значимости α возрастает вероятность совершить ошибку второго рода. Так, например, при $\alpha = 0$ будут приниматься все гипотезы, в том числе и неправильные. Для случая $\alpha = 0$ вероятность ошибки второго рода будет максимальной.

Как ранее было отмечено, при одном и том же уровне значимости в зависимости от целей проверки гипотезы могут быть по разному найдены границы критической области.

Поэтому в общем случае, зная уровень значимости α, практически ничего нельзя сказать о вероятности ошибки второго рода.

Требования оптимального выбора границ критической области при заданном объеме выборки сводятся к тому, чтобы критерий проверки имел максимальную вероятность попадания в критическую область, когда справедлива конкурирующая гипотеза. Эту вероятность называют мощностью критерия $P = 1 - \beta$. Другими словами, мощности критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза отвергается, если верна конкурирующая гипотеза.

При выборе уровня значимости α нужно учитывать возможные последствия ошибок первого и второго родов, которые часто бывают совершенно различными.

Например, если при проверке гипотезы о наличии трещины в паропроводе совершается ошибка первого рода, т.е. отвергается гипотеза о наличии трещины в паропроводе, когда в действительности она есть, то это грозит разрывом паропровода с большими экономическими потерями и возможными человеческими жертвами. Если же совершается ошибка второго рода, т.е. принимается гипотеза о наличии трещины, когда в действительности ее нет, то это только добавляет работы ремонтному и эксплуатационному персоналу, связанной с освидетельствованием паропровода.

Однако отсюда не следует, что ошибка первого рода всегда опасней ошибки второго рода. Рассмотрим другой пример, когда ошибка второго рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка первого рода. Допустим, что отвергнуто правильное решение "продолжать строительство дымовой трубы электростанции". В этом случае ошибка первого рода влечет за собой материальные потери. Если же принято неправильное решение "продолжать строительство", несмотря на опасность падения трубы, вызванной активностью подземных вод, то эта ошибка второго рода влечет за собой и материальные потери и возможную гибель людей.

Единственный способ одновременного уменьшения как ошибки первого рода, так и ошибки второго рода состоит в увеличении объема выборки.

В инженерной практике при фиксированном числе опытов наиболее часто задаются уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$. Это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода, т.е. отвергнуть правильную гипотезу.

6. Выбор статистической модели распределения случайной величины

При изучении случайных явлений исследователь сталкивается с необходимостью выбора статистической модели распределения или выдвижения гипотезы о законе распределения случайной величины. При построении статистических моделей распределения всякого рода "угадывания" или перебор моделей распределений обычно ведет к неоправданно большим потерям времени и средств.

Для уменьшения этих потерь требуются некоторые основания, с помощью которых процесс выбора статистической модели случайного явления можно провести более целенаправленно.

Из-за разнообразия случайных явлений и описывающих их законов распределения строгих рекомендаций по выбору статистических моделей до настоящего времени не разработано. Как правило, основанием для выбора гипотезы о законе распределения понимание сущности и характера изучаемого случайного процесса является определяющим. Например, для выдвижения гипотезы об экспоненциальном распределении необходимо, чтобы результат формирования случайной величины, как минимум, зависел от некоторого физического или другого предела.

В инженерной практике наиболее широко используемой статистической моделью распределения случайной величины является нормальное, или гауссово, распределение. Нередко выбор этой модели ничем не обосновывается, а иногда даже противоречит физической сущности явления, что, как правило, приводит к ошибкам в конечном результате исследования. Для выдвижения гипотезы о нормальном законе распределения необходимо, чтобы результат формирования случайной величины можно было трактовать, как следствие большого числа факторов, среди которых нет доминирующих. Такими случайными величинами можно считать, например, температуру и давление перегретого пара на выходе парогенератора, частоту переменного тока электросети и др.

Как известно, область нормально распределенных случайных величин лежит в интервале $-\infty \le x \le \infty$. Однако, как правило, значения реально существующих случайных величин имеют верхний и нижний пределы, обусловленные физическими, технологическими или другими ограничениями. При этом часто возникает вопрос, правомерно ли использование нормального распределения в качестве статистической модели.

Ответ на него зависит от цели решаемой задачи. Если ограничения на пределы изменения случайной величины, отличные от $\pm\infty$, незначительно влияют на конечную цель, то вопрос решается положительно. С другой стороны, результат решения задачи, в которой основную роль играют большие отклонения случайной величины от среднего значения, будет ошибочным, если принята гипотеза о нормальном законе распределения.

Например, результаты идентификации пром- и теплоэнергетических объектов, оптимальной настройки АСР практически не зависят от того, что пределы изменения случайной величины отличаются от $\mp\infty$. И, наоборот, реально существующие ограничения на пределы изменения случайной величины приведут к серьезным ошибкам при определении вероятности разрыва паропровода от превышения давления пара выше некоторого предельного значения.

Следует также учитывать, что на практике существует достаточно широкий класс явлений, для которых допущение о нормальном законе распределения противоречит физическому смыслу и принципиально неприемлемо. Например, изменения КПД парогенератора при работе в базовом режиме, выработка электроэнергии на электростанции, время безотказной работы АСР и др. не могут описываться никакими симметричными распределениями, так как значения КПД, количество электроэнергии и время работы АСР группируются возле некоторых своих физических и технологических пределов. Тем не менее, именно в таких случаях в качестве статистической модели иногда используют нормальный закон распределения, что является следствием его фетишизации. Как чрезмерная осторожность в обращении с нормальным распределением, так и его фетишизация приводят либо к необоснованным трудностям в решении практических задач, либо к ошибкам в конечном результате исследования. Поэтому руководством при выборе гипотезы о законе распределения, описывающего реальную физическую систему, в первую очередь должно служить:

I. Осознание конечной цели задачи, для решения которой привлекается статистическая модель.

2. Понимание сущности и специфики изучаемой системы и процессов, протекающих в ней.

Дополнительной информацией при выборе гипотезы о законе распределения может служить статистический материал, представленный в виде гистограммы или полигона.

7. Проверка статистической гипотезы о вероятности события

При изучении случайных событий на основе априорной информации или из других соображений выдвигается гипотеза, что вероятность некоторого события X равна p. Эту вероятность называют гипотетической вероятностью. Располагая результатами N независимых экспериментов, в которых x раз произошло изучаемое событие X, требуется проверить гипотезу о его вероятности p.

В N независимых опытах вероятность события X может быть описана с помощью биномиального распределения

$$P_N(x) = \frac{N!}{x!\,(N-x)!}\, p^x (1-p)^{N-x}, \qquad (21)$$

где p и N - параметры распределения.

Математическое ожидание частоты события вычисляется с помощью формулы

$$\mu_x = p \cdot N. \qquad (22)$$

Сравнение экспериментального значения частоты события x с ее математическим ожиданием μ_x позволяет обнаружить некоторое отклонение

$$\Delta = |x - \mu_x|. \qquad (23)$$

Вопрос, подлежащий дальнейшему выяснению, состоит в следующем: можно ли объяснить отмеченное расхождение опытных и гипотетических частот случайным разбросом из-за ограниченности экспериментального материала или же опытные данные противоречат гипотезе о вероятности p ?

Для ответа на этот вопрос следует установить границы допустимых отклонений частот от их математического ожидания, вычисленного в предположении справедливости гипотезы о вероятности. Другими словами, требуется выбрать критическую (максимальную) величину расхождения

$$\Delta_{кр} = \max |x - \mu_x|, \qquad (24)$$

вероятность превышения которой, при выполнении допущения о статистической гипотезе, пренебрежимо мала.

Если в результате эксперимента отклонение частоты события от математического ожидания больше критического значения $\Delta > \Delta_{кр}$, то это свидетельствует о несовместимости опытных результатов с выдвинутой гипотезой о вероятности и она отвергается. В противном случае, когда $\Delta \leq \Delta_{кр}$ результаты эксперимента не противоречат гипотезе о вероятности p, а наличие отклонения Δ можно объяснить ограниченностью экспериментального материала.

Таким образом, выбор критического отклонения в данном случае разделяет множество возможных значений отклонений на две области: критическую область ($\Delta > \Delta_{кр}$), при попадании в которую опытного отклонения Δ гипотеза отвергается и на область допустимых отклонений ($\Delta \leq \Delta_{кр}$), при попадании в которую опытного отклонения Δ гипотеза о вероятности события принимается.

При проверке гипотезы о вероятности события, как и в общем случае проверки статистических гипотез, величина критического отклонения должна быть выбрана такой, чтобы вероятность ее превышения (в случае справедливости гипотезы) была пренебрежимо малой.

Это позволяет считать любые отклонения выше критической величины практически невозможными и, следовательно, противоречащими гипотезе о вероятности.

Пример 3. Проверить гипотезу о равновероятности выпадений герба и цифры в опытах с монетой, проведенных французским естествоиспытателем Бюффоном (ХУШ в.).

Из 4040 раз бросаний монеты он 2048 раз наблюдал появление герба.

Решение. В опытах с монетой вероятность события (выпадение герба) может быть описано биноминальным распределением (21), параметры которого имеют следующие числовые значения:

$$p = 0,5; \qquad N = 4040; \qquad x = 2048.$$

Найдем соответственно математическое ожидание частоты события и ее среднее квадратическое отклонение

$$\mu_x = p \cdot N = 0,5 \cdot 4040 = 2020,$$

$$\sigma_x = \sqrt{p(1-p)N} = \sqrt{0,5 \cdot 0,5 \cdot 4040} \approx 32.$$

Воспользуемся приближением биноминального закона распределения нормированной величины $(x - pN)/\sigma_x$, нормированной функцией распределения и найдем величину критического отклонения. Для этого

зададимся уровнем значимости $\alpha = 0,01$, при котором нормированная случайная величина, распределенная по нормальному закону с вероятностью 0,99, не превысит значения 2,58

$$P\left(\left|\frac{x - p \cdot N}{\sigma_x}\right| > 2,58\right) \approx 0,01.$$

Найдем величину критического отклонения

$$\Delta_{кр} = 2,58 \cdot \sigma_x = 2,58 \cdot 32 = 83.$$

Определим область допустимых отклонений

$$p \cdot N \pm 2,58\sigma_x = 2020 \pm 83.$$

Отклонение экспериментальной частоты события $x = 2048$ от математического ожидания составляет

$$\Delta_x = 2048 - 2020 = 28.$$

Так как $\Delta_x < \Delta_{кр}$, то нет оснований для опровержения гипотезы о равновероятности выпадений герба и цифры.

8. Проверка статистических гипотез о законах распределения с помощью χ^2 - критерия Пирсона

Для проверки статистических гипотез о законах распределения разработано множество критериев. Среди них наибольшее распространение получил χ^2 - критерий Пирсона.

Применение хи-квадрат критерия основано на предельном распределении меры расхождения между гипотетическими вероятностями P_i и экспериментальными относительными частотами P_i^* при объеме выборки $N \to \infty$

$$u = \chi^2 = N \sum_{i}^{r} \frac{(P_i^* - P_i)^2}{P_i}, \tag{25}$$

где r - число разрядов вариационного ряда.

К.Пирсон показал, что распределение случайной величины u при достаточно больших N приближается к распределению хи-квадрат и не зависит ни от функции распределения случайной величины $F(x)$, ни от объема выборки N. Это распределение имеет единственный параметр ν, называемый числом степеней свободы. Оно равно числу разрядов вариационного ряда r минус число независимых условий, наложенных на относительные частоты P_i^*. Одним из примеров таких условий для всех законов распределения является условие

$$\sum_{i}^{r} P_i^* = 1. \tag{26}$$

На практике число степеней свободы определяется по формуле

$$\nu = r - \gamma - 1 , \qquad (27)$$

где γ - число параметров, описывающих функцию распределения.

Для удобства расчета значения хи-квадрат критерия формула (25) может быть преобразована к виду

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - NP_i)^2}{NP_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n_i^o)^2}{n_i^o} , \qquad (28)$$

где n_i^o, n_i - соответственно гипотетические и экспериментальные частоты случайной величины в i-ом разряде.

Вычисленное значение хи-квадрат критерия сравнивается с табличным (критическим), которое находится с помощью табл.3п при известном числе степеней свободы ν и заданном уровне значимости α.

Если экспериментальное значение χ^2, вычисленное по формуле (28), превосходит критическую величину $\chi^2_{кр}$, то результаты опыта следует считать противоречащими гипотезе о законе распределения и она отклоняется. В противном случае, когда $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, основания для отклонения нулевой гипотезы отсутствуют.

Приведенная процедура проверки статистических гипотез с помощью χ^2- критерия показывает, что этот критерий достаточно нагляден и универсален. Его можно использовать для проверки любых статистических гипотез о законах распределения. Очевидно, указанные достоинства критерия (в первую очередь его универсальность) послужили причиной его широкого распространения.

Недостатком хи-квадрат критерия является то, что его можно использовать для проверки гипотез о законах распределения только при больших объемах выборки. Кроме того, число вариант в каждом разряде вариационного ряда должно быть достаточно большим (как минимум пять). Если некоторый разряд вариационного ряда содержит меньшее число вариант, то его объединяют с соседним разрядом. Такая группировка исходного статистического материала приводит к некоторому произволу в определении хи-квадрат критерия, что иногда оказывает влияние на конечный результат проверки статистических гипотез.

Рекомендуется следующий порядок проверки статистических гипотез о законе распределения выборки:

I. Диапазон изменения случайной величины $x_{min}; x_{max}$ разделить на r частичных интервалов. Обычно число r определяется по формуле

$$r = 1 + 3.2 \cdot \lg N \qquad (29)$$

и округляется до ближайшего целого.

2. Определить экспериментальные частоты вариант n_i, где i = (I, 2, 3, ..., r).

3. Провести анализ исходного вариационного ряда и, если в каком-либо из его интервалов число вариантов окажется меньше пяти, объединить его с соседним интервалом.

4. Найти оценки математического ожидания $\bar{x}$ и среднеквадратического отклонения выборки S.

5. Провести нормировку значений случайной величины на границах интервалов вариационного ряда по формуле

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} , \qquad (30)$$

считая, что $\mu = \bar{x}$ и $\sigma = S$. При этом начало первого интервала z_1 отнести в ($-\infty$), а конец последнего интервала - z_r - в ($+\infty$).

6. С помощью таблицы Iп вычислить гипотетическую вероятность попадания случайной величины x в i -й интервал

$$P_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1}) . \qquad (31)$$

7. Вычислить экспериментальное значение χ^2 - критерия и число степеней свободы ν.

8. При заданном уровне значимости α и найденном числе степеней свободы ν с помощью табл. 3п найти критическое значение $\chi^2_{кр}$.

9. Сравнить вычисленное значение χ^2 с критической величиной $\chi^2_{кр}$. Если $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то гипотеза о законе распределения не противоречит экспериментальным данным. В противном случае, когда $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, гипотеза о законе распределения отвергается.

9. Проверка статистической гипотезы о нормальном законе распределения с помощью χ^2 - критерия Пирсона

В инженерной практике исключительно широкое распространение получил нормальный закон распределения. Причины популярности нормального закона распределения в значительной мере обусловлены центральной предельной теоремой, смысл которой сводится к следующему. Если случайная величина x представляет сумму большого числа независимых величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то x имеет распределение, близкое к нормальному. Так можно трактовать результат измерения различных параметров промышленных объектов, например, парогенератора. Поэтому гипотеза о нормальности закона распределения таких параметров как температура и давление перегретого пара на выходе из парогенератора практически всегда подтверждается.

Функция распределения $F(x)$ случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения, имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]dx. \tag{30}$$

Произведя в выражении (30) замену переменной

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=z, \tag{31}$$

приведем его к виду

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma}exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz. \tag{32}$$

Значение интеграла (32) можно найти с помощью нормированной функции распределения $\Phi(x)$, значения которой приведены в табл.Iп.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz. \tag{33}$$

Выразим функцию распределения (30) с параметрами μ и σ через функцию $\Phi(x)$. Очевидно

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{34}$$

Таким образом, функцию распределения с произвольными параметрами μ и σ можно выразить через стандартную функцию распределения $\Phi(x)$ соответствующую нормальному закону с параметрами распределения $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью распределения вероятностей вида:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{35}$$

В статистических таблицах обычно приводятся нормированные значения функции

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \tag{36}$$

С помощью этой функции можно найти плотность распределения вероятностей для случайной величины с произвольными параметрами μ и σ

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}f_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}f_0(z). \tag{37}$$

Проверку гипотезы о нормальности закона распределения обычно проводят с помощью χ^2 -критерия. Покажем это на конкретном примере.

Пример 4.. На некоторой ТЭЦ в течение 200 суток ($N = 200$) регистрировалась среднесуточная температура воздуха на входе дутьевого вентилятора. Результаты наблюдений представлены в табл.2, где в первом столбце указан номер интервала, во втором - диапазон изменения температуры, в третьем - количество дней, среднесуточная температура которых n_i (частота) принадлежит интервалу $(x_i - x_{i+1})$.

На основе экспериментальных данных табл.2 требуется построить статистическую модель, ставящую в соответствие среднесуточную температуру воздуха с ее вероятностью.

Решение. Так как отсутствуют какие-либо априорные сведения о характере распределения температуры в районе расположения ТЭЦ, то проверим гипотезу о нормальном законе распределения среднесуточной температуры воздуха.

Для этого вычислим оценку математического ожидания

$$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}x_i^*n_i=5,35.$$

Таблица 2

i	x_i	x_{i+1}	n_i	x_i^*	$n_i x_i^*$	S_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i^o	χ_i^2
I	2		3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3
I	-40	-30	23	-35	-305	37447	-	-I,36	0,000	0,087	0,087	I7,4	I,800
2	-30	-20	I9	-25	-475	I750I	-I,36	-I,I7	0,087	0,I65	0,078	I5,6	0,74I
3	-20	-I0	25	-I5	-375	I0353	-I,I7	-0,59	0,I65	0,278	0,II3	22,6	0,255
4	-I0	0	20	-5	-I00	2I42	-0,59	-0,2I	0,278	0,4I7	0,I39	27,8	2,I88
5	0	I0	24	5	I20	3	-0,2I	0,0I4	0,4I7	0,504	0,087	I7,4	2,503
6	I0	20	20	I5	300	I862	0,0I4	0,37	0,504	0,644	0,I40	28,0	2,286
7	20	30	22	25	550	8495	0,37	0,76	0,644	0,776	0,I32	26,4	0,733
8	30	40	26	35	9I0	22857	0,76	I,I4	0,776	0,873	0,097	I9,4	2,245
9	40	50	2I	45	945	330I5	I,I4	∞	0,873	I	0,I27	25,4	0,762

$\bar{x}$ = 5,35 S = 25,9 α = 0,05 ν = 6 . $\chi^2_{кр}$ = I2,6 $\chi^2_{экс}$ = I3;5

где N = 200 - число измерений;

z - число интервалов;

x_i^* - варианта интервала.

Вычислим оценку среднеквадратического отклонения

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{z} S_i} = 25{,}9,$$

где $S_i = n_i (x_i^* - \bar{x})^2$ - частичная сумма.

Промежуточные результаты вычислений, используемые для определения оценок $\bar{x}$ и S , представлены в столбцах 4 - 6 табл.2.

Далее перейдем к нормированной случайной величине и вычислим концы интервалов

$$z_i = (x_i - \bar{x})/S ;$$

$$z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x})/S$$

при этом наименьшее значение равно $z_{min} = z_I = -\infty$, а наибольшее значение - $z_{max} = z_9 = \infty$.

Результаты расчетов приведены в табл.2 (столбцы 7 и 8).

С помощью табл.Iп найдем гипотетические вероятности попадания случайной величины в интервал (x_i ; x_{i+1})

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i).$$

Значения P_i , $\Phi(z_i)$ и $\Phi(z_{i+1})$ приведены в табл.2 (столбцы 9-II).

Вычислим гипотетические частоты (столбец I2)

$$n_i^o = N P_i .$$

Вычислим экспериментальное значение хи-квадрат критерия

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{9} (n_i - n_i^o)^2 / n_i^o = 13.5 .$$

Найдем число степеней свободы

$$\nu = z - \gamma - I = 9 - 2 - I = 6.$$

При уровне значимости α = 0,05 и числе степеней свободы ν = 6 с помощью табл.3п найдем критическое значение

$$\chi^2_{кр}(\alpha ; \nu) = \chi^2_{кр}(0,05 ; 6) = \chi^2_{кр} = 12,6 .$$

Сравним экспериментальное и критическое значения хи-квадрат критерия.

Так как $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то гипотеза о нормальном распределении среднесуточной температуры воздуха не согласуется с экспериментальными наблюдениями и она отвергается.

10. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения с помощью W - критерия

Как ранее отмечалось, для проверки допущений о модели распределения разработано множество критериев согласия. Эффективность проверки конкретной нулевой гипотезы с помощью того или иного критерия оценивается мощностью критерия (вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза)

$$P_\beta = 1 - \beta, \tag{38}$$

где β - вероятность ошибки второго рода.

Очевидно, что при проверке конкретной гипотезы, всегда предпочтительней более мощный критерий согласия.

Для наиболее часто встречающихся в инженерной практике нормального и экспоненциального распределений наиболее мощным критерием является W - критерий, разработанный С.Шапиро и М.Уилком в 1965г. Применение этого критерия особенно предпочтительно при весьма ограниченных выборках случайной величины ($N \leq 50$).

Для определения экспериментального значения W - критерия необходимо:

1. Исходную выборку случайных чисел упорядочить в соответствии с условием

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_N. \tag{39}$$

2. Вычислить оценки математического ожидания $\bar{x}$ и суммарную дисперсию выборки

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i ; \tag{40}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2 N. \tag{41}$$

3. Вычислить сумму взвешенных разностей выборки.

Если выборка состоит из четного числа вариант, то статистический параметр λ определяется по формуле

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i\,(x_{N-i+1} - x_i) = \tag{42}$$

$$= a_1(x_N - x_1) + a_2(x_{N-1} - x_2) + \cdots + a_m(x_{m+1} - x_m),$$

где a_i - значения коэффициентов для $i = 1, 2, \ldots, m$ берутся из табл. 4п.

При этом число коэффициентов $m = N/2$.

Если объем выборки состоит из нечетного числа вариант, то статистический параметр λ определяется по формуле

$$\lambda = a_1(x_N - x_1) + a_2(x_{N-1} - x_2) + \cdots + a_m(x_{m+2} - x_m). \tag{43}$$

В этом случае значения коэффициентов a_i для $i = 1, 2, \ldots, m$ также берутся из табл. 4п, однако число коэффициентов m определяется как $m = (N-1)/2$.

Заметим, что, если N - нечетное число, то при вычислении суммы взвешенных разностей λ варианта выборки x_{m+1} не используется.

4. Вычислить значение W - критерия

$$W = \lambda^2 / S^2 \tag{44}$$

и сравнить его с минимальным значением W_{min}, которое находится с помощью табл. 5п. Эта таблица содержит минимальные значения W- критерия, которые соответствуют заданному объему выборки и вероятности P при условии справедливости гипотезы о нормальном законе распределения. Из табл. 5п видно, что чем меньше значение W - критерия, тем меньше вероятность того, что выборка взята из генеральной гипотетической совокупности, распределенной по нормальному закону. Например, если вычисленное значение критерия меньше 5% - ного табличного значения, то гипотеза о том, что выборка взята из нормально распределенной генеральной совокупности отвергается как маловероятная (вероятность не превышает значения 0,05). Таким образом, сравнение вычисленного значения W - критерия с его табличным (минимальным) значением позволяет оценить максимальный риск принятия неправильной гипотезы.

Если вычисленное значение W - критерия больше, например, 10% - ного табличного значения, то это свидетельствует о том, что вероятность справедливости нулевой гипотезы равна, как минимум, P = 0,10. Несмотря на малость этой величины нулевая гипотеза принимается, так как P = 0,01 - есть нижняя граница вероятности, которая найдена при небольшом объеме выборки ($N \leq 50$).

В тех случаях, когда проверяется гипотеза именно о нормальном законе распределения, вычисленное значение W - критерия может быть использовано для определения вероятности справедливости нулевой гипотезы. Действительно, минимальному значению W - критерия можно поставить в соответствие значение нормированной нормальной случайной величины Z . Это значение определяется (приближенно) с помощью следующей эмпирической формулы

$$Z = a \ln\left(\frac{W - b}{1 - W}\right) - c; \qquad (45)$$

где a, b, c - коэффициенты, которые для различного объема выборки имеют значения, приведенные в табл.6п.

Далее с помощью табл.1 определяется вероятность получить значение нормированной нормальной случайной величины, меньшее или равное Z . Полученная таким образом величина вероятности и есть вероятность того, что выборка принадлежит нормально распределенной генеральной совокупности.

Рассмотренная процедура проверки гипотезы справедлива также для логарифмически нормального распределения. Правомерность такого вывода объясняется тем, что если логарифмы вариант подчинены нормальному закону распределения, то сами варианты имеют нормальное распределение.

Пример 5. На основе косвенного измерения теплового эффекта клинкерообразования портландцементных смесей была получена выборка случайных чисел объемом N = 50, которая после упорядочения представлена в табл.3.

Таблица 3

i	x_i кДж/кг	i	x_i кДж/кг	a_i
1	1836,9	50	1798,3	0,375
2	1834,8	49	1805,5	0,257
3	1833,1	48	1806,7	0,226
4	1832,7	47	1806,7	0,203
5	1832,3	46	1807,1	0,185
6	1832,3	45	1808,8	0,169
7	1831,9	44	1809,2	0,155
8	1830,6	43	1809,7	0,143
9	1829,4	42	1810,9	0,132
10	1829,0	41	1812,6	0,121
11	1828,5	40	1815,1	0,111
12	1828,5	39	1815,1	0,102
13	1828,1	38	1816,4	0,093
14	1828,1	37	1817,2	0,085
15	1827,3	36	1817,6	0,076
16	1826,8	35	1819,3	0,069
17	1826,4	34	1820,1	0,061
18	1826,0	33	1820,1	0,053
19	1825,2	32	1820,6	0,046
20	1824,3	31	1820,6	0,039
21	1824,3	30	1821,0	0,031
22	1824,3	29	1821,8	0,024
23	1823,9	28	1822,7	0,017
24	1823,9	27	1823,1	0,010
25	1823,1	26	1823,1	0,004

Требуется с помощью W - критерия проверить гипотезу о принадлежности выборки случайных чисел к нормально распределенной генеральной совокупности.

Вычислим оценку математического ожидания теплового эффекта

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = 1821,8 \text{ кДж/кг}.$$

Вычислим оценку суммарной дисперсии выборки

$$S^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i)^2 - \bar{x}^2 N = 3871,1 \ [\text{кДж/кг}]^2.$$

С помощью формулы (42) найдем значение параметра λ

$$\lambda = \sum_{i=1}^{50} a_i (x_{50-i+1} - x_i) = 61,8 \text{ кДж/кг}.$$

Значения коэффициентов a_i, взятые из табл.4п при $N = 50$, для удобства расчета помещены в последний столбец табл.3.

Далее вычисляем значение W - критерия

$$W = \lambda^2 / S^2 = 0,987.$$

Вычисленное значение W - критерия больше 50% - ного табличного минимального значения $W_{min} = 0,971$. Следовательно, вероятность того, что выборка взята из нормально распределенной генеральной совокупности, превышает значение 0,50. С помощью формулы (45) вычислим приближенную вероятность справедливости нулевой гипотезы. Для этого из табл.6п выберем значения коэффициентов a, b, c при $N = 50$

$$a = 2,212; \quad b = 0,144; \quad c = 7,677.$$

Найдем значение нормированной нормально распределенной случайной величины соответствующее вычисленному значению W- критерия

$$z = 2,212 \ln\left(\frac{0,987 - 0,144}{1 - 0,987}\right) - 7,677 = 1,37.$$

Из таблицы значений интегральной функции нормированного нормального распределения по z находим

$$P\{z \le 1,37\} = 0,915.$$

Это весьма высокая вероятность. Поэтому, учитывая ограниченный объем выборки $N = 50$, можно сделать вывод, что изменение теплового эффекта клинкерообразования достаточно точно описывается нормальным распределением, т.е. нулевая гипотеза принимается.

II. Проверка статистических гипотез о законах распределения, отличных от нормального

Физические явления, подчиняющиеся вероятностным закономерностям, описываются не только нормальным, но и многими другими законами распределения: равномерным, биноминальным, показательным и т.д. Проверка гипотез об этих законах распределения также может быть выполнена с помощью хи-квадрат критерия, аналогично пп.8,9. Однако при этом возникают некоторые особенности, связанные со спецификой предполагаемых законов распределения и определением их параметров.

В качестве примера рассмотрим задачу проверки гипотезы о равномерном распределении. Это распределение широко используется в теории планирования эксперимента при рандомизации матриц планирования. Этим распределением описываются ошибки округления различных измерений и т.д.

Распределение называют равномерным, если плотность вероятностей случайной величины x постоянна на некотором участке и равна нулю вне этого участка.

Выпишем основные характеристики равномерного распределения. Плотность вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } a \le x \le b; \\ 0 & \text{при } x < a;\ x > b. \end{cases} \tag{46}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{b+a}{2}; \\ \sigma^2 &= \frac{(b-a)^2}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если известны оценки математического ожидания и дисперсии равномерно распределенной случайной величины $\bar{x}$ и S^2, то, подставив их вместо μ и σ в (47), можно найти оценки параметров

$$\left.\begin{aligned} a^* &= \bar{x} - \sqrt{3}\cdot S; \\ b^* &= \bar{x} + \sqrt{3}\cdot S. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Последовательность проверки гипотезы о равномерном законе распределения случайной величины x с помощью хи-квадрат критерия следующая.

I. Построить вариационный ряд и найти оценки математического ожидания $\bar{x}$ и дисперсии случайной величины.

2. Найти оценки параметров распределения a^*, b^* и вычислить плотность вероятности

$$f(x) = 1/(b^* - a^*). \tag{49}$$

3. Найти теоретические частоты

$$\begin{aligned} n_1^\circ &= f(x)\cdot(x_1 - a^*)N; \\ n_2^\circ &= n_3^\circ = \dots = n_{r-1}^\circ = f(x)\cdot(x_i - x_{i-1})N; \\ n_r^\circ &= f(x)\cdot(b^* - x_{r-1})N, \end{aligned} \tag{50}$$

где $i = 2,3,\dots, r - I$;

r - число частичных интервалов вариационного ряда;

N - объем выборки.

4. Найти число степеней свободы

$$\nu = r - 3 .$$

5. Вычислить экспериментальное значение хи-квадрат критерия и при заданном уровне значимости сравнить его с критическим значением $\chi^2_{кр}$, найденного с помощью табл.3п.

Пример 6. В предыдущем примере проверялась гипотеза о нормальности закона распределения среднесуточной температуры воздуха, которая была отвергнута (исходные данные приведены в табл.2).

Для выдвижения новой гипотезы о законе распределения среднесуточной температуры воздуха построим гистограмму частот исходной выборки (рис.3).

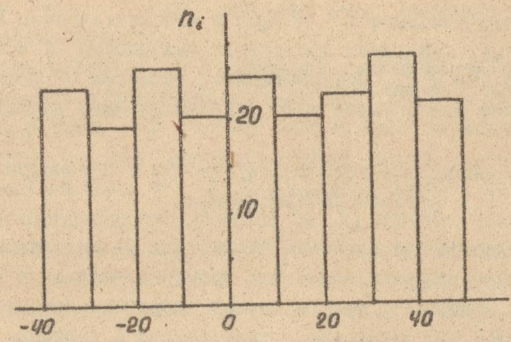

Рис. 3

Характер гистограммы частот позволяет выдвинуть гипотезу о равномерном законе распределения случайной величины.

Для проверки этой гипотезы оценим параметры распределения по формулам (48)

$$a^* = 5{,}35 - \sqrt{3}\cdot 25{,}9 = -39{,}5;$$
$$b^* = 5{,}35 + \sqrt{3}\cdot 25{,}9 = 50{,}2.$$

По формуле (49) найдем плотность вероятности гипотетического распределения

$$f(x) = \frac{I}{50{,}2 + 39{,}5} = 0{,}0II,$$

Согласно соотношениям (50) вычисляем гипотетические частоты

$$\begin{aligned} n_1^\circ &= 0{,}0II\,(-30 + 39{,}5)\,200 = 20{,}9; \\ n_2^\circ &= 0{,}0II\,(30 - 20)\,200 = 22; \\ n_3^\circ &= n_4^\circ = \dots = n_8^\circ = n_2^\circ = 22; \\ n_9^\circ &= 0{,}0II\,(50{,}2 - 40)\,200 = 22{,}4. \end{aligned}$$

Определим экспериментальное значение χ^2- критерия

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{9} (n_i - n_i^\circ)^2/n_i^\circ = 2{,}39.$$

Сравнивая значение $\chi^2 = 2,39$ с его критическим значением $\chi^2_{кр} = 12,6$, найденным при уровне значимости $\alpha = 0,05$, убеждаемся, что $\chi^2 < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза о равномерном распределении согласуется с экспериментальными данными и принимается.

12. Проверка статистических гипотез о параметрах законов распределения

Необходимость в проверке параметров распределений на практике встречается гораздо чаще, чем проверка гипотез о законе распределения. Например, при различных нагрузках парогенератора (не ниже 50%) его параметры - температура и давление перегретого пара, как правило, имеют нормальный закон распределения. Однако такой параметр, как дисперсия, существенно изменяется в зависимости от нагрузки парогенератора, схемы регулирования температуры и давления перегретого пара и от ряда других причин.

Проверка гипотез о параметрах распределений основана на тех же правилах, что и проверка гипотез о законах распределения.

Проверка гипотезы о равенстве математического ожидания заданному значению.

Эта задача часто возникает при градуировке задатчиков различных АСР, при моделировании случайных сигналов, а также при оценке значимости коэффициентов уравнений регрессии.

Предположим, что закон распределения некоторой случайной величины X известен. По выборке объема N проведена оценка математического ожидания случайной величины $\bar{x}$. Требуется проверить гипотезу о равенстве математического ожидания μ некоторой постоянной величине a, т.е. проверяется гипотеза о равенстве $\bar{x} = \mu = a$.

В этом случае в качестве критерия проверки гипотезы используется t - критерий, т.е. случайная величина

$$t = \sqrt{N}\left(\frac{\bar{x} - a}{S}\right). \qquad (51)$$

распределенная по закону Стьюдента с $\nu - 1$ степенями свободы. При проверке нулевой гипотезы о равенстве $\mu = a$ строится двусторонняя критическая область, если конкурирующей гипотезой является гипотеза $\mu \neq a$. Если же конкурирующей гипотезой является гипотеза $\mu < a$ или $\mu > a$, то строится односторонняя критическая область.

Критические значения t - критерия приведены в табл.7п.

Нулевая гипотеза принимается, если значение t - критерия, вычисленное по формуле (51), меньше критической величины $t_{кр}$, найденной из табл.7п при соответствующем уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu - 1$. В противном случае, когда величина t больше критического значения $t_{кр}$, нулевая гипотеза отвергается как противоречащая экспериментальным данным.

Пример 7. Одноконтурная АСР должна поддерживать заданную температуру перегретого пара на выходе парогенератора, равную значению $\mu = 540^{\circ}C$.

По десяти независимым измерениям температуры перегретого пара найдены оценки математического ожидания $\bar{x} = 546^{\circ}C$ и среднеквадратического отклонения $S = 6,1^{\circ}C$.

Требуется выяснить причины отклонения оценки $\bar{x}$ от заданного значения, т.е. необходимо выяснить вопрос, можно ли наблюдаемое отклонение

$$\Delta x = \mu - \bar{x} = 6^{\circ}C$$

объяснить случайным разбросом из-за ограниченного числа измерений или задатчик регулятора температуры пара неправильно отградуирован.

Для решения этой задачи проверим гипотезу о равенстве математического ожидания заданному значению температуры пара, т.е. $\mu = 540^{\circ}C$.

Вычислим экспериментальное значение t - критерия

$$t = \sqrt{N}\left(\frac{\bar{x} - \mu}{S}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{546 - 540}{6,1}\right) = 3,28.$$

В табл. 7п находим критическое значение t - критерия

$$t_{кр}(\alpha, \nu) = t_{кр}(0,05; 9) = 2,26.$$

Из сравнения вычисленного значения t - критерия с его критической величиной выясняем, что $t > t_{кр}$. Следовательно, гипотеза о равенстве математического ожидания величине 540°C противоречит экспериментальным данным и она отвергается, т.е. отмеченное отклонение оценки $\bar{x}$ от заданного значения температуры нельзя объяснить погрешностью измерения математического ожидания. Весьма вероятно, что причиной отклонения оценки $\bar{x}$ от заданного значения температуры пара является неправильная градуировка задатчика регулятора.

Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий

По данным независимых испытаний получено две выборки объемом соответственно N_1 и N_2 и найдены оценки их дисперсий S_1^2 и S_2^2 со степенями свободы $\nu_1 = N_1 - 1$ и $\nu_2 = N_2 - 1$. На основе сравнения оценок дисперсий требуется решить вопрос о принадлежности указанных выборок одной и той же генеральной совокупности

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

Для проверки этой гипотезы используется F - критерий Фишера, распределение которого зависит лишь от числа степеней свободы.

Величина F - критерия определяется отношением

$$F = \begin{cases} S_1^2/S_2^2 & \text{при } S_1^2 > S_2^2; \\ S_2^2/S_1^2 & \text{при } S_1^2 < S_2^2. \end{cases} \qquad (52)$$

Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ необходимо построить критическую область F - критерия. Эта область состоит из области больших отклонений, удовлетворяющих неравенству $F > F_{кр2}$ и области малых отклонений, удовлетворяющих неравенству $0 < F < F_{кр1}$.

При этом критические точки для заданного уровня значимости подбираются так, что

$$P(F > F_{кр}) = \alpha/2 \quad и \quad P(F < F_{кр}) = \alpha/2.$$

Распределение обладает следующим свойством: левосторонняя критическая точка F - распределения соответствует правосторонней критической точке $F^* = 1/F$ - распределения, т.е. для определения критических значений $F_{кр1}$, $F_{кр2}$ необходимо найти только правые точки F и F^* - распределений.

С учетом этого свойства табулированы лишь правые критические точки распределения Фишера (табл.8п).

Процедура проверки нулевой гипотезы состоит в сравнении вычисленного значения F - критерия с его критической величиной. Если $F > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается, если $F < F_{кр}$, то гипотеза не противоречит экспериментальным данным и она

принимается.

Пример 8. По работе одноконтурной АСР в условиях действия реальных возмущающих воздействий по выборке объема $N = 41$ вычислена оценка дисперсии $S^2 = 143$. Расчетное значение дисперсии, найденное из условия ее минимума при оптимальных настройках АСР, равно $\sigma^2 = 110$.

Выяснить причины отклонения экспериментальной оценки дисперсии от ее расчетного значения.

Решение. Отклонение оценки дисперсии S^2 от расчетного значения σ^2 может быть вызвано или ограниченностью экспериментального материала, или неточностью реализации оптимальных настроек регулятора. Чтобы выяснить какая из причин имеет место, проверим гипотезу о равенстве экспериментальной и расчетной оценок дисперсий.

Вычислим значение критерия Фишера

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{143}{110} = 1,3.$$

С помощью табл.8п для $\nu_1 = 40$ и $\nu_2 = \infty$ находим критическое значение

$$F_{кр}(\alpha/2; \nu_1; \nu_2) = F_{кр}(0,025; 40; \infty) = 1,7.$$

Так как $F < F_{кр}$, то данные выборки не противоречат нулевой гипотезе о равенстве дисперсий, т.е. отклонение экспериментальной оценки дисперсии от ее расчетного значения вызвано ограниченностью объема выборки.

Пример 9. При работе двух различных АСР давления перегретого пара получены две выборки независимых измерений давления пара объемом $N_1 = N_2 = 41$ и найдены оценки дисперсий $S_1^2 = 10$ [МПа]^2, $S_2^2 = 20,7$ [МПа]^2.

На основе этих данных требуется принять решение о вводе в эксплуатацию одной из рассматриваемых АСР.

Основанием для принятия решения может служить результат проверки гипотезы о равенстве дисперсий $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Решение. Найдем дисперсионное отношение

$$F = S_2^2/S_1^2 = 20,7/10 = 2,07.$$

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ из табл.8п найдем критическое значение F - критерия

$$F_{кр}(\alpha/2;\ 40;\ 40) = F_{кр}(0{,}025;\ 40;\ 40) = 1{,}88.$$

Так как вычисленное значение критерия Фишера больше его критической величины ($F > F_{кр}$), то гипотеза о равенстве дисперсий отвергается как противоречащая экспериментальным данным. Следовательно, разницу в оценках дисперсий S_1^2 и S_2^2 нельзя объяснить лишь случайным разбросом из-за ограниченности экспериментального материала и из двух АСР выбираем первую, так как она обеспечивает меньшее значение дисперсии.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I п

Значения интегральной функции нормированного нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} exp(-t^2/2)dt$$

0,512
1-0,512

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
I	2	3	4	5	6
0,00	0,500	0,60	0,726	I,20	0,885
0,02	508	0,62	732	I,22	889
0,04	5I6	0,64	739	I,24	893
0,06	524	0,66	745	I,26	896
0,08	532	0,68	752	I,28	900
0,I0	0,540	0,70	0,758	I,30	0,903
0,I2	548	0,72	764	I,32	907
0,I4	556	0,74	770	I,34	9I0
0,I6	564	0,76	776	I,36	9I3
0,I8	57I	0,78	782	I,38	9I6
0,20	0,579	0,80	0,788	I,40	0,9I9
0,22	587	0,82	794	I,42	922
0,24	595	0,84	800	I;44	925
0,26	603	0,86	805	I,46	928
0,28	6I0	0,88	8II	I,48	93I
0,30	0,6I8	0,90	0,8I6	I,50	0,933
0,32	625	0,92	82I	I,52	936
0,34	633	0,94	826	I,54	938
0,36	64I	0,96	832	I,56	94I
0,38	648	0,98	837	I,58	943
0,40	0,655	I,00	0,84I	I,60	0,945
0,42	663	I,02	846	I,65	95I
0,44	670	I,04	85I	I,70	955
0,46	677	I,06	855	I,80	964
0,48	684	I,08	860	I,90	97I

Продолжение таблицы Iп

I	2	3	4	5	6
0,50	0,692	I,I0	0,864	2,00	0,977
0,52	699	I,I2	869	2,20	986
0,54	705	I,I4	873	2,50	994
0,56	7I2	I,I6	877	3,00	999
0,58	722	I,I8	88I	3,50	I,000
-0,00	0,500	-0,60	0,274	-I,20	0,II5
-0,02	492	-0,62	268	-I,22	III
-0,04	484	-0,64	26I	-I,24	I08
-0,06	476	-0,66	255	-I,26	I04
-0,08	468	-0,68	248	-I,28	I00
-0,I0	0,460	-0,70	0,242	-I,30	0,097
-0,I2	452	-0,72	236	-I,32	093
-0,I4	444	-0,74	230	-I,34	090
-0,I6	436	-0,76	224	-I,36	087
-0,I8	429	-0,78	2I8	-I,38	084
-0,20	0,42I	-0,80	0,2I2	-I,40	0,08I
-0,22	4I3	-0,82	206	-I,42	078
-0,24	405	-0,84	20I	-I,44	075
-0,26	397	-0,86	I95	-I,46	072
-0,28	390	-0,88	I89	-I,48	069
-0,30	0,382	-0,90	0,I84	-I,50	0,067
-0,32	375	-0,92	I79	-I,52	064
-0,34	367	-0,94	I74	-I,54	062
-0,36	359	-0,96	I69	-I,56	059
-0,38	35I	-0,98	I64	-I,58	057
-0,40	0,345	-I,00	0,I59	-I,60	0,055
-0,42	337	-I,02	I54	-I,65	050
-0,44	330	-I,04	I49	-I,70	045
-0,46	323	-I,06	I45	-I,80	036
-0,48	3I6	-I,08	I40	-I,90	029
-0,50	0,309	-I,I0	0,I36	-2,00	0,023
-0,52	302	-I,I2	I3I	-2,20	0I4
-0,54	295	-I,I4	I27	-2,50	006
-0,56	288	-I,I6	I23	-3,00	00I
-0,58	28I	-I,I8	II9	-3,50	000

Таблица 2п

Значения плотности вероятности нормированного нормального распределения

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2)$$

z	0	2	4	6	8
I	2	3	4	5	6
0,0	0,399	0,399	0,398	0,398	0,398
0,I	397	396	395	394	393
0,2	39I	389	388	386	384
0,3	38I	379	377	374	37I
0,4	368	365	362	359	356
0,5	0,352	0,349	0,345	0,34I	0,337
0,6	333	329	325	32I	3I7
0,7	3I2	308	303	299	294
0,8	290	285	280	276	27I
0,9	266	26I	257	252	247
I,0	0,242	0,237	0,232	0,228	0,223
I,I	2I8	2I3	208	204	I99
I,2	I90	I85	I80	I76	I76
I,3	I7I	I67	I63	I58	I54
I,4	I50	I46	I42	I37	I33
I,5	0,I30	0,I26	0,I22	0,II8	0,II5
I,6	III	I07	I04	I0I	097
I,7	094	09I	088	085	082
I,8	079	076	073	07I	068
I,9	066	063	06I	058	056
2,0	0,054	0,052	0,050	0,048	0,046
2,I	044	042	040	039	037
2,2	036	034	033	03I	030
2,3	028	027	026	025	024
2,4	022	02I	020	0I9	0I8

Продолжение таблицы 2п

	0				
I	2	3	4	5	6
2,5	0,0I8	0,0I7	0,0I6	0,0I5	0,0I4
2,6	0I4	0I3	0I2	0I2	0II
2,7	0I0	0I0	009	009	008
2,8	008	008	007	007	006
2,9	006	006	005	005	005
3,0	004	004	004	004	0035

Таблица 3 п

Критические значения χ^2 - распределения

ν	Уровень значимости α					
	0,01	0,05	0,10	0,90	0,95	0,99
1	6,6	3,8	2,7	0,016	0,004	0,0002
2	9,2	6,0	4,6	0,211	0,103	0,020
3	11,3	7,8	6,3	0,584	0,352	0,115
4	13,3	9,5	7,8	1,064	0,711	0,297
5	15,1	11,1	9,2	1,610	1,145	0,554
6	16,8	12,6	10,6	2,2	1,6	0,87
7	18,5	14,1	12,0	2,8	2,2	1,24
8	20,1	15,5	13,4	3,5	2,7	1,65
9	21,7	16,9	14,7	4,2	3,3	2,09
10	23,2	18,3	16,0	4,9	3,9	2,56
11	24,7	19,7	17,3	5,6	4,6	3,1
12	26,2	21,0	18,5	6,3	5,2	3,6
13	27,7	22,4	19,8	7,0	5,9	4,1
14	29,1	23,7	21,1	7,8	6,6	4,7
15	30,6	25,0	22,3	8,5	7,3	5,2
16	32,0	26,3	23,5	9,3	8,0	[illegible]
17	33,4	27,6	24,8	10,1	8,7	6,4
18	34,8	28,9	26,0	10,9	9,4	7,0
19	36,2	30,1	27,2	11,7	10,1	7,6
20	37,6	31,4	28,4	12,4	10,9	8,3
21	38,9	32,7	29,6	13,2	11,6	8,9
22	40,3	33,9	30,8	14,0	12,3	9,5
23	41,6	35,2	32,0	14,8	13,1	10,2
24	43,0	36,4	33,2	15,7	13,8	10,9
25	44,3	37,7	34,4	16,5	14,6	11,5
30	50,9	43,8	40,3	20,6	18,5	15,0
35	57,3	49,8	46,1	24,8	22,5	18,5
40	63,7	55,8	51,8	29,1	26,5	22,2
45	70,0	61,7	57,5	33,4	30,6	25[illegible]
50	76,2	67,5	63,2	37,7	34,8	29,7

Таблица 4 п

Значения коэффициентов a_i, используемых для вычисления W - критерия

i \ N	3	4	5	6	7	8	9
1	0,707	0,687	0,665	0,643	0,623	0,605	0,589
2		0,168	0,241	0,281	0,303	0,316	0,324
3				0,088	0,140	0,174	0,198
4						0,056	0,095

i \ N	10	11	12	13	14	15	16
1	0,574	0,560	0,548	0,536	0,525	0,515	0,506
2	0,329	0,332	0,333	0,333	0,332	0,331	0,329
3	0,214	0,226	0,235	0,241	0,246	0,250	0,252
4	0,122	0,143	0,159	0,171	0,180	0,188	0,194
5	0,040	0,070	0,092	0,110	0,124	0,135	0,145
6			0,030	0,054	0,073	0,088	0,101
7					0,024	0,043	0,059
8							0,020

Продолжение таблицы 4 п

i \ N	I7	I8	I9	20	30	40	50
I	0,497	0,489	0,48I	0,473	0,425	0,396	0,375
2	0,327	0,325	0,323	0,32I	0,294	0,274	0,257
3	0,254	0,255	0,256	0,257	0,249	0,237	0,226
4	0,I99	0,203	0,206	0,209	0,2I5	0,2I0	0,203
5	0,I52	0,I59	0,I64	0,I69	0,I87	0,I88	0,I85
6	0,III	0,I20	0,I27	0,I33	0,I63	0,I69	0,I69
7	0,073	0,084	0,093	0,I0I	0,I42	0,I53	0,I55
8	0,036	0,050	0,06I	0,07I	0,I22	0,I38	0,I43
9		0,0I6	0,030	0,042	0,I04	0,I24	0,I32
I0				0,0I4	0,086	0,III	0,I2I
II					0,070	0,099	0,III
I2					0,054	0,087	0,I02
I3					0,038	0,076	0,093
I4					0,023	0,065	0,085
I5					0,008	0,055	0,076
I6						0,044	0,069
I7						0,034	0,06I
I8						0,024	0,053
I9						0,0I5	0,046
20						0,005	[illegible]
2I							0,03I
22							0,024
23							0,0I7
24							0,0I0
25							0,004

Таблица 5п

Минимальные значения W - критерия

N \ P	I	2	5	I0	50
3	0,753	0,756	0,767	0,789	0,959
4	687	707	748	792	935
5	686	7I5	762	806	927
6	7I3	743	788	826	927
7	730	760	803	838	928
8	749	778	8I8	85I	932
9	764	79I	829	859	935
I0	78I	806	842	869	938
II	792	8I7	850	876	940
I2	805	828	859	883	943
I3	8I4	837	866	889	945
I4	825	846	874	895	947
I5	835	855	88I	90I	950
I6	844	863	887	906	952
I7	85I	969	892	9I0	954
I8	858	874	897	9I4	956
I9	863	879	90I	9I7	957
20	868	884	905	920	959
25	888	90I	9I8	93I	964
30	900	9I2	927	939	967
35	9I0	920	934	944	969
40	9I9	928	940	949	972
45	926	934	945	953	973
50	930	938	947	955	974

Таблица 6 п

Значения коэффициентов, используемых для определения вероятности получения вычисленного значения W - критерия

N	а	в	с
3	0,386	0,750	0,625
4	0,7I4	0,630	I,I07
5	0,935	0,552	I,530
6	I,I38	0,496	2,0I0
7	I,245	0,453	2,356
8	I,333	0,4I9	2,696
9	I,400	0,390	2,968
I0	I,47I	0,366	3,262
II	I,5I5	0,345	3,485
I2	I,57I	0,327	3,73I
I3	I,6I3	0,3II	3,936
I4	I,655	0,297	4,I55
I5	I,695	0,284	4,373
I6	I,724	0,273	4,567
I7	I,739	0,262	4,7I3
I8	I,770	0,253	4,885
I9	I,786	0,244	5,0I8
20	I,802	0,236	5,I53
30	I,949	0,I72	6,I60
40	2,075	0,I6I	6,96I
50	2,2I2	0,I44	7,677

Таблица 7 п

Критические значения распределения Стьюдента

ν \ α	Двусторонняя критическая область			
	0,I0	0,05	0,02	0,0I
I	6,3I	I2,70	3I,82	63,70
2	2,92	4,30	6,97	9,92
3	2,35	3,I8	4,54	5,84
4	2,I3	2,78	3,75	4,60
5	2,0I	2,57	3,37	4,03
6	I,94	2,45	3,I4	3,7I
7	I,89	2,36	3,00	3,50
8	I,86	2,3I	2,90	3,36
9	I,83	2,26	2,82	3,25
I0	I,8I	2,23	2,76	3,I7
II	I,80	2,20	2,72	3,II
I2	I,78	2,I8	2,68	3,05
I3	I,77	2,I6	2,65	3,0I
I4	I,76	2,I4	2,62	2,98
I5	I,75	2,I3	2,60	2,95
I6	I,75	2,I2	2,58	2,92
I7	I,74	2,II	2,57	2,90
I8	I,73	2,I0	2,55	2,88
I9	I,73	2,09	2,54	2,86
20	I,73	2,09	2,53	2,85
2I	I,72	2,08	2,52	2,83
22	I,72	2,07	2,5I	2,82
23	I,7I	2,07	2,50	2,8I
24	I,7I	2,06	2,49	2,80
25	I,7I	2,06	2,49	2,79
26	I,7I	2,06	2,48	2,78
27	I,7I	2,05	2,47	2,77
28	I,70	2,05	2,46	2,76
29	I,70	2,05	2,46	2,76
30	I,70	2,04	2,46	2,75

Продолжение таблицы 7 п

ν \ α	Двусторонняя критическая область			
	0,I0	0,05	0,02	0,0I
40	I,68	2,02	2,42	2,70
60	I,67	2,00	2,39	2,66
I20	I,66	I,98	2,36	2,62
∞	I,64	I,96	2,33	2,58
ν \ α	0,05	0,025	0,0I	0,005
	Односторонняя критическая область			

Таблица 8 п

Критические точки F – распределения (при $\alpha = 0,05$)

ν_2 \ ν_1	3	4	5	6	7	8	9	I0
3	47,5	46,2	45,4	44,8	44,4	44,I	43,9	43,7
4	24,3	23,2	22,5	22,0	2I,6	2I,4	2I,I	2I,0
5	I6,5	I5,6	I4,9	I4,5	I3,2	I4,0	I3,8	I3,6
6	I2,9	I2,0	II,5	II,I	I0,8	I0,6	I0,4	I0,3
7	I0,9	I0,I	9,5	9,2	8,9	8,7	8,5	8,4
8	9,6	8,8	8,3	8,0	7,7	7,5	7,3	7,2
9	8,7	8,0	7,5	7,I	6,9	6,7	6,5	6,4
I0	8,I	7,3	6,9	6,5	6,3	6,I	6,0	5,8
II	7,6	6,9	6,4	6,I	5,9	5,7	5,5	5,4
I2	7,2	6,5	6,I	5,8	5,5	5,3	5,2	5,I
I3	6,9	6,2	5,8	5,5	5,3	5,I	4,9	4,8
I4	6,7	6,0	5,6	5,3	5,0	4,9	4,7	4,6
I5	6,5	5,8	5,4	5,I	4,8	4,7	4,5	4,4
I6	6,3	5,5	5,2	4,9	4,7	4,5	4,4	4,3
I7	6,2	5,5	5,I	4,8	4,6	4,4	4,3	4,I
I8	6,0	5,4	5,0	4,7	4,4	4,3	4,I	4,0
I9	5,9	5,3	4,9	4,6	4,3	4,2	4,I	3,9
20	5,8	5,2	4,8	4,5	4,3	4,I	4,0	3,8
2I	5,7	5,I	4,7	4,4	4,2	4,0	3,9	3,8
22	5,7	5,0	4,6	4,3	4,I	3,9	3,8	3,7
23	5,6	5,0	4,5	4,3	4,0	3,9	3,8	3,6
24	5,5	4,9	4,5	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6
25	5,5	4,8	4,4	4,2	3,9	3,8	3,6	3,5
26	5,4	4,8	4,4	4,I	3,9	3,7	3,6	3,5
27	5,4	4,7	4,4	4,I	3,9	3,7	3,6	3,5
28	5,3	4,7	4,3	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4
29	5,3	4,7	4,3	4,0	3,8	3,5	3,5	3,4
30	5,2	4,6	4,2	4,0	3,7	3,5	3,5	3,3
40	5,0	4,4	4,0	3,7	3,5	3,2	3,2	3,I
60	4,7	4,I	3,8	3,5	3,3	3,I	3,0	2,9
I20	4,5	3,9	3,5	3,3	3,I	2,9	2,8	2,7
∞	4,3	3,7	3,3	3,I	2,9	2,7	2,6	2,5

Продолжение таблицы 8 п

Критические точки F -распределения
(α = 0,05)

ν_2 \ ν_1	I2	I5	20	24	30	40	60	I20	
3	43,4	43,0	42,8	42,6	42,5	42,3	42,I	42,0	4I,8
4	20,7	20,4	20,2	20,0	I9,9	I9,8	I9,6	I9,5	I9,3
5	I3,4	I3,I	I2,9	I2,8	I2,7	I2,5	I2,4	I2,3	I2,I
6	I0,0	9,8	9,6	9,5	9,4	9,2	9,I	9,0	8,9
7	8,2	8,0	7,8	7,6	7,5	7,4	7,3	7,2	7,I
8	7,0	6,8	6,6	6,5	6,4	6,3	6,2	6,I	6,0
9	6,2	6,0	5,8	5,7	5,6	5,5	5,4	5,3	5,2
I0	5,7	5,5	5,3	5,2	5,I	5,0	4,9	4,8	4,6
II	5,2	5,0	4,9	4,8	4,7	4,6	4,4	4,3	4,2
I2	4,9	4,7	4,5	4,4	4,3	4,2	4,I	4,0	3,9
I3	4,6	4,5	4,3	4,2	4,I	4,0	3,9	3,7	3,6
I4	4,4	4,2	4,I	4,0	3,9	3,8	3,7	3,5	3,4
I5	4,2	4,I	3,9	3,8	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3
I6	4,I	3,9	3,7	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,I
I7	4,0	3,8	3,6	3,5	3,4	3,3	3,2	3,I	3,0
I8	3,9	3,7	3,5	3,4	3,3	3,2	3,I	3,0	2,9
I9	3,8	3,6	3,4	3,3	3,2	3,I	3,0	2,9	2,8
20	3,7	3,5	3,3	3,2	3,I	3,0	2,9	O,8	2,7
2I	3,6	3,4	3,2	3,I	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6
22	3,5	3,4	3,2	3,I	3,0	2,9	2,8	2,7	2,5
23	3,5	3,3	3,I	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5
24	3,4	3,3	3,I	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4
25	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4
26	3,3	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,3
27	3,3	3,I	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,3
28	3,2	3,I	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2
29	3,2	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,4	2,4	2,2
30	3,2	3,0	2,8	2,7	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2
40	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,I	I,9
60	2,7	2,6	2,4	2,3	2,2	2,I	2,0	I,8	I,7
I20	2,5	2,4	2,2	2,I	2,0	I,9	I,7	O,6	I,4
∞	2,4	2,2	2,0	I,9	I,8	I,7	I,5	I,4	I,0

Литература

I. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. -М.: Наука, 1969.-575 с.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. -М.: Наука, 1969.-5II с.
3. Хартман К., Лецкий Э. и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. - М.: Мир, 1977.-532 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. -М.: Высш. школа, 1977.-479 с.

Содержание

Владимир Владимирович Волгин,
Василий Васильевич Усенко

Конспект лекций
по курсу
"Теория эксперимента"

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

(Кафедра автоматизированных систем
управления тепловыми процессами)

Технический редактор Е.Б.Метелицина

Л- 87968 Подписано к печати II.06.I98I г.
Формат бумаги 60х90/I6
Печ.л. 3,75 Уч.-изд.л. 3,0
Тираж 300 Заказ 2904 Цена I2 коп

Типография МЭИ, Красноказарменная, I3