

MOИ



КНИГА-ПОБЕДИТЕЛЬ
конкурса рукописей учебников
по направлениям
подготовки в МЭИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

А.П. Солодов, Д.В. Сиденков

ТЕПЛОМАССОБМЕН

Том 2

Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупненным группам
специальностей и направлений подготовки
13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика» в качестве учебника
для реализации основных образовательных программ
высшего образования по направлению подготовки
13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Под общей ред. А.П. Солодова

Москва
Издательство МЭИ
2023

УДК 536.2 536.3

ББК 31.31

С 60

Рецензенты: О.В. Соловьева, канд. физ-мат. наук, доц. кафедры энергообеспечения предприятий, строительства зданий и сооружений КГЭУ;

А.С. Дмитриев, докт. техн. наук, проф. кафедры низких температур ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ»

Солодов, А.П.

С 60 Тепломассообмен: учебник: В 2 т. Т. 2 / А.П. Солодов, Д.В. Сиденков; под общ. ред. А.П. Солодова. – М.: Издательство МЭИ, 2023. – 608 с.

ISBN 978-5-7046-2459-2

ISBN 978-5-7046-2808-8 (Т. 2)

В учебнике представлены основы теории тепломассообмена, методы конструкторского и поверочного расчета теплообменных аппаратов.

Изложение теории поддержано систематическим использованием компьютерного моделирования основных задач тепломассообмена с применением специализированных пакетов вычислительных программ, методов визуализации полей температур, тепловых потоков, скоростей теплоносителей.

Для студентов теплотехнических специальностей вузов.

УДК 536.2 536.3

ББК31.31

ISBN 978-5-7046-2459-2 © Национальный исследовательский
ISBN 978-5-7046-2808-8 (Т. 2) университет «МЭИ», 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	9
Раздел 1. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН....	11
Глава 1. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ.....	11
1.1. Уравнение конвективной теплоотдачи. Уравнение массоотдачи.....	11
1.2. Теплоотдача при вынужденной конвекции	13
1.3. Теплоотдача при свободной конвекции	29
1.4. Структура критериальных соотношений для инженерных расчетов теплоотдачи.....	41
1.5. Средняя теплоотдача при вынужденном продольном обтекании пластины в широком диапазоне чисел Рейнольдса.....	45
1.6. Предельный режим теплопроводности для теплоотдачи ограниченных тел.....	48
1.7. Глобальная аппроксимация для теплоотдачи пластины при смешанной конвекции.....	49
1.8. Обтекание профилей.....	52
1.9. Теплоотдача в поперечно-обтекаемых пучках труб	55
1.10. Теплоотдача в трубах и каналах.....	63
1.11. Аналогия процессов теплообмена и массообмена...	78
Глава 2. ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ.....	96
2.1. Система дифференциальных уравнений пограничного слоя.....	98
2.2. Интегрирование системы уравнений пограничных слоев в условиях вынужденной конвекции	108
2.3. Пограничный слой на проницаемой поверхности.....	120
2.4. Теплообмен при продольном обтекании пластины. Уравнение теплового пограничного слоя	127
2.5. Закон теплообмена.....	138
2.6. Управление пограничным слоем.....	142

2.7. Интегрирование уравнений свободно конвективных пограничных слоев. Асимптотика малых и больших чисел Прандтля	150
Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ	165
3.1. Локальная теплопередача при поперечном обтекании трубы.....	165
3.2. Интегральное уравнение теплового пограничного слоя	166
3.3. Стандартный закон теплообмена	171
3.4. Математическое описание задачи о поперечном обтекании трубы	172
3.5. Распределение скорости внешнего потока по окружности трубы	175
3.6. Безразмерная формулировка.....	181
3.7. Функция для расчета локальной теплоотдачи	184
3.8. Сопоставление с экспериментом.....	191
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА: ГОРЕНИЕ, ЗАЩИТА ОТ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОТОКОВ	197
4.1. Горение. Интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя.....	198
4.2. Интегрирование уравнения диффузионного пограничного слоя.....	207
4.3. Защита поверхности от воздействия высокотемпературного потока.....	215
4.4. Защита вдувом при обтекании сферы	223
Раздел 2. ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССООБМЕН.....	239
Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД.....	239
5.1. Фазовые равновесия	239
5.2. Уравнение кривой насыщения.....	241
5.3. Поверхностное натяжение и фазовое равновесие	242
5.4. Поверхностное натяжение и образование зародышей новой фазы. Критический радиус	246
5.5. Газокинетическое (фазовое) сопротивление	252
5.6. Условия динамического и теплового взаимодействия на поверхности раздела фаз.....	256

5.7. Феномен гидродинамической неустойчивости	
границы раздела.....	266
5.8. Гомогенная модель	268
Глава 6. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ	277
6.1. Кривые кипения	277
6.2. Модель теплообмена при пузырьковом кипении	282
6.3. Компьютерная модель пузырькового кипения	286
6.4. Замечание о тепловом росте пузырьков пара.....	287
6.5. Гидродинамическая модель кризиса кипения.....	289
6.6. Кипение в трубах	291
Глава 7. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ	307
7.1. Общее описание процесса конденсации.....	307
7.2. Математическое описание пленочной конденсации... ..	310
7.3. Гравитационная ламинарная пленка конденсата.....	323
7.4. Сдвиговая ламинарная пленка.....	347
7.5. Гравитационная турбулентная пленка конденсата.....	351
7.6. Сдвиговая турбулентная пленка конденсата	366
7.7. Универсальная аппроксимация для расчета локальной теплоотдачи при конденсации.....	391
7.8. Воздухоохлаждаемый конденсатор.	395
7.9. Управление расходом конденсата в пленке	400
7.10. Аппроксимации для толщины пленки.....	405
7.11. Расчет трения на межфазной границе.....	409
7.12. Конденсация на произвольной поверхности.....	412
Глава 8. ТЕПЛОМАССООБМЕН В ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ И ИСПАРЕНИИ	426
8.1. Тепловые и массовые потоки на поверхности раздела фаз.....	427
8.2. Методика расчета тепломассообмена с помощью тройной аналогии	433
8.3. Интегральные уравнения пограничного слоя	446
8.4. Стандартные законы.....	452
8.5. Влияние поперечного потока массы	456
8.6. Ψ -коррекция.....	459
8.7. Тепломассообмен при продольном обтекании плоской поверхности: решение интегральным методом.....	481
8.8. Управление пограничным слоем.....	484

8.9. Условия перехода	486
8.10. Факторизованные соотношения для трения, массоотдачи, теплоотдачи.....	490
8.11. Обобщение метода факторизации.....	493
8.12. Расчетный пример: конденсация пара из парогазовой смеси	494
Раздел 3. ТЕПЛООБМЕННИКИ.....	501
Глава 9. ОСНОВЫ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ...	501
9.1. Математическая модель теплообменника.....	502
9.2. Эффективность теплообменника	511
9.3. Программа для теплового расчета теплообменников	516
9.4. Оптимизация теплообменников.....	520
Глава 10. МИКРОТЕПЛООБМЕННИКИ.....	529
10.1. Элементарные оценки теплопередачи и сопротивления.....	530
10.2. Численное моделирование теплопередачи в микротеплообменниках.....	541
Раздел 4. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ТЕПЛООБМЕННИКАХ...	553
Глава 11. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА.....	553
11.1. Примеры решения задач в пакетах MathCad и ANSYS.....	553
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	603

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемом двухтомном учебнике «Тепломассообмен» отражен многолетний опыт исследований и преподавания этой научной и инженерной дисциплины в МЭИ на кафедре «Теоретические основы теплотехники».

Первый том учебника «Тепломассообмен», содержащий рассмотрение двух механизмов теплообмена: теплопроводности и излучения, прошел конкурсный отбор учебных изданий в рамках конкурса, посвященного 90-летию МЭИ и 100-летию плана ГОЭЛРО, издан в мае 2022 г. и рекомендован УМО в качестве учебника для расширенного направления 13.00.00 ISBN 978-5-7046-2460-8.

Второй том учебника «Тепломассообмен» (авторы Солодов А.П., Сиденков Д.В.) является естественным продолжением первого тома и включает разделы конвективного теплообмена, теплообмена с фазовыми превращениями, а также теплогидравлического расчета теплообменных аппаратов. Изложение ведется с акцентом на использовании возможностей компьютерного моделирования сложных процессов теплообмена.

Данное издание начинается с раздела, посвященного фундаментальным основам конвективного теплообмена в пограничных слоях. Показано, как исходя из представлений о тонком пограничном слое при течениях с большими числами Рейнольдса, посредством преобразований подобия, можно свести сложную задачу с уравнениями в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Посредством наглядных модельных представлений, методами оценки порядка величин выводятся основные закономерности конвективного теплообмена при *вынужденной и свободной конвекции*. Приводятся критериальные расчетные соотношения для основных конфигураций, таких как продольное обтекание пластин и криволинейных профилей, поперечное обтекание труб и пучков труб, течение в трубах и каналах. Методом интерполяции между асимптотами получены *глобальные* аппроксимации для теплоотдачи, пригодные в широкой области изменения определяющих параметров (чисел Рейнольдса, Прандтля, Рэлея). Задачи массообмена решаются в рамках аналогии между процессами теплообмена и массообмена.

Второй раздел посвящен двухфазному теплообмену. Рассмотрены элементы термогидродинамики двухфазных сред, сформулированы условия фазового равновесия с учетом поверхност-

ного натяжения, проанализирована проблема частоты нуклеации. Изложение модели Д.А. Лабунцова для пузырькового кипения дополняется компьютерной моделью процесса, сконструированной из известных элементарных механизмов, таких как перегрев жидкости при возобновляющемся контакте со стенкой, зарождение пузырьков на активных центрах парообразования, рост пузырьков в перегретой жидкости, испарение тонкой пленки под пузырьками. Кипение в каналах иллюстрируется компьютерной моделью, воспроизводящей различные режимы, включая кризисные, грозящие пережогом. Завершает раздел развернутое изложение теории пленочной конденсации. Основная идея – это раздельное рассмотрение четырех элементарных моделей конденсации (гравитационная пленка, ламинарная и турбулентная, плюс сдвиговая пленка, ламинарная и турбулентная) с их последующим объединением в «глобальную» модель посредством метода интерполяции между асимптотами – позволяет сформулировать обобщенную модель пленочной конденсации на поверхностях произвольной формы с учетом градиентов капиллярного давления.

Третий раздел содержит введение в теплообменники. Здесь рассматриваются базовые понятия и элементарные алгоритмы проектирования теплообменников. Вводится понятие эффективности теплообменников, определяются предельные достижимые температуры теплоносителей, устанавливаются соотношения между эффективностью и числом единиц переноса теплоты, решается задача оптимизации теплообменника.

Изложение поддерживается работой со специализированным пакетом ANSYS и коллекцией Mathcad-программ в *четвертом разделе*.

Авторы полагают, что двухтомный учебник «Тепломассообмен» станет полезной начальной школой научного и инженерного творчества, будет нужен не только студентам, обучающимся по программе бакалавриата, но и магистрантам, аспирантам и специалистам в области тепломассообменных процессов.

Авторы искренне благодарят коллегу Дееба Р., написавшего в данном издании пункт 11.1

Мы в большом долгу перед нашими женами Солодовой Валентиной Яковлевной и Сиденковой Ириной Васильевной, их благожелательность и терпение неоценимы.

Авторы будут признательны за замечания и пожелания по улучшению книги, которые следует направлять по адресу: 111250, Москва, Красноказарменная ул., 17, кафедра ТОТ.

Раздел 1. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОМАССОБМЕН

Глава 1. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕПЛОМАССОБМЕНА В ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Для расчета коэффициента теплоотдачи в элементах теплообменных устройств современный инженер располагает обширным арсеналом расчетных соотношений, созданным в течение столетия интенсивных теоретических и экспериментальных исследований. Данная глава содержит минимально необходимый набор расчетных формул, а также методику их эффективного применения для широкого круга задач в расчетной практике инженера.

Изложение базируется на простых и наглядных модельных представлениях конвективного теплообмена и на методах оценки порядка величин, с целью сохранить при инженерных расчетах контроль над физическим содержанием рассматриваемых задач. Подробный анализ конвективного теплообмена, в том числе точные решения в асимптотическом пределе пограничного слоя, приближенный интегральный метод и численные процедуры представлены в последующих главах.

Практические расчетные рекомендации данной главы охватывают основные геометрические конфигурации теплообменных устройств, такие как продольное обтекание пластин и криволинейных профилей, поперечное обтекание труб и пучков труб, течение в трубах и каналах.

Рассмотрен метод интерполяции между асимптотами, посредством которого получены глобальные аппроксимации для теплоотдачи, пригодные в широкой области изменения определяющих параметров (чисел Рейнольдса, Прандтля, Рэлея).

1.1. Уравнение конвективной теплоотдачи. Уравнение массоотдачи

Согласно уравнению Ньютона-Рихмана

$$q = \alpha(t_w - t_{f\infty}), \quad (1.1)$$

плотность теплового потока q , Вт/м² на поверхности тела *пропорциональна* температурному напору $\Delta t = t_w - t_{f\infty}$, К, т.е. разности температур стенки t_w и жидкости $t_{f\infty}$. Символ « ∞ » имеет здесь смысл: «на значительном удалении по нормали от поверхности, где температура уже перестает заметно изменяться».

Коэффициент теплоотдачи α , Вт/(м²К), зависит от геометрии поверхности и ее ориентации в пространстве, скорости обтекания, теплофизических свойств теплоносителя и от температурного напора.

В иностранной технической литературе уравнение (1.1) называют законом охлаждения Ньютона. Историческим основанием для этого служат эксперименты Ньютона (1701 г.) по охлаждению металлического предмета в потоке воздуха. Непосредственный результат Ньютона может быть выражен соотношением:

$$\frac{dt}{d\tau} \sim -(t - t_{f\infty}), \quad (1.2)$$

означающим, что скорость охлаждения пропорциональна избыточной температуре тела по отношению к окружающей среде. В этом уравнении не фигурирует ни тепловой поток, ни коэффициент теплоотдачи, однако между утверждениями (1.1) и (1.2) существует тесная связь. Современная формулировка (1.1) была получена через сто лет после Ньютона французским математиком Фурье при создании аналитической теории распространения тепла, т.е. при установлении дифференциального уравнения теплопроводности Фурье и соответствующих краевых условий.

В расчетной практике возможны два варианта постановки задачи с применением (1.1). Если задан температурный напор $\Delta t = t_w - t_{f\infty}$, то рассчитывают плотность теплового потока q как величину, определяющую тепловую производительность теплообменной установки. Если же задана плотность теплового потока q ,

как при электрическом или ядерном обогреве, а также температура теплоносителя $t_{f\infty}$, то рассчитывают температуру стенки t_w и решают вопрос о том, достаточно ли эффективно охлаждение, чтобы эта температура не превышала допустимую. Ясно, что в обоих случаях желательно иметь высокие значения α , чтобы получить высокопроизводительный теплообменник или чтобы обеспечить необходимое охлаждение теплонапряженных поверхностей.

Выпишем теперь плотность теплового потока на стенке двумя способами: по уравнению Ньютона-Рихмана (1.1) и через градиент температуры в жидкости непосредственно у стенки, в соответствии с законом теплопроводности Фурье:

$$q = \alpha(t_w - t_{f\infty}) = -\lambda_f \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow \alpha = \lambda_f \frac{1}{t_{f\infty} - t_w} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (1.3)$$

Таким образом, получилось соотношение между коэффициентом теплоотдачи и градиентом температуры у стенки, называемое *уравнением конвективной теплоотдачи*.

Задачи *массообмена* решаются в рамках аналогии между процессами теплообмена и массообмена (см. пункт 1.11). *Уравнение массоотдачи*,

$$j_{v,\text{conduct}} = \rho\beta(c_{v,s} - c_{v,\infty})$$

как аналог уравнения теплоотдачи (1.1), применяется для расчета *диффузионного* потока $j_{v,\text{conduct}}$, кг/м²с, на поверхности раздела. Разность концентраций c_v рассматриваемого компонента смеси (индекс v) служит движущей силой массопереноса. *Коэффициент массоотдачи*, β , м/с, рассчитывают по соответствующим образом модифицированным соотношениям для коэффициента теплоотдачи, как показано в пункте 1.11.

1.2. Теплоотдача при вынужденной конвекции

Простейшая модель конвективной теплоотдачи

Модельное, предельно упрощенное представление о процессе конвективной теплоотдачи при вынужденном течении формируется следующим образом. Представим натекание холодной жидкости на горячую поверхность с фиксированной температурой

t_w как продольное (вдоль x) перемещение полуограниченного (по координате y) холодного массива жидкости t_∞ с заданной скоростью u_∞ (рис. 1.1).

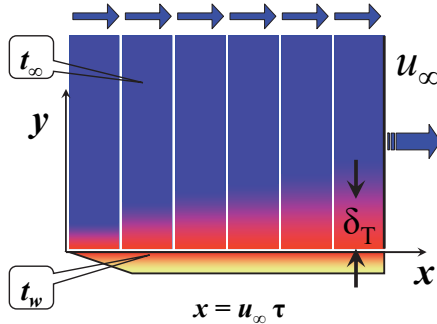


Рис. 1.1. Образование теплового пограничного слоя

Покажем воображаемыми вертикальными линиями перемещающийся слева направо массив жидкости и проследим за глубиной его прогрева δ_T по мере продвижения вдоль горячей стенки. Проблема очень похожа на задачу о *прогреве полуограниченного массива*, решенную ранее (см. Том 1\гл. 5 «Нестационарная теплопроводность: аналитические решения»; пункт 5.4 этой главы включает оценки для аналогичной гидродинамической задачи).

Воспользуемся основным полученным тогда результатом для глубины прогрева δ_T :

$$\delta_T \approx \sqrt{a\tau},$$

где символ « \approx » означает «по порядку величины». Время прогрева τ связано с продольной координатой x очевидным соотношением: $\tau = x / u_\infty$. После подстановки получим следующую оценку для глубины прогрева, или *толщины теплового пограничного слоя*:

$$\delta_T \approx \sqrt{a_f \tau} \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_\infty}}. \quad (1.4)$$

Чем больше скорость теплоносителя, тем меньше время теплового контакта и тем меньше толщина теплового пограничного слоя.

Воспользовавшись *уравнением конвективной теплоотдачи* (1.3), запишем теперь соотношение между коэффициентом теплоотдачи и градиентом температуры у стенки :

$$\alpha = \lambda_f \frac{1}{t_{f\infty} - t_w} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (1.5)$$

Оценивая величину градиента температуры,

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \approx \frac{t_{\infty}^+ - t_w}{\delta_T}, \quad (1.6)$$

приходим к представлению коэффициента теплоотдачи как проводимости плоского слоя (пограничного слоя):

$$\alpha \approx \lambda_f \frac{1}{t_{f\infty} - t_w} \left(\frac{t_{f\infty} - t_w}{\delta_T} \right) \Rightarrow \alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_T}. \quad (1.7)$$

После подстановки δ_T из (1.4) получим искомое оценочное соотношение для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_T} \approx \frac{\lambda_f}{\sqrt{a_f \frac{x}{u_{\infty}}}} = \sqrt{\lambda_f \rho_f c_{p,f}} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{x}}. \quad (1.8)$$

Итоговое соотношение (1.8) содержит основные закономерности конвективного теплообмена и заслуживает детального анализа.

- Коэффициент теплоотдачи растет вместе со скоростью набегающего потока, что объясняется уменьшением толщины теплового пограничного слоя (см. (1.7)). Движение с повышенной скоростью создает большие *градиенты* температуры в жидкости у стенки и, соответственно, большие тепловые потоки.

- Коэффициент теплоотдачи убывает по длине обтекаемой поверхности вследствие нарастания толщины теплового пограничного слоя.

- Коэффициент теплоотдачи растет с увеличением теплопроводности, плотности и теплоемкости теплоносителя; влияние этих свойств рекомендуется проследить самостоятельно в соотношениях (1.4)–(1.8).

Из проведенного анализа следуют полезные выводы и рекомендации для конструкторов теплообменников.

- Увеличение скорости позволяет получить более компактные теплообменники (возможно, ценой увеличения гидравлического сопротивления и роста затрат на прокачку теплоносителя).

- При конструировании желательнее избегать слишком протяженных по ходу теплоносителя поверхностей и, возможно, предусматривать разрывы и перемешивание перед последующими секциями.

- Вода является более эффективным охладителем, чем воздух, благодаря своей относительно высокой теплопроводности, плотности и теплоемкости.

Отметим теперь основные ограничения полученного результата (1.8). Во-первых, в простейшей модели не учитывались эффекты, связанные с вязкостью жидкости. Это приемлемо в случае высокотеплопроводных и маловязких теплоносителей, таких как жидкие металлы. Но для вязких неметаллических жидкостей торможение у стенки заметно увеличит время контакта, толщину теплового пограничного слоя и, следовательно, уменьшит коэффициент теплоотдачи.

Второе ограничение касается режима течения: была рассмотрена теплоотдача при *ламинарном* обтекании твердой поверхности.

Наконец, остался неизвестным числовой безразмерный коэффициент в формуле (1.8), неявно присутствующий в форме знака оценки порядка « \approx ». Можно утверждать только, что это безразмерный множитель порядка единицы.

Главный позитивный результат анализа состоит в понимании того, каким образом обеспечивается высокая интенсивность теплоотдачи при конвективном теплообмене: быстрое движение жидкости уменьшает толщину пограничного слоя δ_T и тем самым увеличивает термическую проводимость при контакте жидкости со стенкой (см. (1.8)), т.е. коэффициент теплоотдачи: $\alpha \sim \lambda_f / \delta_T$.

Зафиксируем температурный напор $\Delta t = t_w - t_\infty$. Изменяя скорость течения, мы получаем возможность управлять значениями градиента температуры у стенки (см. (1.6)). Сделав скорость большой, мы обеспечим высокий градиент температуры и, следо-

вательно, большие значения плотности теплового потока и коэффициента теплоотдачи. Полезно рассмотреть, что произойдет, если, напротив, внезапно остановить движение жидкости, т.е. прекратить транспортировку теплоты вдоль стенки посредством конвекции.

Представление результатов в безразмерном виде

Представим соотношение (1.4) для толщины теплового пограничного слоя δ_T в безразмерном виде, взяв в качестве *линейного масштаба (характерного размера)* соответствующее значение продольной координаты x :

$$\frac{\delta_T}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u_\infty x}{a}\right)}} \equiv \sqrt{\frac{1}{\text{Pe}_x}}. \quad (1.9)$$

Получившийся в правой части *безразмерный комплекс* носит название числа Пекле и интерпретируется следующими образом:

$$\begin{aligned} \text{Pe}_x &\equiv \frac{u_\infty x}{a_f} = \frac{\rho_f c_{p,f} u_\infty (t_w - t_f)}{\frac{\lambda_f}{x} (t_w - t_f)} \approx \\ &\approx \frac{\text{конвективный перенос теплоты}}{\text{теплопроводность}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для потоков в технических устройствах, таких как теплообменники, число Pe имеет обычно большие числовые значения и, как следует из (1.9), толщина теплового пограничного слоя оказывается намного меньше протяженности обтекаемой поверхности:

$$\text{Pe} \gg 1 \Rightarrow \frac{\delta_T}{x} \ll 1. \quad (1.11)$$

Неравенство $\text{Pe} \gg 1$ является условием, при котором происходит формировании *тонкого* теплового пограничного слоя на обтекаемой поверхности.

Для гидродинамической задачи (Том1\гл. 5, п. 5.4) имеет место формула, аналогичная (1.9):

$$\frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u_\infty x}{\nu_f}\right)}} \equiv \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}, \quad (1.12)$$

где δ – толщина гидродинамического пограничного слоя: тонкого слоя жидкости вблизи стенки, заторможенного силами вязкости (скорость внутри этого слоя изменяется от нуля на стенке до скорости набегающего потока). Число Рейнольдса, в зависимости от контекста, интерпретируется тремя эквивалентными способами.

$$\begin{aligned} \text{Re}_x &\equiv \frac{u_\infty x}{\nu_f} = \frac{(\rho_f u_\infty) u_\infty}{\mu_f \frac{u_\infty}{x}} \approx \frac{\text{конвективный перенос импульса}}{\text{молекулярный перенос импульса}} \equiv \\ &\equiv \frac{\text{динамическое давление}}{\text{вязкое трение}} \equiv \frac{\text{инерционные силы в потоке}}{\text{силы вязкого трения}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Аналогично утверждению (1.11), при больших значениях числа Рейнольдса формируется тонкий гидродинамический пограничный слой:

$$\text{Re}_x \gg 1 \Rightarrow \frac{\delta}{x} \ll 1. \quad (1.14)$$

Верхней границей применимости полученных соотношений является *критическое значение числа Рейнольдса*, для рассматриваемого случая обтекания пластины имеет значение:

$$\text{Re}_{x \text{ cr}} \approx (3 \div 5) 10^5, \quad (1.15)$$

при котором происходит переход от ламинарного режима к турбулентному.

Уравнения (1.9) и (1.13) совместно определяют соотношение толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев в зависимости от числа Pr:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \sqrt{\frac{a_f}{\nu_f}} \Rightarrow \frac{\delta_T}{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}}. \quad (1.16)$$

Формула (1.16) служит основой для классификации теплоносителей:

$$\begin{aligned}
 &\text{газы: } Pr \approx 1 \Rightarrow \delta_T \sim \delta; \\
 &\text{жидкие металлы: } Pr \ll 1 \Rightarrow \delta_T \gg \delta; \\
 &\text{вязкие органические жидкости: } Pr \gg 1 \Rightarrow \delta_T \ll \delta.
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

Для *жидких металлов* ($Pr \ll 1$) *гидродинамический слой* находится на самом дне относительно толстого *теплого пограничного слоя*, и теплообмен развивается в потоке жидкости с практически равномерным профилем скорости. Этот предельный случай использовался при построении простейшей модели теплоотдачи (1.8), рис.1.1.

Напротив, для *вязких* низкотеплопроводных жидкостей ($Pr \gg 1$), таких как тяжелые углеводороды, *тепловой пограничный слой* весьма тонок по сравнению с *гидродинамическим*. Поэтому гидродинамика течения, поле скорости в непосредственной близости от стенки в значительной степени определяет интенсивность теплоотдачи. Например, оказывается важной зависимость вязкости жидкости от температуры, поскольку изменение вязкости приводит к деформации поля скорости. Искусственные возмущения течения – с целью интенсифицировать теплообмен – будут эффективными, если только они сосредоточены в непосредственной близости от стенки, как это делают с помощью искусственной шероховатости.

В случае *газовых* теплоносителей ($Pr \approx 1$) толщины теплового и гидродинамического слоев соизмеримы. Для проблемы интенсификации теплоотдачи отсюда следует общая рекомендация обеспечивать искусственную турбулизацию посредством специальных вставок, соизмеримых с характерным поперечным размером потока.

Безразмерным представлением коэффициента теплоотдачи является число Нуссельта, определяемое как отношение тепловой проводимости α (размерного коэффициента теплоотдачи) к соответствующему масштабу:

$$Nu_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda_f} = \frac{\alpha}{\frac{\lambda_f}{x}} \sim \frac{\text{истинная тепловая проводимость}}{\text{тепловая проводимость слоя толщиной } x}. \tag{1.18}$$

Масштабом служит проводимость (λ_f/x) гипотетического неподвижного слоя жидкости с толщиной x , равной протяженности поверхности вдоль потока.

Теперь можно представить полученное нами выше *оценочное* соотношение (1.8) для коэффициента теплоотдачи в безразмерном виде:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha}{\frac{\lambda_f}{x}} \approx \frac{\frac{\lambda_f}{\delta_T}}{\frac{\lambda_f}{x}} = \frac{1}{\frac{\delta_T}{x}} = C \cdot \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu_f}} \sqrt{\frac{\nu_f}{a_f}}; \quad (1.19)$$

$$\text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu_f}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu_f}{a_f}; \quad C \approx 1;$$

$$\text{Nu}_x = C \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,5}.$$

Для течений типа пограничного слоя:

$$\text{Re}_x \gg 1; \quad \frac{\delta_T}{x} \ll 1; \quad \text{Nu}_x \gg 1. \quad (1.20)$$

Постоянный безразмерный коэффициент C есть величина порядка единицы. Зависимость от числа Pr в (1.19) нуждается в уточнении (см. далее формулы (1.21), (1.22)), поскольку фактически оценки были проведены для теплоносителей с малыми числами Pr , таких как жидкие металлы.

Обобщая полученный результат, можно утверждать, что при вынужденной конвекции число Нуссельта есть некоторая функция чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}).$$

Применяют также другую, равносильную формулировку:

$$\text{St} = \text{St}(\text{Re}, \text{Pr});$$

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} \equiv \frac{\text{Nu}}{\text{RePr}}; \quad \text{Re} \equiv \frac{u_\infty l}{\nu}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Число Стантона St является другой, по сравнению с числом Nu , безразмерной формой представления коэффициента теплоотдачи:

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} \sim \frac{\text{истинная тепловая проводимость}}{\text{проводимость при конвективном транспорте теплоты}} \ll 1.$$

Замечание о тройной аналогии

Хотя наше внимание сосредоточено сейчас на процессе теплообмена, в реальной практике инженеру часто приходится рассчитывать также трение и массообмен. При самом общем взгляде, заметно сходство структуры математического описания этих трех процессов переноса (см. Том 1 \ гл. 1). Например, законы переноса (закон теплопроводности Фурье, закон вязкого трения Ньютона, закон диффузии Фика) утверждают, что потоки теплоты, импульса, массы компонента смеси пропорциональны градиентам температуры, скорости, концентрации, соответственно. Похожими могут быть граничные условия: например, *условие постоянства* температуры, скорости и концентрации вдоль обтекаемой твердой поверхности. Можно ожидать, что и решения этих задач, т.е. поля температуры, скорости, концентрации, а также поля плотностей потоков будут выглядеть аналогично (при определенных условиях).

Простейшая формулировка тройной аналогии следующая:

$$St = St_D = \frac{c_f}{2} \Leftarrow Pr = Pr_D = 1; \quad Re = idem;$$

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty}; \quad St_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty}; \quad \frac{c_f}{2} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2}; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{a}; \quad Pr_D \equiv \frac{\nu}{D},$$

где D – коэффициент диффузии, индекс « D » идентифицирует массообмен, c_f – коэффициент сопротивления трения, τ_w – напряжение трения на стенке, β – коэффициент массоотдачи.

Дополнительно к указанным выше ограничениям, поток теплоносителя должен быть безградиентным, т.е. без перепадов давления (как при продольном обтекании плоской поверхности). Условия равенства единице чисел Прандтля (Pr) и Прандтля диффу-

зионного (Pr_b) на практике приближенно означают, что рассматриваются газовые теплоносители (например, для воздуха $Pr \approx 0,7$).

Практическая полезность тройной аналогии очевидна, поскольку из относительно простых экспериментов по измерению гидродинамического сопротивления можно получить информацию о закономерностях теплообмена и массообмена. Однако ограничения тройной аналогии весьма существенны.

Аналогия между сопротивлением и теплоотдачей нарушается для потоков с градиентом давления, например, при поперечном обтекании труб или трубных пучков. Причина состоит в том, что в дифференциальном уравнении движения появляется оператор сил давления, аналога которому нет в дифференциальном уравнении энергии.

Более широка область применимости аналогии между *двумя процессами*: теплообмена и массообмена. Эти вопросы подробнее обсуждаются ниже в п.1.11, а также в гл. «Тепломассообмен в парогазовом потоке при конденсации и испарении».

Строгий анализ трения и теплообмена в пограничном слое см. ниже в гл. 2.

Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины

Ламинарный режим

Полная количественная теория теплоотдачи основывается на системе дифференциальных уравнений в *частных производных*, описывающих перенос импульса и энергии. Применение двух фундаментальных идей – о пограничном слое и о преобразованиях подобия – позволяет свести задачу к численному интегрированию системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений для распределений температуры и скорости (см. гл.2 «Теплообмен и трение в пограничном слое»).

Получающаяся в результате теоретическая формула для теплоотдачи при обтекании пластины ламинарным потоком имеет факторизованную структуру (рис. 1.2): зависимость от числа Рейнольдса представлена множителем $\sqrt{Re_x}$, что совпадает с результатом оценок (ср. с (1.19)); зависимость от числа Прандтля – мно-

жителем, содержащим безразмерный градиент температуры g' в жидкости в непосредственной близости от стенки.

Графически сопоставлены (рис. 1.2) асимптотические выражения для градиента при малых и больших значениях числа Прандтля и приближенное универсальное уравнение, полученное методом интерполяции между асимптотами (см. п. 1.6) и пригодное во всем диапазоне чисел Прандтля.

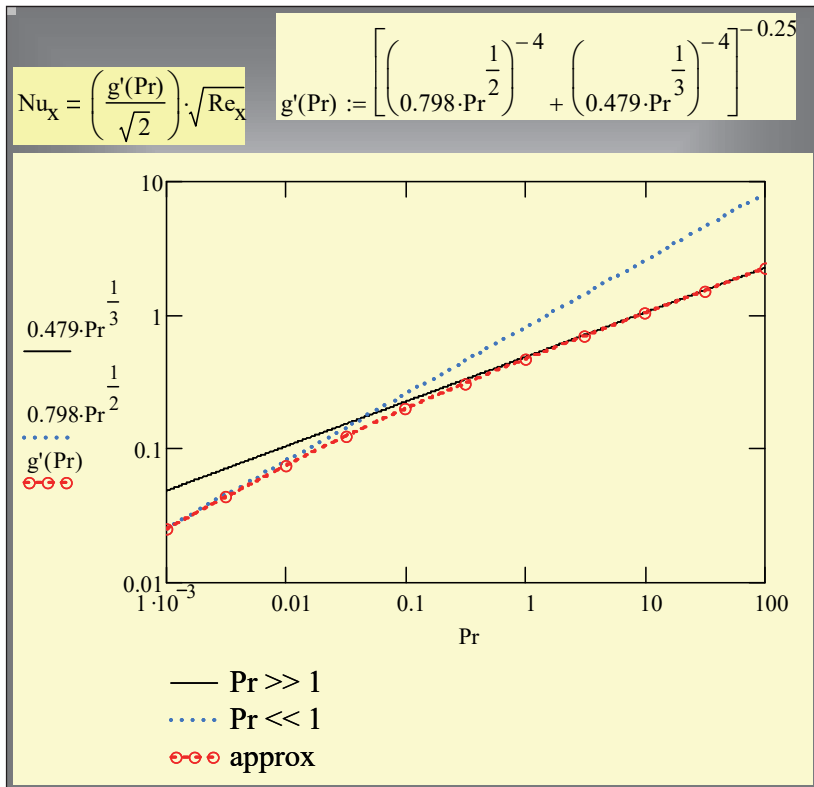


Рис. 1.2. Зависимость безразмерного градиента температуры в пограничном слое на стенке от числа Прандтля теплоносителя

На рисунке 1.3 сопоставлены значения коэффициента теплоотдачи (α , Вт/м²К) для трех различных теплоносителей – ртути, воздуха и масла МК, относящихся к трем характерным группам в соответствии с классификацией по числам Прандтля, а также для самого важного теплоносителя – воды.

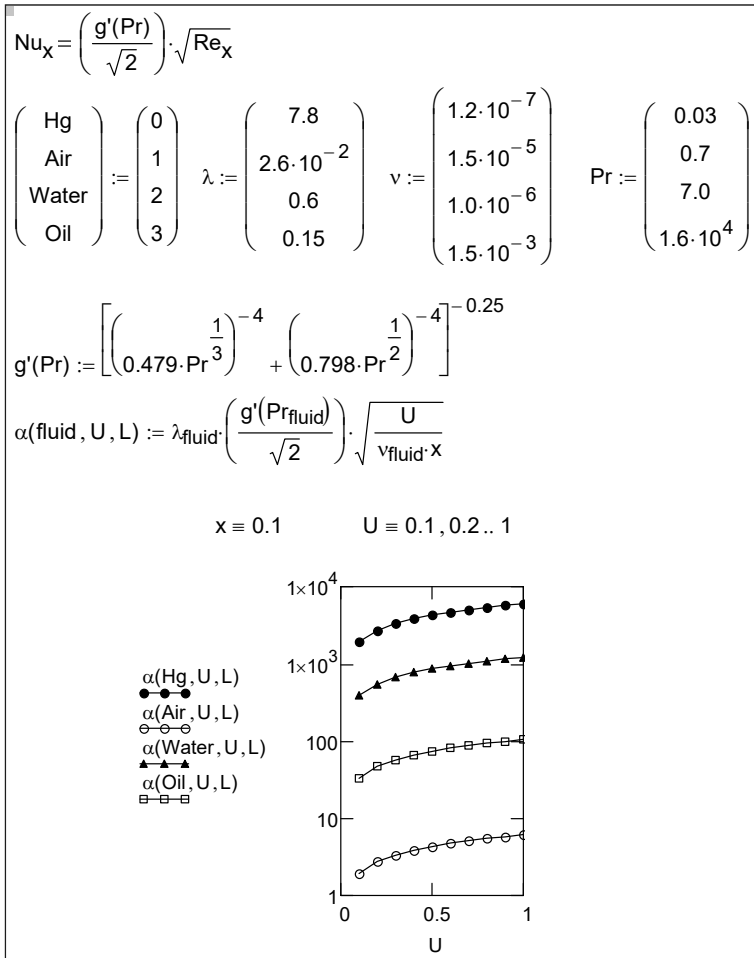


Рис. 1.3. Теплоотдача к различным теплоносителям

Результаты вычислений показывают, как сильно зависит интенсивность теплообмена от физических свойств жидкости. Теплоотдача к потоку ртути (жидкого металла с высокой теплопроводностью) на три порядка превышает теплоотдачу к воздуху. Видно, что вода является гораздо лучшим охладителем, чем вязкое масло или воздух с его малой плотностью и теплопроводностью. Иллюстрируется и другой важный вывод теории – суще-

ственный рост интенсивности теплообмена при увеличении скорости течения.

Хотя эти результаты получены для ламинарного режима, качественный характер зависимостей сохраняется и для более важных для практики (и более сложных для расчета) турбулентных потоков.

Далее приведены наиболее употребительные локальные соотношения для теплоотдачи пластины в вынужденном продольном потоке жидкости.

Для обычных (неметаллических) жидкостей и газов результаты теоретических расчетов *ламинарного* пограничного слоя аппроксимируются соотношением (1.21):

$$1 \ll \text{Re}_x < 3 \cdot 10^5; \quad \text{Pr} = 0,5 \div 10; \quad t_w = \text{const}; \quad (1.21)$$
$$\text{Nu}_x = 0,332 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33}.$$

Количественная теория теплоотдачи при *ламинарном* режиме для *жидких металлов* дает:

$$\text{Nu}_x = 0,56 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,5}. \quad (1.22)$$

Влияние способа постановки граничного условия ($t_w = \text{const}$ или $q_w = \text{const}$) при ламинарном режиме может быть значительным: локальная теплоотдача на обогреваемой *постоянным тепловым потоком* стенке:

$$\text{Nu}_x = 0,47 \text{Re}_x^{0,5} \text{Pr}^{0,33} \quad (q_w = \text{const}) \quad (1.23)$$

примерно на 40% выше, чем при *постоянной температуре стенки* (ср. с (1.21)).

Турбулентный режим

Математические модели теплоотдачи в *турбулентных потоках* значительно сложнее, чем для ламинарных течений. Подробный расчетный пример приведен для специальной задачи о турбулентной пленке жидкости, образующейся при конденсации пара на охлаждаемой поверхности (см. гл. 8). Общее представление о турбулентном переносе и соответствующих расчетно-теоретических моделях дается в Томе 1 гл. 2.

Элементарную оценку теплоотдачи при турбулентном режиме можно получить, предполагая, что *все* сопротивление переносу теплоты сосредоточивается в так называемом *вязком подслое* δ_{vis} . Это тонкий слой жидкости у стенки, в котором турбулентное перемешивание полностью подавлено силами вязкости (действует условие прилипания, и всякое движение в жидкости вблизи стенки останавливается). За пределами вязкого подслоя – в ядре потока – мы примем термическое сопротивление пренебрежимо малым, благодаря интенсивному турбулентному перемешиванию.

Из сказанного следует, что для коэффициента теплоотдачи справедлива оценка:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{vis}}.$$

Толщина вязкого подслоя оценивается через сопротивление вязкого трения при разумном предположении, что основное падение скорости потока вблизи стенки сосредоточено в вязком подслое, в то время как в турбулентном ядре потока скорость практически постоянна благодаря интенсивному турбулентному перемешиванию:

$$\tau \approx \mu \frac{U}{\delta_{vis}} = C_f \frac{\rho U^2}{2} \Rightarrow \delta_{vis} \approx \frac{2\nu}{C_f U};$$

$$C_f = \frac{0,0592}{\text{Re}_x^{0,2}},$$

где коэффициент сопротивления C_f как функция числа Рейнольдса вычисляется по надежной *эмпирической* формуле для обтекания пластины.

Последующие простые подстановки приводят к окончательному результату:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{x}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{Ux}{\nu} \frac{C_f}{2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right) \left(\frac{0,03}{\text{Re}_x^{0,2}} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Nu}_x \approx 0,03 \text{Re}_x^{0,8},$$

согласно которому коэффициент теплоотдачи растет с увеличением скорости потока по закону: $\alpha \sim U^{0,8}$, т.е. существенно быстрее, чем при ламинарном режиме: $\alpha \sim U^{0,5}$.

Для практических расчетов локальной теплоотдачи при турбулентном обтекании пластины неметаллическими теплоносителями рекомендуется формула (1.24):

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= 0,03 \text{Re}_x^{0,8} \text{Pr}^{0,4}; \\ \text{Re}_x &\geq \text{Re}_{x_{cr}}; \quad \text{Re}_{x_{cr}} \approx (3 \div 5)10^5, \end{aligned} \quad (1.24)$$

которая отличается от полученного выше оценочного соотношения дополнительным множителем, учитывающим зависимость теплоотдачи от числа Pr. Влияние рода граничных условий на стенке (постоянства t_w или q_w) при турбулентном режиме практически незаметно. Ламинарно–турбулентный переход происходит в некотором диапазоне чисел Рейнольдса $(3 \div 5) \cdot 10^5$. Координату x отсчитывают от передней кромки пластины.

Для жидкометаллических теплоносителей, благодаря их высокой собственной (молекулярной) теплопроводности, вклад турбулентного перемешивания в суммарный теплоперенос должен быть относительно небольшим. Кроме этого общего утверждения, следует учитывать также характерное соотношение толщин (δ) гидродинамического и теплового пограничных слоев (1.17).

На рисунке 1.4 схематически показано, как развиваются гидродинамический и тепловой пограничные слои в жидкометаллическом теплоносителе. По вертикальной оси отложены локальные числа Рейнольдса, построенные по толщинам потери импульса δ^{**} и потери энтальпии $\delta_{T^{**}}$ (это специальные меры толщины гидродинамического и теплового пограничного слоя), по горизонтальной – число Рейнольдса, построенное по продольной координате x :

$$\text{Re}_\delta \equiv \frac{u_\infty \delta^{**}}{\nu}; \quad \text{Re}_{\delta_T} \equiv \frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}; \quad \text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}.$$

Понятия толщин потери импульса и потери энтальпии, как и формулы на рис. 1.4, подробно рассматриваются далее в гл. 2, 4, 9. Сейчас для качественного анализа проблемы жидкометаллического теплоносителя достаточно сделанных поясняющих замечаний.

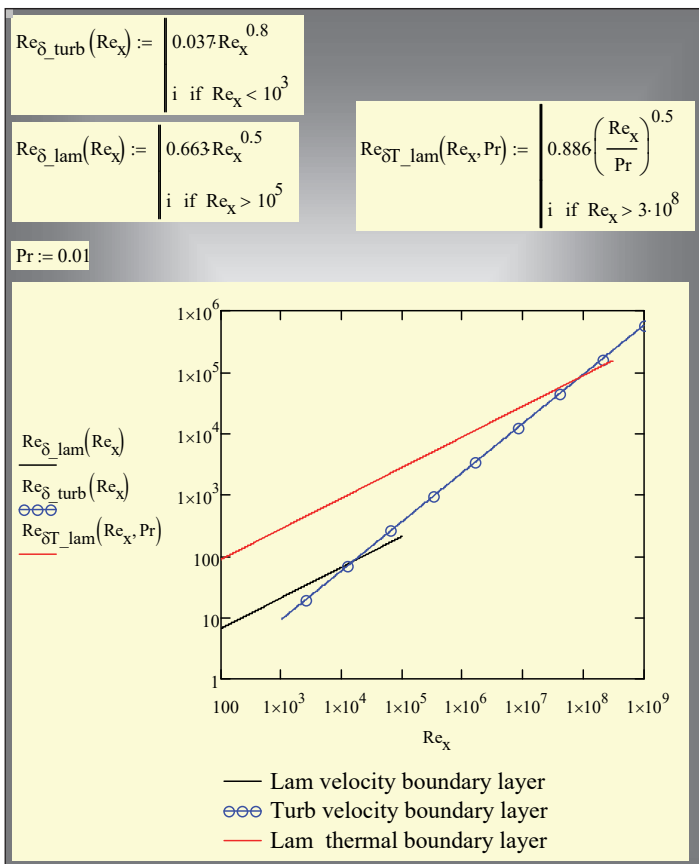


Рис. 1.4. Развитие динамического и теплового пограничных слоев в жидкометаллическом теплоносителе
 («i» в программных блоках – это мнимая единица, не отображаемая на графиках именно в тех областях, где формула неприменима)

В ламинарной области ($Re_x < 10^5$) гидродинамический слой в жидкометаллическом теплоносителе весьма тонок по сравнению с тепловым. Далее, при переходе к турбулентному режиму, нарастающий турбулентный гидродинамический пограничный слой постепенно заполняет область теплового пограничного слоя. Это заполнение происходит в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($Re_x \approx 10^5 \div 10^8$), который можно интерпретировать как зону перехода от теплоотдачи при ламинарном режиме к теплоотдаче при турбулентном режиме для жидкометаллического теплоносителя.

При еще больших Re_x тепловой и гидродинамический слой развиваются синхронно, благодаря интенсивной турбулентной диффузии теплоты и импульса. Эту область можно описать моделью с *гипотетическим* теплоносителем, имеющим одинаковые с жидким металлом теплопроводность, теплоемкость и плотность, но другую вязкость, такую, что $\nu = a$, т.е. $Pr = 1$. В результате получается предельная формула для *турбулентного* режима обтекания пластины *жидким металлом*:

$$Nu_x = 0,03 (Re_x Pr)^{0,8}. \quad (1.25)$$

1.3. Теплоотдача при свободной конвекции

Простейшая модель свободной конвекции

Феномен свободной конвекции состоит в самопроизвольном возникновении движения (циркуляции) при контакте холодной жидкости с горячей стенкой. Причиной движения является разность плотностей нагретой (прилегающей к стенке) и холодной (вдали от стенки) жидкости. В поле силы тяжести разность плотностей приводит к появлению движущей Архимедовой силы, направление которой (вверх или вниз) зависит от знака температурного напора ($t_w - t_\infty$).

Характерные распределения скорости и температуры вблизи вертикальной стенки показаны на рис. 1.5.

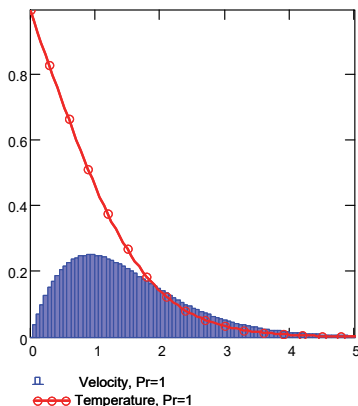


Рис. 1.5. Распределения скорости и температуры в свободноконвективном пограничном слое (вертикальная ось отождествляется со стенкой)

Вертикальное движение имеет место в той же области вблизи стенки, где сосредоточено основное изменение температуры (рис. 1.5). Скорость жидкости нулевая на самой стенке (вследствие условия прилипания) и вдали от нее, так что имеется максимум u_m на профиле скорости.

В отличие от вынужденной конвекции, характерная скорость потока является внутренним, подлежащим определению параметром задачи.

Упрощенные модельные представления о свободной конвекции (рис. 1.6.) основываются на наблюдениях, согласно которым скорость жидкости оказывается относительно небольшой и движение происходит без сильных ускорений, под действием противодействующих друг другу одинаковых по порядку сил гравитации и вязкого трения. Режим течения предполагается ламинарным, тепловой поток и трение определяются эффектами молекулярного переноса.

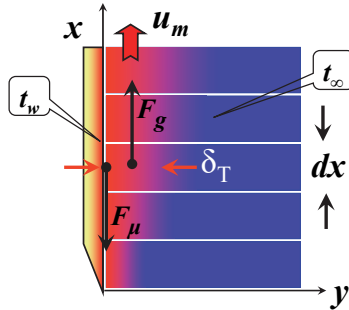


Рис. 1.6. Модельное представление свободной конвекции

Гравитационное воздействие (сила F_g , рис. 1.6) опишем, учитывая различие в плотности жидкости:

- в пределах пограничного слоя (при температуре примерно t_w)
- и за его пределами (при температуре t_∞).

Контрольный объем, для которого записывается баланс действующих сил, определяется как (δdx) ; размер по нормали к рисунку принимается единичным. Ситуация выглядит так, как будто объем (δdx) горячей и с меньшей плотностью жидкости погружен в холодную плотную жидкость, поэтому:

$$F_g = \underbrace{\rho_{t_c} [\delta dx] g}_{\text{Архимедова сила}} - \underbrace{\rho_{t_w} [\delta dx] g}_{\text{Вес}} = \Delta\rho [\delta dx] g; \quad (1.26)$$

$$\Delta\rho \equiv \rho_{t_c} - \rho_{t_w},$$

где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести, $\Delta\rho$ – разность плотностей холодной и горячей жидкости.

Сила вязкого трения, действующая на прилегающую к стенке грань (dx), оценивается как

$$F_\mu = -\mu_f \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w [dx] \approx -\mu_f \frac{u_m}{\delta} [dx], \quad (1.27)$$

где μ_f – динамическая вязкость жидкости.

Выпишем условие равенства *по порядку величин* сил гравитации и вязкого трения:

$$F_g \approx F_\mu \Rightarrow \Delta\rho [\delta dx] g \approx \mu_f \frac{u_m}{\delta} [dx]. \quad (1.28)$$

Толщина δ пограничного слоя и максимальная скорость u_m в пограничном слое являются внутренними характеристиками, *неизвестными* до решения задачи.

В качестве дополнительного, замыкающего уравнения принимается оценочное соотношение (1.4) для толщины пограничного слоя, с другим, актуальным для рассматриваемой теперь задачи значением скорости u_m :

$$\delta \approx \sqrt{a_f \tau} \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}}. \quad (1.29)$$

Полученная система из двух уравнений для неизвестных u_m и δ

$$\Delta\rho \delta g \approx \mu_f \frac{u_m}{\delta};$$

$$\delta \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}} \quad (1.30)$$

имеет решение:

$$u_m \approx \left(\frac{\Delta\rho g x a_f}{\rho \nu} \right)^{1/2}; \quad \delta \approx \frac{1}{\left(\frac{\Delta\rho g}{\rho x a_f \nu} \right)^{1/4}}. \quad (1.31)$$

Располагая оценкой (1.31) для толщины пограничного слоя, действуем далее по такому же плану, как при анализе вынужденной конвекции, чтобы получить оценку коэффициента теплоотдачи. Применяя (1.7), получим:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta} = \lambda_f \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g}{x a_f \nu} \right)^{1/4}, \quad (1.32)$$

где разность плотностей $\Delta\rho$ определяется разностью температур $(t_w - t_\infty)$, т.е. температурным напором.

Отметим основные закономерности, выражаемые соотношением (1.32).

- Коэффициент теплоотдачи растет вместе с температурным напором, что объясняется увеличением разности плотностей, соответствующим увеличением Архимедовой выталкивающей силы, увеличением скорости течения, сокращением времени теплового контакта и, наконец, соответствующим уменьшением толщины теплового пограничного слоя (1.31).

- Коэффициент теплоотдачи убывает по длине (высоте) обтекаемой поверхности вследствие нарастания толщины теплового пограничного слоя.

Зависимость теплоотдачи от свойств теплоносителя полезно проанализировать самостоятельно.

Обсудим основные отличия теплоотдачи при вынужденной и свободной конвекции. С точки зрения технических приложений, главное состоит в том, что свободная конвекция обеспечивает теплоотвод при отсутствии специальных устройств для обеспечения циркуляции теплоносителя (насосов, вентиляторов и т.п.). Поэтому, например, в ядерной энергетике последним рубежом защиты от последствий гипотетической аварии является так называемая система пассивного отвода тепла (СПОТ), работающая на принципе свободной конвекции, т.е. способная функционировать, даже если не остается источников энергии для работы насосов аварийного охлаждения. Другим, всем известным примером, служит охлаждение персональных компьютеров: естественное охлаждение было бы безусловно предпочтительным, благодаря прежде всего абсолютной бесшумности.

К сожалению, интенсивность теплоотдачи при свободной конвекции невысока, вследствие малых скоростей естественной циркуляции (см. оценку (1.31)). Для обычных условий в технике, вынужденная конвекция обеспечивает на порядок большие коэффициенты теплоотдачи (при одном и том же теплоносителе).

Представление результатов в безразмерном виде

Оценочное соотношение (1.32) для коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции представляется в безразмерной форме следующим образом:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{1}{\left(\frac{\delta}{x}\right)} \approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{a_f v_f}\right)^{1/4}. \quad (1.33)$$

Безразмерный комплекс в правой части (1.33) называют числом Рэлея:

$$\text{Ra}_x \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{a_f v_f} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{v_f^2} \left(\frac{v_f}{a_f}\right) \equiv \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g x^3}{v_f^2}\right) \text{Pr} \equiv \text{Gr}_x \text{Pr}; \quad (1.34)$$

$$\text{Gr}_x \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g x^3}{v_f^2}.$$

Выделяя в явной форме число Прандтля Pr, получают формулировку с числом Грасгофа Gr. Результат (1.33) оценок для теплоотдачи можно записать в двух тождественных формах:

$$\text{Nu}_x = C \text{Ra}_x^{0,25}; \quad (1.35)$$

$$\text{Nu}_x = C (\text{Gr}_x \text{Pr})^{0,25},$$

где C – константа порядка единицы, подлежащая определению в эксперименте.

Относительная разность плотностей $(\Delta\rho/\rho)$ зависит от температурного напора $(t_w - t_\infty)$. Из определения понятия объемного коэффициента расширения:

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_p \approx \frac{1}{\rho} \frac{\rho_{t_\infty} - \rho_{t_w}}{t_w - t_\infty} \quad (1.36)$$

следует:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\rho}{\rho} &\equiv \frac{\rho_{t_w} - \rho_{t_\infty}}{\rho} \approx \beta(t_w - t_\infty) \equiv \beta\Delta t; \\ \text{Gr}_x &= \frac{\beta\Delta t g x^3}{\nu_f^2}; \\ \text{Ra}_x &= \text{Gr}_x \text{Pr}.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Для идеальных газов β есть величина, обратная абсолютной температуре газа, $\beta = 1/T$.

Итак, формулы (1.35), (1.37) представляют результат теоретической оценки коэффициента теплоотдачи при ламинарной свободной конвекции на вертикальной поверхности.

Рассмотрим физический смысл числа Грасгофа – безразмерного комплекса, определяющего интенсивность теплоотдачи при свободной конвекции. Оценим предварительно соотношение инерционных и вязких эффектов при свободной конвекции, то есть число Рейнольдса свободноконвективного течения. Используя формулу (1.31) для скорости, последовательно получим (при $\text{Pr} = 1$):

$$\begin{aligned}u_m &\approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x\right)^{1/2}; \\ \text{Re}_x &\equiv \frac{u_m x}{\nu} = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x\right)^{1/2} \cdot \frac{x}{\nu} = \left(\frac{\Delta\rho g x^3}{\rho \nu^2}\right)^{1/2}; \\ \text{Re}_x &= \sqrt{\text{Gr}_x}.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Таким образом, $\sqrt{\text{Gr}_x}$ играет роль числа Рейнольдса при свободноконвективном течении.

Оценим далее соотношение Архимедовой выталкивающей силы и вязкого трения.

Напомним, что такая оценка постулировалась ранее при детальном анализе (см. (1.28)). Мы приняли тогда, что движение возникает под действием Архимедовой силы и что противодействующая сила трения есть величина такого же порядка, чтобы исключить возможные большие ускорения, не наблюдаемые в действительности. При этом использовался *внутренний*, не известный до решения задачи масштаб – толщина пограничного слоя δ .

При оценке проводимой ниже, будет использоваться только *внешний, заданный при постановке задачи масштаб*, а именно, высота поверхности x , вблизи которой возникает свободноконвективное течение:

$$u_m \approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x \frac{1}{\text{Pr}} \right)^{1/2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{Архимедова сила}}{\text{Вязкое трение}} &\approx \frac{g \Delta\rho x^3}{\mu \frac{u_m}{x} x^2} \Rightarrow \frac{g \frac{\Delta\rho}{\rho} x^3}{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x \frac{1}{\text{Pr}} \right)^{1/2} x} = \\ &= \left(\underbrace{\frac{g x^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho}}_{\text{Gr}_x} \text{Pr} \right)^{1/2} = \text{Ra}_x^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Приведем характерные значения числа Ra_x , построенного по внешнему линейному масштабу x : высоте поверхности в большом объеме жидкости, размеру замкнутого объема и т.п. Заметная естественная циркуляция возникает при $\text{Ra}_x \gg 1$, $\text{Ra}_x > 10^3$. Область $10^3 < \text{Ra}_x < 10^5$ соответствует формированию тонкого пограничного слоя у обогреваемой стенки. Переход к турбулентному течению совершается при $\text{Ra}_x \approx 10^9 - 10^{10}$ (что примерно соответствует критическому значению для числа Рейнольдса $\sim 10^5$, если учесть соотношение (1.38)).

На практике часто возникает смешанная конвекция, например, при обдуве комнатного обогревателя вентилятором. Используя (1.38), можно ввести следующую меру соотношения между свободной и вынужденной конвекцией:

$$\frac{u_m}{U} = \frac{u_m x}{U x} = \frac{\sqrt{\text{Gr}}}{\text{Re}}, \quad (1.40)$$

где U – заданная скорость вынужденного потока. Критерий (1.40) используется ниже при построении интерполяционных соотношений, удовлетворяющих предельным переходам (1.61).

Свободная конвекция в жидких металлах

При свободной конвекции движение инициируется Архимедовой выталкивающей силой, отличной от нуля в области *теплогового пограничного слоя*, где имеется разность температур в жидкости. Если вязкие эффекты невелики ($Pr \ll 1$, $\nu \ll a$), то Архимедова сила будет заметно ускорять движение вдоль стенки:

$$\underbrace{\rho u_m^2 \delta}_{\text{Инерционная сила, поток импульса}} \approx \underbrace{\Delta \rho \delta g x}_{\text{Архимедова выталкивающая сила}} \Rightarrow u_m \approx \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho} g x}$$

$$\delta \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}} \quad (1.41)$$

$$Nu_x \approx \frac{1}{\left(\frac{\delta}{x}\right)} \approx (Gr Pr^2)^{1/4}; \quad (Pr \ll 1).$$

Видно, что в рассмотренном пределе теплоотдача не зависит от вязкости теплоносителя. Полезно сопоставить (1.41) с формулой (1.35) для неметаллических теплоносителей.

Расчет локальной теплоотдачи при свободной конвекции

Ламинарный режим

Для расчета теплоотдачи при *ламинарной* свободной конвекции на вертикальной изотермической поверхности строгая количественная теория (см. гл. 2 «Теплообмен и трение в пограничном слое») дает следующие соотношения (см. также рис. 1.7):

$$Nu_x = F(Pr) Gr_x^{1/4};$$

$$F(Pr \rightarrow 0) \cong 0,6004 Pr^{1/2}; \quad F(Pr \rightarrow \infty) \cong 0,5027 Pr^{1/4};$$

$$0 < Pr < \infty:$$

$$F(Pr) = \left[\left(0,6004 Pr^{1/2}\right)^{-n} + \left(0,5027 Pr^{1/4}\right)^{-n} \right]^{-1/n};$$

$$n = 2,265. \quad (1.42)$$

Сопоставление точного решения (1.42) с приближенной оценкой (1.35) подтверждает удовлетворительность прогноза в п. «Простейшая модель свободной конвекции».

Турбулентный режим

При *турбулентном* режиме свободноконвективного течения неметаллических жидкостей теплоотдачу рассчитывают по эмпирическому соотношению:

$$Nu_x = 0,13 Ra_x^{1/3} \equiv 0,13 \left(Gr_x Pr \right)^{1/3}; \quad (Pr > 0,5). \quad (1.43)$$

Согласно (1.43), локальный коэффициент теплоотдачи постоянен вдоль вертикальной координаты x .

Формулу (1.43) продолжают в область малых чисел Pr (для жидких металлов) следующим образом, учитывая структуру предельного соотношения (1.41):

$$Nu_x = 0,13 \left(Gr_x Pr^2 \right)^{1/3}. \quad (1.44)$$

Формулы (1.43) и (1.44) дают одинаковые значения при $Pr = 1$.

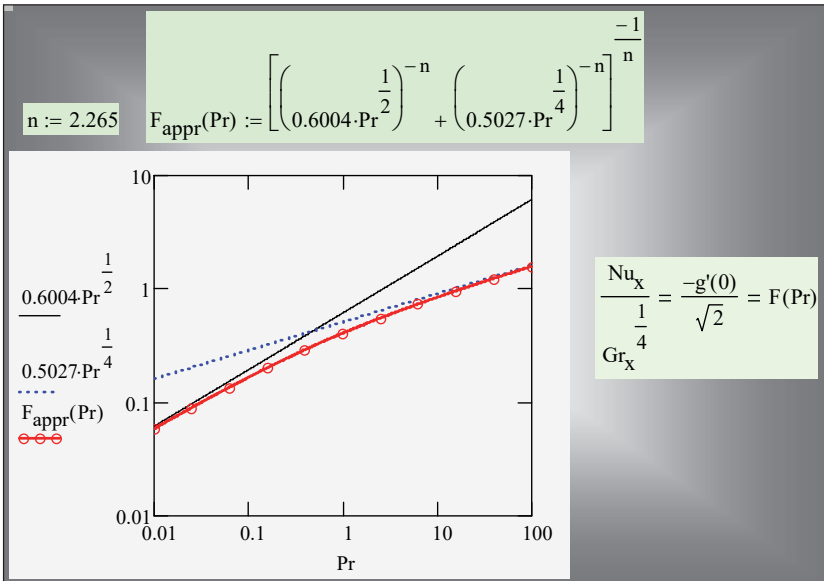


Рис. 1.7. Локальная теплоотдача при ламинарной свободной конвекции: зависимость от числа Прандтля

Осреднение коэффициента теплоотдачи

При проектных проработках теплообменников часто применяют расчеты по средним величинам:

$$\begin{aligned} Q &= \bar{\alpha}(\overline{t_w - t_f})F; \\ \bar{q} &\equiv \frac{Q}{F} = \bar{\alpha}(\overline{t_w - t_f}), \end{aligned} \quad (1.45)$$

где черта сверху означает осредненную величину, Q , Вт – полный тепловой поток через поверхность теплоотдачи F , м².

Осредненные значения коэффициента теплоотдачи, плотности теплового потока, температурного напора определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{q} = \frac{Q}{F} &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx; \quad \bar{\Delta t} = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta t dx; \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\bar{\Delta t}}; \\ F &= ul, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где l – протяженность поверхности по ходу теплоносителя, u – периметр поверхности, по которому происходит теплоотдача (полагается постоянным). Итак, сначала находится среднеинтегральное значение температурного напора, а затем определяется средний коэффициент теплоотдачи (1.46) как коэффициент пропорциональности в формуле Ньютона–Рихмана (1.45) между средним тепловым потоком и средним температурным напором.

Простые граничные условия, обычно принимаемые в теоретических моделях, такие как постоянство температуры стенки или постоянство плотности теплового потока, могут не соответствовать более сложным реальным ситуациям в теплообменных устройствах. Однако осреднение по способу (1.45), (1.46) сглаживает зависимость от граничных условий.

Локальные теоретические формулы ((1.21) при $t_w = \text{const}$, (1.42)) получены в предположении о *постоянстве температурного напора*.

В этом случае осреднение по правилу (1.46) сводится к вычислению среднеинтегрального по поверхности значения коэффициента теплоотдачи:

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \text{const}; \\
 \bar{\alpha} &= \frac{\bar{q}}{\Delta t} = \frac{\int_0^l q(x) dx}{\int_0^l \Delta t dx} = \frac{\int_0^l \alpha(x) \Delta t dx}{\int_0^l \Delta t dx} = \\
 &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{1.47}$$

Подстановка в (1.47) зависимости (1.21) для локальной теплоотдачи при вынужденном ламинарном обтекании пластины приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \text{const}; \quad \alpha(x) = C x^{-1/2}; \\
 \bar{\alpha} &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l C x^{-1/2} dx = \\
 &= \frac{C}{l} 2l^{1/2} = 2[C l^{-1/2}] = 2\alpha_{x=l},
 \end{aligned}
 \tag{1.48}$$

означающему, что средний коэффициент теплоотдачи равен удвоенному локальному значению в конце интервала осреднения. Поэтому для средней теплоотдачи при *вынужденном ламинарном* течении получаем формулу:

$$\bar{Nu}_l = 0,664 Re_l^{0,5} Pr^{1/3}. \tag{1.49}$$

Аналогичные вычисления в случае *турбулентного* обтекания пластины (исходная формула для локальной теплоотдачи (1.24)) дают:

$$\bar{Nu}_l = 0,037 Re_l^{0,8} Pr^{0,4}. \tag{1.50}$$

Соответственно, из (1.25) следует соотношение для средней теплоотдачи жидких металлов:

$$\bar{Nu}_l = 0,037 (Re_l Pr)^{0,8} = 0,037 \cdot Pe_l^{0,8}. \tag{1.51}$$

Исходные локальные соотношения (1.42) для свободной конвекции также соответствуют условию изотермической стенки.

Подставляя в (1.47) выражение $\alpha(x)$ из (1.42), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta t = \text{const}; \quad \alpha(x) &= C x^{-1/4}; \\ \bar{\alpha} &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l C x^{-1/4} dx = \\ &= \frac{C}{l} \frac{4}{3} l^{3/4} = \frac{4}{3} [C l^{-1/4}] = \frac{4}{3} \alpha_{x=l}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Из (1.42) и (1.52) следует критериальная формула для средней теплоотдачи при ламинарной свободной конвекции:

$$\begin{aligned} \bar{Nu}_l &= \frac{4}{3} F(\text{Pr}) Gr_l^{1/4}; \\ F(\text{Pr}) &= \left[\left(0,6004 \text{Pr}^{1/2} \right)^{-n} + \left(0,5027 \text{Pr}^{1/4} \right)^{-n} \right]^{-1/n}; \\ n &= 2,265, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где l – высота поверхности. В практически важной области $\text{Pr} = 0,5 \div 10$ (воздух, вода) аппроксимация (1.53) для ламинарной свободной конвекции дает:

$$\bar{Nu}_l \approx 0,56 (\text{Gr}_l \text{Pr})^{1/4}; \quad (0,5 < \text{Pr} < 10). \quad (1.54)$$

Среднюю теплоотдачу при *турбулентной* свободной конвекции рассчитывают по соотношениям, совпадающим с локальной формулировкой (1.43), (1.44), поскольку в этом режиме теплоотдача автомодельна относительно протяженности поверхности по высоте l :

$$\begin{aligned} \bar{Nu}_l &= 0,13 \text{Ra}_l^{1/3}; \quad \text{Pr} > 0,5; \\ \bar{Nu}_l &= 0,13 \left(\text{Ra}_l \text{Pr} \right)^{1/3}; \quad \text{Pr} \ll 1. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Соотношения (1.55) «сшиваются» в точке $\text{Pr} = 1$ и с удовлетворительной точностью могут быть применены для построения аппроксимации для любых чисел Pr :

$$\begin{aligned} \bar{Nu}_l &= 0,13 \text{Ra}_l^{1/3}; \quad \text{Pr} \geq 1; \\ \bar{Nu}_l &= 0,13 \left(\text{Ra}_l \text{Pr} \right)^{1/3}; \quad \text{Pr} < 1. \end{aligned} \quad (1.56)$$

1.4. Структура критериальных соотношений для инженерных расчетов теплоотдачи

На практике вынужденная или свободная конвекция далеко не всегда функционируют в «чистом» виде. Например, комнатный обогреватель, рассчитанный на *свободную* конвекцию, может обдуваться *вынужденным* потоком воздуха от вентилятора. При медленном *вынужденном* течении холодного воздуха в интенсивно обогреваемой горизонтальной трубе может возникнуть заметная *естественная* циркуляция в поперечном сечении и т.п. В таких случаях говорят о *смешанной* конвекции и применяют обобщенную запись критериального соотношения теплоотдачи:

$$\overline{Nu}_l = f(Re_l, Gr_l, Pr), \quad (1.57)$$

согласно которой безразмерный коэффициент теплоотдачи (Nu , (1.18)) зависит от соотношения инерционных и вязких эффектов в потоке (Re , (1.13)), соотношения выталкивающей Архимедовой силы и силы вязкости (Gr , (1.39)), типа теплоносителя (Pr , см. (1.16), (1.17)).

В критериальных формулах (1.49), (1.53) буквенный индекс « l » указывает на линейный масштаб, или *определяющий размер* поверхности теплоотдачи. Для пластины это длина по ходу потока теплоносителя. Для более сложных геометрических объектов может потребоваться несколько характерных размеров. Например, при течении в короткой трубе важны и диаметр и длина. При течении в коротком канале прямоугольного сечения потребуются два поперечных размера и длина канала. При течении в пакете труб важны диаметр труб и шаг их расположения.

Обобщим формулировку (1.57) для задач со сложной геометрией обтекаемых поверхностей:

$$\overline{Nu}_{l_0} = f(Re_{l_0}, Gr_{l_0}, Pr, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}), \quad (1.58)$$

где l_0 – *определяющий* размер, например, диаметр трубы в пакете труб, l_1 – другой характерный размер, например, поперечный шаг труб в пакете, l_2 – продольный шаг.

Формулы такой структуры применяют для инженерных расчетов конвективной теплоотдачи в однофазных теплоносителях.

Теплофизические свойства веществ, входящие в безразмерные комплексы расчетных уравнений вида (1.58), зависят от температуры, которая меняется в сечении пограничного слоя в пределах от температуры стенки t_w до температуры жидкости в набегающем потоке t_∞ (или до температуры в ядре потока при течении в трубе).

Характерная температура, по которой определяют значения физических параметров теплоносителя (плотность, вязкость, теплопроводность и т.д.), называется *определяющей температурой*. Разумным выбором представляется среднеарифметическая температура пограничного слоя: $(t_w + t_\infty)/2$.

Другим традиционным способом является выбор температуры набегающего потока t_∞ с одновременным введением поправочного множителя ε_t в критериальные формулы:

$$\overline{\text{Nu}}_{l_0} = f(\text{Re}_{l_0}, \text{Gr}_{l_0}, \text{Pr}, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}) \cdot \varepsilon_t;$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w} \right)^{0,25} \quad \text{для жидкостей}; \quad (1.59)$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{T_f}{T_w} \right)^{0,25} \quad \text{для газов.}$$

Рекомендации по выбору определяющей температуры обычно указывают в примечании к расчетной формуле.

В окрестности термодинамической критической точки, температурная зависимость свойств очень сильная, и ее корректный учет в расчетах теплоотдачи становится принципиально важной проблемой, решаемой обычно численными методами.

Уместно напомнить также, что для простых *стационарных одномерных задач теплопроводности* температурная зависимость свойств учитывается точно, посредством выбора в качестве расчетной величины коэффициента теплопроводности – его *среднеинтегрального* значения в актуальном интервале температур.

Метод интерполяции между асимптотами

Конкретный вид функциональной зависимости вида (1.58) надежно определен для простых предельных случаев, таких как обтекание пластины вынужденным или свободным потоком

(см., например, формулы (1.49), (1.50), (1.54), (1.55)). Однако разнообразие геометрических конфигураций теплообменных устройств и режимов течений столь велико, что трудно надеяться получить готовую справочную информацию в любой встречающейся на практике ситуации. В таких случаях можно применить рассматриваемый далее метод интерполяции между асимптотами.

Проиллюстрируем этот метод на примере смешанной ламинарной конвекции.

Соотношения для ламинарной *вынужденной* конвекции (1.49) и ламинарной *свободной* конвекции (1.54) можно рассматривать как предельные (асимптотические) случаи некоторой общей ситуации, когда движение вблизи вертикальной поверхности инициируется обеими актуальными силами – и гравитацией и инерцией (смешанная конвекция).

Задача состоит в том, чтобы на уровне логического анализа подобрать такую глобальную аппроксимацию,

$$\overline{Nu}_l = f(Re_l, Gr_l, Pr), \quad (1.60)$$

которая обеспечивала бы правильные асимптотические переходы к свободной (free) конвекции или к вынужденной (forced) конвекции:

$$\begin{aligned} \frac{Gr_l}{Re_l^2} \gg 1; & \quad Nu_l \rightarrow Nu_{free} \\ \frac{Gr_l}{Re_l^2} \ll 1; & \quad Nu_l \rightarrow Nu_{forced} \end{aligned} \quad (1.61)$$

и давала разумные результаты в промежуточной ситуации, т.е. при соизмеримом воздействии обоих факторов (см. соотношение (1.40) и комментарии к нему).

Интерполяционные соотношения, удовлетворяющие предельным переходам (1.61), можно построить в единой форме:

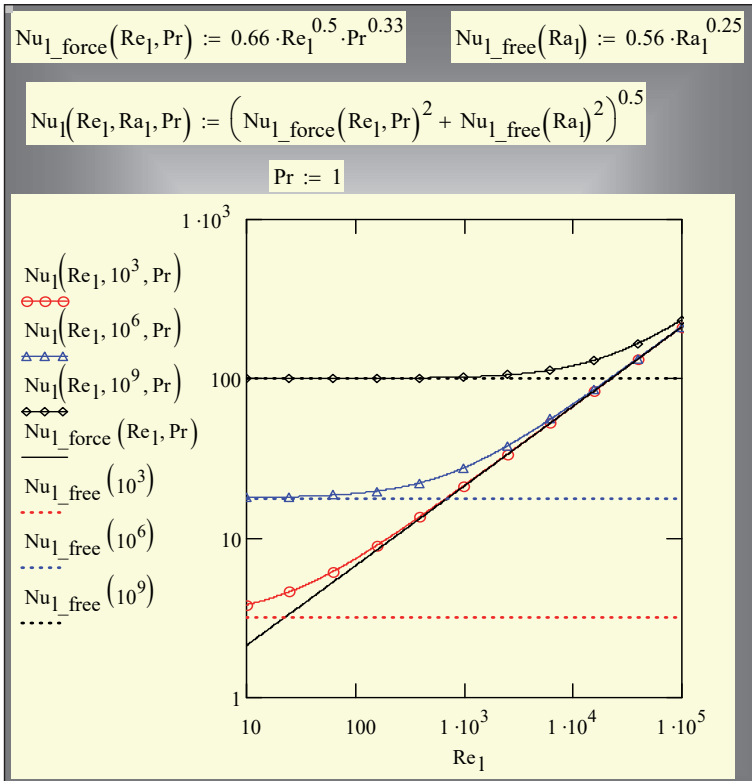
$$Nu_{Glob} = \left(Nu_{Limit1}^n \pm Nu_{Limit2}^n \right)^{1/n}, \quad (1.62)$$

где знак плюс выбирается для сонаправленных свободного и вынужденного потоков, а знак минус – для противоположно направленных. Аналогичная задача возникает при построении расчетных формул для широкого интервала чисел Рейнольдса, чисел Прандтля и т.п.

Значение показателя степени n подбирается так, чтобы получить наилучшее согласование с экспериментальными и теоре-

тическими данными в промежуточной области. В литературе рекомендуются значения $n = 4$ для ламинарно-турбулентного перехода и $n = 2$ для области, промежуточной между гравитационным и вынужденно-конвективным пределами. Как показывает опыт, этим простым способом можно получить эффективные аппроксимации для очень сложных задач.

Пример для ламинарной смешанной конвекции (1.60), (1.61) представлен на рис. 1.8. Асимптоты построены по уравнениям (1.49) и (1.54).



внешнего потока происходит переход к режиму свободной конвекции (горизонтальные линии, соответствующие трем различным значениям числа Рэлея).

Метод интерполяции между асимптотами может быть особенно полезным при разработке компьютерных моделей сложных тепломассообменных процессов и устройств. Прежде всего потому, что стимулирует анализ предельных (асимптотических) ситуаций, возможно, весьма далеких от штатных режимов эксплуатации, но вероятных при авариях, ошибках управления и т.п.

1.5. Средняя теплоотдача при вынужденном продольном обтекании пластины в широком диапазоне чисел Рейнольдса

В качестве второго примера применения метода интерполяции между асимптотами построим интерполяционное соотношение для вынужденного обтекания пластины неметаллическими теплоносителями в широком диапазоне чисел Рейнольдса [51], так чтобы учесть переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Базовыми соотношениями являются формулы для ламинарного

$$\overline{Nu}_{l_Lam} = 0,664 Re_l^{0,5} Pr^{1/3} \quad (1.63)$$

и турбулентного обтекания пластины

$$\overline{Nu}_{l_Turb} = 0,037 Re_l^{0,8} Pr^{0,4}, \quad (1.64)$$

которые рассматриваются как асимптотические соотношения для малых и больших чисел Рейнольдса.

На рисунке 1.9 представлено интерполяционное соотношение

$$\overline{Nu}(Re_l, Pr) = \left(\overline{Nu}_{l_Lam}(Re_{l_Lam}, Pr)^2 + \overline{Nu}_{l_Turb}(Re_l, Pr)^2 \right)^{1/2}, \quad (1.65)$$

обеспечивающее правильные асимптотические переходы:

$$\begin{aligned} Re \ll Re_{cr}; & \Rightarrow Nu \rightarrow Nu_{Lam} \\ Re \gg Re_{cr}; & \Rightarrow Nu \rightarrow Nu_{Turb} \end{aligned} \quad (1.66)$$

и удовлетворительные результаты в промежуточной области чисел Рейнольдса, т.е. в переходной области от ламинарного к турбулентному режиму.

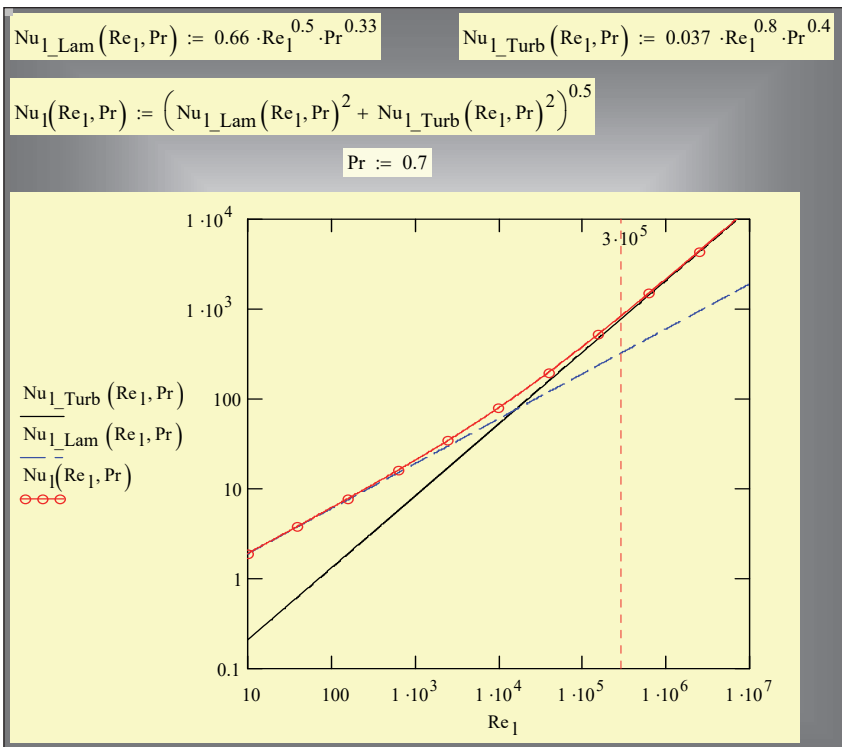


Рис. 1.9. Расчет средней теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины неметаллическими теплоносителями (формулы для турбулентного и ламинарного режимов и интерполяционное соотношение)

Простые интерполяции вида (1.65) пригодны для *технических* потоков с высоким уровнем возмущений, когда ламинарно–турбулентный переход осуществляется постепенно и начинается уже на относительно небольших расстояниях от входных сечений.

Источником возмущений (турбулизации) потока являются, в частности, неудобнообтекаемые острые входные кромки каналов, инициирующие отрыв пограничного слоя, как показано на рис. 1.10. Давление растет слева направо в окрестности острой передней кромки, поэтому заторможенный силами вязкости поток у стенки поворачивает вспять.

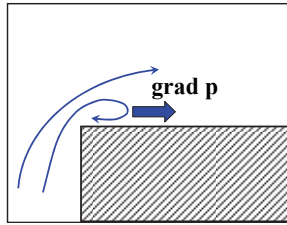


Рис. 1.10. Отрыв потока в области обратного градиента давления (жирная стрелка указывает направление вектора градиента давления)

Обобщим далее интерполяционное соотношение (1.65), чтобы сделать его пригодным в широком диапазоне чисел Прандтля, т.е. для расчета теплоотдачи к любым типам теплоносителей – жидким металлам, газам, вязким жидкостям (рис. 1.11).

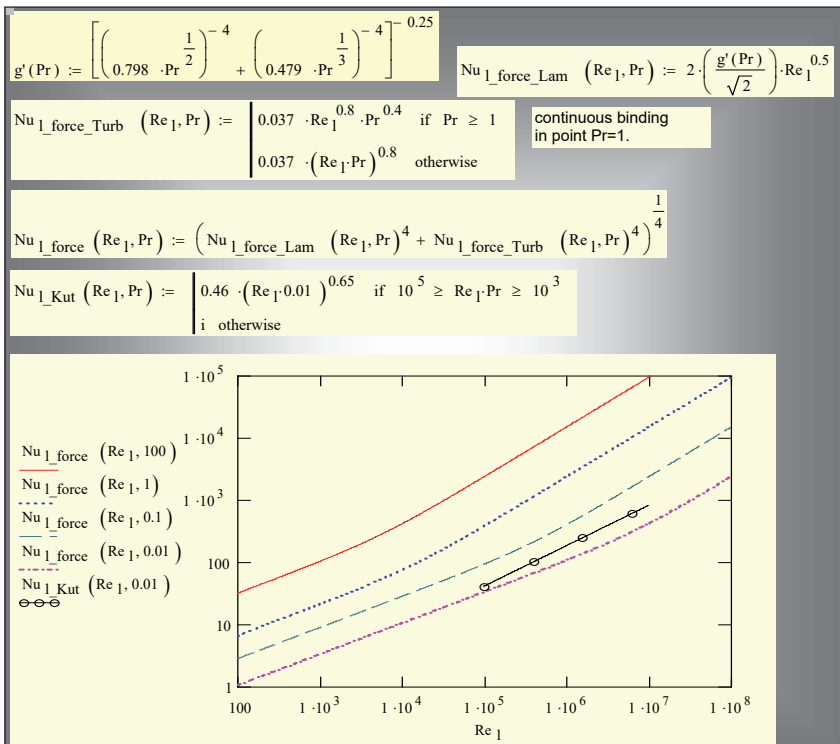


Рис. 1.11. Расчет средней теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины теплоносителями в широком диапазоне чисел Прандтля Pr

Особенности теплоотдачи к жидким металлам обсуждались выше в п. «Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины». Для сравнения на график нанесена специальная аппроксимация для жидких металлов (С.С.Кутателадзе), ход которой удовлетворительно согласуется с результатами интерполяции между асимптотами.

1.6. Предельный режим теплопроводности для теплоотдачи ограниченных тел

Поскольку целью метода интерполяции является глобальная аппроксимация, необходимо рассмотреть также предел *стремящихся к нулю* чисел Рейнольдса и Грасгофа ($Re \rightarrow 0$, $Gr \rightarrow 0$), когда движение жидкости прекращается. Формально, предельные значения числа Нуссельта оказываются нулевыми (см. (1.49), (1.54)), однако этот результат не является строгим, поскольку анализируемые соотношения (1.49), (1.54) получены в рамках теории пограничного слоя (т.е. при $Re \gg 1$).

Для *ограниченных трехмерных тел* должны существовать некоторые предельные ненулевые значения числа Нуссельта Nu_{\min} , обусловленные чистой теплопроводностью в окружающее неограниченное пространство, заполненное теплоносителем. Примером является соотношение (1.67), являющееся точным решением стационарной одномерной задачи теплопроводности от сферы в неограниченное пространство:

$$Nu_{d,\min} \equiv \frac{\alpha_{\min} d}{\lambda} = 2. \quad (1.67)$$

В случае изотермической пластины размером $l \times b$ ($l \ll b$) предельное число Нуссельта, построенное по короткой стороне l как определяющему размеру, вычисляется по формуле:

$$Nu_{l,\min} \equiv \frac{\alpha_{\min} l}{\lambda} = \frac{\pi}{\ln\left(4 \frac{b}{l}\right)}; \quad b \gg l,$$

представленной графически на рис. 1.12.

Для различных геометрических конфигураций и тепловых граничных условий необходимы специальные вычисления, чтобы найти предельные значения Nu_{\min} (универсальным способом явля-

ется численной решение соответствующей трехмерной задачи стационарной теплопроводности). Эта проблема может быть особенно актуальной для техники измерений температуры, например, посредством микрорезисторов или других микроэлектронных устройств с разнообразной геометрической формой.

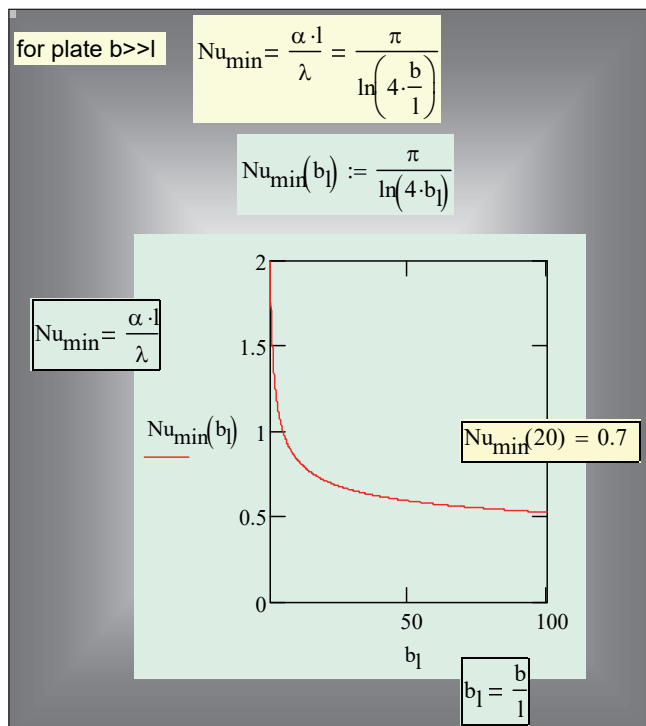


Рис. 1.12. Предел теплопроводности для теплоотдачи пластины

1.7. Глобальная аппроксимация для теплоотдачи пластины при смешанной конвекции

Представим теперь весь комплекс расчетных соотношений, обеспечивающих глобальную аппроксимацию для теплоотдачи пластины, т.е. расчет вынужденной, свободной и смешанной конвекции при любых режимах течения и для любых теплоносителей (рис. 1.13, 1.14, 1.15). Графики демонстрируют асимптотические и переходные режимы теплоотдачи.

Построение глобальных аппроксимаций, пригодных в широкой области изменения параметров, является важной составной частью компьютерного моделирования реальных теплообменных устройств. Адекватные модели должны обеспечивать правильное воспроизведение не только штатных режимов работы установок, когда параметры (скорость, температурный напор и т.д.) фиксированы, но и переходных и ухудшенных режимов. Например, когда скорость теплоносителя резко уменьшается из-за неполадок с насосным оборудованием. Такие компьютерные модели могут быть использованы для прогнозирования и анализа возможных аварийных ситуаций.

$$g'(Pr) := \left[\left(0.798 \cdot Pr^{\frac{1}{2}} \right)^{-4} + \left(0.479 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \right)^{-4} \right]^{-0.25}$$

$$Nu_{l_force_Lam}(Re_1, Pr) := 2 \cdot \left(\frac{g'(Pr)}{\sqrt{2}} \right) \cdot Re_1^{0.5}$$

$$Nu_{l_force_Turb}(Re_1, Pr) := \begin{cases} 0.037 \cdot Re_1^{0.8} \cdot Pr^{0.4} & \text{if } Pr \geq 1 \\ 0.037 \cdot (Re_1 \cdot Pr)^{0.8} & \text{otherwise} \end{cases}$$

continuous binding in point Pr=1.

$$Nu_{l_force}(Re_1, Pr) := \left(Nu_{l_force_Lam}(Re_1, Pr)^4 + Nu_{l_force_Turb}(Re_1, Pr)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$n := 2.265 \quad F_{appr}(Pr) := \left[\left(0.6004 \cdot Pr^{\frac{1}{2}} \right)^{-n} + \left(0.5027 \cdot Pr^{\frac{1}{4}} \right)^{-n} \right]^{\frac{-1}{n}}$$

$$Nu_{l_free_Lam}(Gr_1, Pr) := \frac{4}{3} \cdot F_{appr}(Pr) \cdot Gr_1^{\frac{1}{4}}$$

$$Nu_{l_free_Turb}(Gr_1, Pr) := \begin{cases} 0.13 \cdot (Gr_1 \cdot Pr)^{\frac{1}{3}} & \text{if } Pr \geq 1 \\ 0.13 \cdot (Gr_1 \cdot Pr^2)^{\frac{1}{3}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

continuous binding in point Pr=1

$$Nu_{min} := 0.7$$

$$Nu_{l_free}(Gr_1, Pr) := Nu_{min} + \left(Nu_{l_free_Lam}(Gr_1, Pr)^4 + Nu_{l_free_Turb}(Gr_1, Pr)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$Nu_l(Re_1, Gr_1, Pr) := \left(Nu_{l_force}(Re_1, Pr)^2 + Nu_{l_free}(Gr_1, Pr)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Рис. 1.13. Глобальная аппроксимация для теплоотдачи пластины

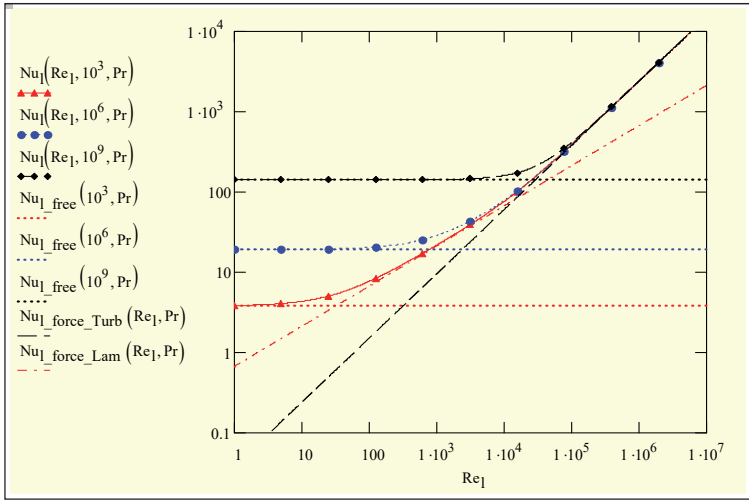


Рис. 1.14. Глобальная аппроксимация (кривые со значками) для теплоотдачи пластины ($Pr = 1$)

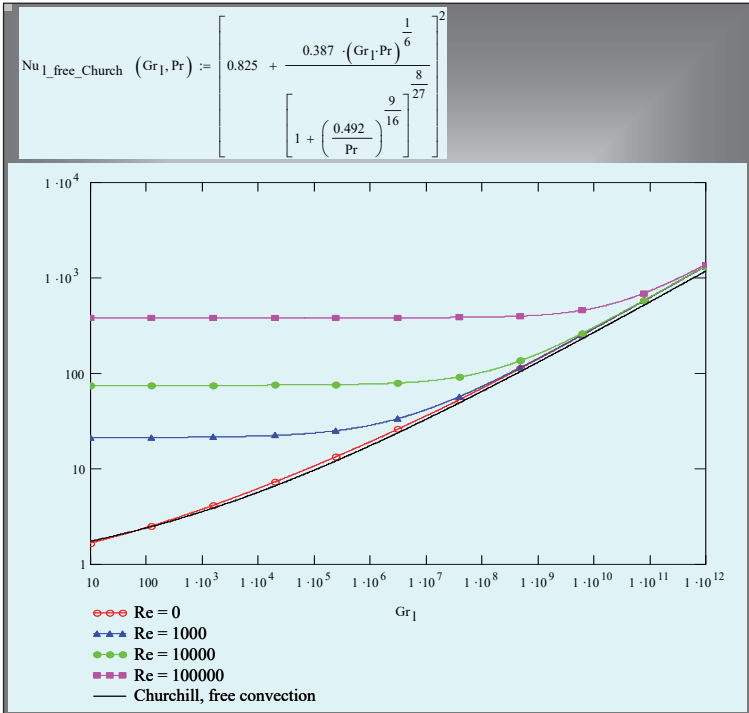


Рис. 1.15. Глобальная аппроксимация (кривые со значками) для теплоотдачи пластины

1.8. Обтекание профилей

Теплоотдачу при поперечном обтекании цилиндра, не обязательно круглого профиля, можно приближенно рассчитать, применяя формулы для продольного обтекания пластины и считая характерным размером l длину обтекания, как показано на рисунке (рис. 1.16):

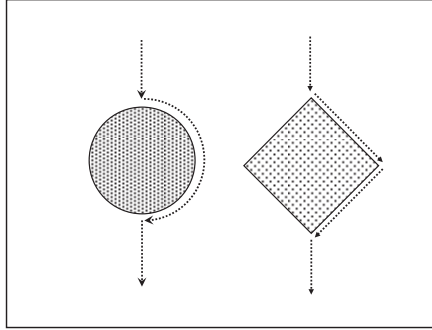


Рис. 1.16. Длина обтекания профилей

Для круглого цилиндра длина обтекания составит половину длины окружности:

$$l = \frac{\pi d}{2}. \quad (1.68)$$

Обычно обтекаемый профиль находится в канале, и скорость жидкости изменяется из-за сужения или расширения сечения потока. Характерное среднее значение определяют с помощью параметра пористости насадки ψ , т.е. доли объема, занятой теплоносителем. Для расчетной ячейки, показанной на рис. 1.17 пунктиром, пористость составит:

$$\psi_{cell} = \frac{db - \frac{\pi d^2}{4}}{db} = 1 - \frac{\pi d}{4b}; \quad b > d, \quad (1.69)$$

а характерная скорость из условия постоянства расхода теплоносителя –

$$u = \frac{w}{\psi_{cell}} = \frac{w}{1 - \frac{\pi d}{4b}}. \quad (1.70)$$

Скорость w , отнесенную к полному, незагроможденному сечению канала, называют приведенной скоростью. Ее значение определяется заданным расходом теплоносителя в канале.

Характерная скорость u , по которой рассчитывается число Рейнольдса в критериальных формулах, является мерой истинной скорости, увеличенной из-за сужения живого сечения потока.

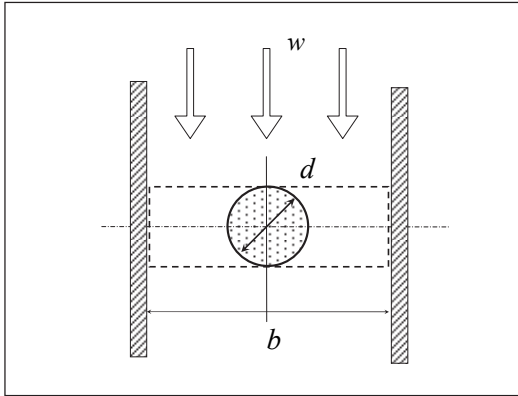


Рис. 1.17. Обтекание профиля в канале

Таким образом, для средней теплоотдачи при обтекании профилей рекомендуются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{l_Lam} &= 0,664 Re_l^{0,5} Pr^{1/3}; \\ \overline{Nu}_{l_Turb} &= 0,037 Re_l^{0,8} Pr^{0,4}; \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\overline{Nu}_l(Re_l, Pr) = \left(\overline{Nu}_{l_Lam} + \overline{Nu}_{l_Turb} \right)^{1/2}; \quad 0,6 \leq Pr \leq 1000.$$

Определяющий размер – длина обтекания (рис. 1.16), определяющая скорость – характерная скорость в канале (1.70).

В случае одиночного круглого цилиндра после подстановки (1.68) в (1.71) получаются расчетные соотношения, представленные на рис. 1.18. Определяющим размером в этих формулах является диаметр цилиндра d . Результаты интерполяции (1.71) сопоставляются со специальной эмпирической формулой для попереч-

ного обтекания одиночного цилиндра. Постоянное слагаемое 0,3 в интерполяционной формуле вводится для улучшения согласования с опытными данными в пределе нулевой скорости обтекания.

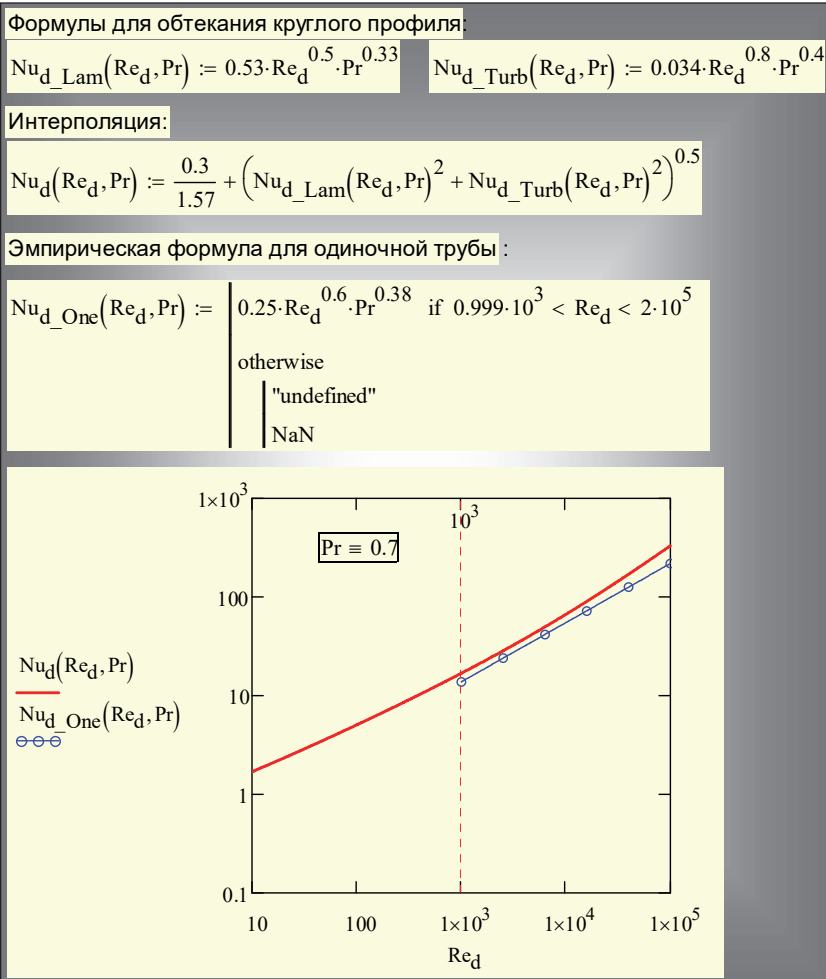


Рис. 1.18. Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра: сопоставление метода интерполяции со специальной эмпирической формулой

При обтекании *трехмерных объектов* протяженность по ходу течения оценивают как отношение полной поверхности к максимальному периметру в сечении, перпендикулярном к потоку (рис. 1.19).

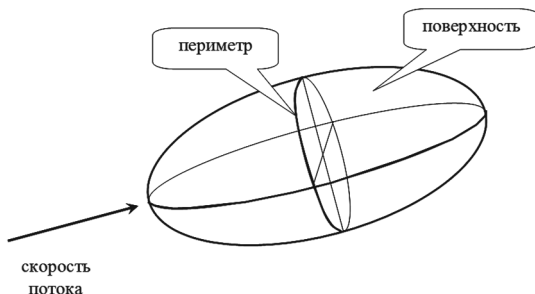


Рис. 1.19. Длина обтекания для трехмерных объектов

Для сферы:

$$l = \frac{\pi d^2}{\pi d} = d;$$

$$\overline{Nu}_{l_Lam} = 0,664 Re_l^{0,5} Pr^{1/3}; \quad (1.72)$$

$$\overline{Nu}_{l_Turb} = 0,037 Re_l^{0,8} Pr^{0,4};$$

$$\overline{Nu}_l(Re_l, Pr) = 2 + \left(\overline{Nu}_{l_Lam} + \overline{Nu}_{l_Turb} \right)^{1/2}.$$

Постоянное слагаемое «2» соответствует пределу стационарной теплопроводности от сферы в бесконечное пространство.

1.9. Теплоотдача в поперечно-обтекаемых пучках труб

Однорядный пучок труб

При поперечном обтекании *однорядного* пучка [51] средняя теплоотдача рассчитывается как для одиночного цилиндра (см. (1.71)), с учетом естественным образом модифицированного значения пористости (рис. 1.20):

$$\Psi_{cell} = \frac{s_1 d - \frac{\pi d^2}{4}}{s_1 d} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}; \quad S_1 \equiv \frac{s_1}{d}, \quad (1.73)$$

где S_1 – относительный поперечный шаг, d – наружный диаметр трубы.

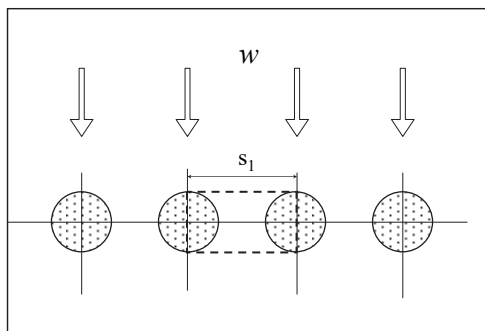


Рис. 1.20. Пористость для одиночного ряда труб

Числа Рейнольдса и Нуссельта, согласно определению, есть:

$$\text{Re}_l \equiv \frac{ul}{v_f} = \left(\frac{w}{\psi_{cell}} \right) \frac{l}{v_f}; \quad \text{Nu}_l \equiv \frac{\alpha l}{\lambda_f}; \quad (1.74)$$

$$l = \frac{\pi d}{2}; \quad \psi_{cell} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}.$$

Многорядный пучок труб

Пористость ψ упорядоченных структур, какими являются *многорядные коридорные и шахматные пучки* труб, определяется для элементарных ячеек, показанных прямоугольниками на рисунках (рис. 1.21, рис. 1.22). В обоих случаях на ячейку приходится одна труба пучка.

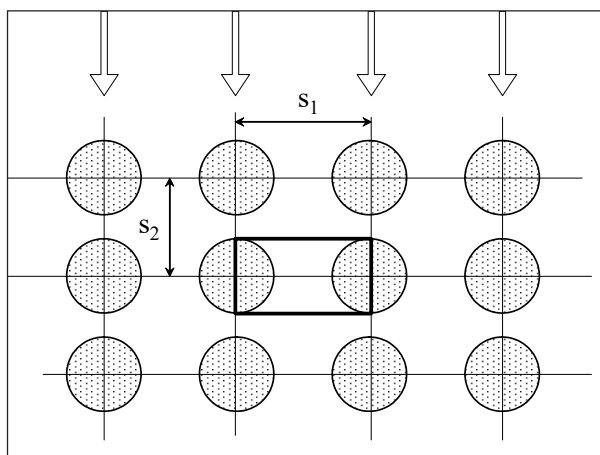


Рис. 1.21. Пористость коридорного пучка труб

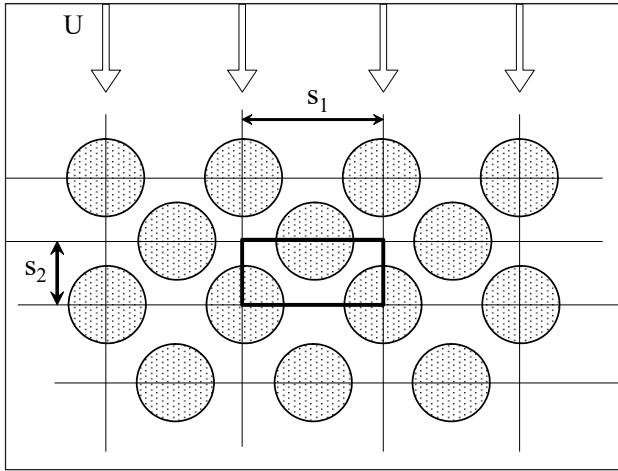


Рис. 1.22. Пористость шахматного пучка труб

Обобщенными геометрическими характеристиками пучка являются пористость, поверхность теплоотдачи в расчете на единицу объема ячейки F_{cell} и эквивалентный диаметр канала d_e . (Последний важен для расчетных методик, в которых межтрубное пространство рассматривается как канал сложной формы).

В случае $S_2 \geq 1$ для коридорного и шахматного пучка с расчетной ячейкой ($s_1 d$) получим:

$$\psi_{cell} = 1 - \frac{\pi d^2 / 4}{s_1 d} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}; \quad F_{cell} = \frac{\pi d}{s_1 d} = \frac{\pi}{s_1} = \frac{1}{d} \frac{\pi}{S_1};$$

$$d_e = 4 \frac{\psi_{cell}}{F_{cell}} = \left(\frac{4}{\pi} \psi_{cell} S_1 \right) d; \quad (1.75)$$

$$\left(\text{если } S_2 > 1 \Rightarrow F_{vol} = \frac{F_{cell}}{S_2} \right).$$

Индекс «cell» означает, что величины отнесены к объему ячейки, не заполняющей весь объем насадки, если $S_2 > 1$. Полный объем будет больше в S_2 раз, как следует из рисунка (рис. 1.21), поэтому поверхность теплоотдачи, отнесенная к полному объему насадки, пересчитывается в последней строке (1.75).

Для шахматного пучка при $S_2 < 1$ (рис. 1.22) расчетная ячейка есть $(s_1 s_2)$, и пористость, поверхность теплоотдачи в расчете на единицу объема и эквивалентный диаметр канала d_e рассчитываются по формулам:

$$\psi = 1 - \frac{\pi d^2 / 4}{s_1 s_2} = 1 - \frac{\pi}{4 S_1 S_2}; \quad F_{vol} = \frac{\pi d}{s_1 s_2} = \frac{1}{d} \frac{\pi}{S_1 S_2};$$

$$d_e = 4 \frac{\psi}{F_{vol}} = \left(\frac{4}{\pi} \psi S_1 S_2 \right) d. \quad (1.76)$$

При компьютерном моделировании следует учитывать не реализуемые по геометрическим соображениям конфигурации, как это сделано в приведенном ниже блоке Mathcad программы (рис.1.23, рис. 1.24).

```

Ψ(S1, S2) :=
return 0 if S1 < 1

Ψmin ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$ 

if S2 ≥ 1
    "for both Cor and Chess as for one row: "
    Ψ ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot S_1}$ 
otherwise
    "only for Chess"
    S2_min ← max  $\left[ \frac{1}{2}, \sqrt{1 - \left( \frac{\min(S_1, 2)}{2} \right)^2} \right]$ 
    return 0 if S2 < S2_min
    "for admissible configurarion"
    Ψ ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot S_1 \cdot S_2}$ 
Ψ ← max(Ψ, Ψmin)

```

Рис. 1.23. Пористость расчетной ячейки пучка труб (рис. 1.21, рис. 1.22)

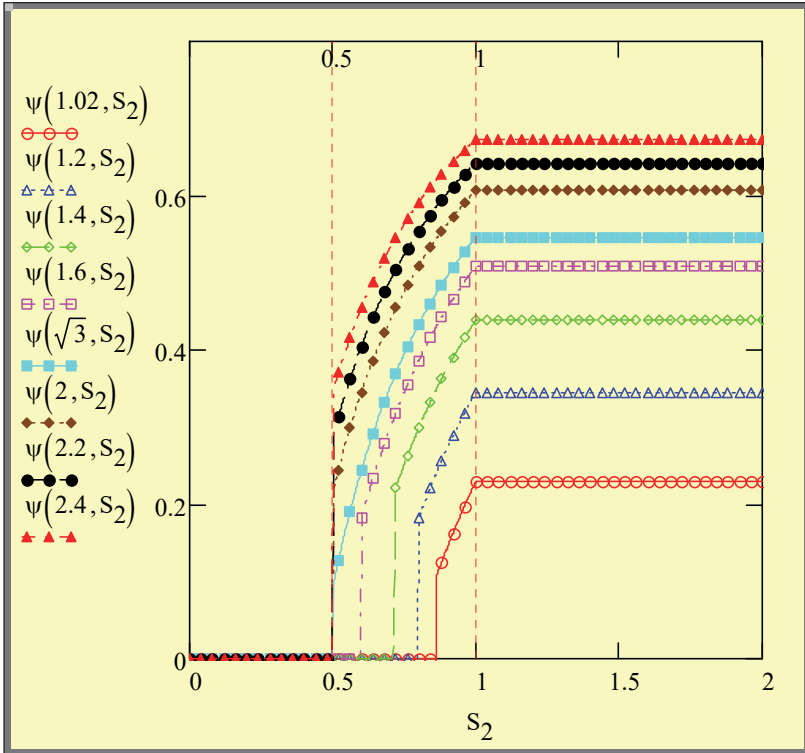


Рис. 1.24. Зависимость пористости расчетной ячейки от геометрических параметров пучка

Расчет теплоотдачи в *многорядных пучках* производят по формуле

$$Nu_{\text{bank}} = f_A \cdot Nu_{\text{OneRow}}, \quad (1.77)$$

где число Нуссельта однорядного пучка рассчитывается по (1.71). Числа Рейнольдса и Нуссельта определяются по длине обтекания профиля l и средней скорости в пористой структуре:

$$Re_l \equiv \frac{ul}{\nu_f} = \left(\frac{w}{\psi} \right) \frac{l}{\nu_f}; \quad Nu_l \equiv \frac{\alpha l}{\lambda_f}; \quad l = \frac{\pi}{2} d,$$

где w – приведенная скорость, отнесенная к полному, незагроможденному сечению канала.

Пористость ψ рассчитывается по (1.75), (1.76) (рис. 1.23), а коэффициент структуры f_A пучка – по формулам на рис. 1.25.

Графические иллюстрации (рис. 1.26, рис. 1.27) представляют теплоотдачу коридорного и шахматного пучков с неметаллическим теплоносителем. Исходные формулы (1.71) пересчитаны к характерному размеру – наружному диаметру трубы в соответствии с (1.68).

На рисунках показано также, как вычисляется пористость ψ (рис. 1.23) и коэффициент структуры f_A (рис. 1.25).

Преимуществом интерполяционных соотношений перед специализированными формулами, также представленными на рисунках, является существенно более широкая охватываемая область чисел Рейнольдса и геометрических параметров. Если вместо исходных соотношений (1.71), пригодных для неметаллических теплоносителей, использовать универсальные соотношения (рис. 1.11), то получится методика, пригодная также для расчета теплоотдачи в пучках, обтекаемых жидкими металлами.

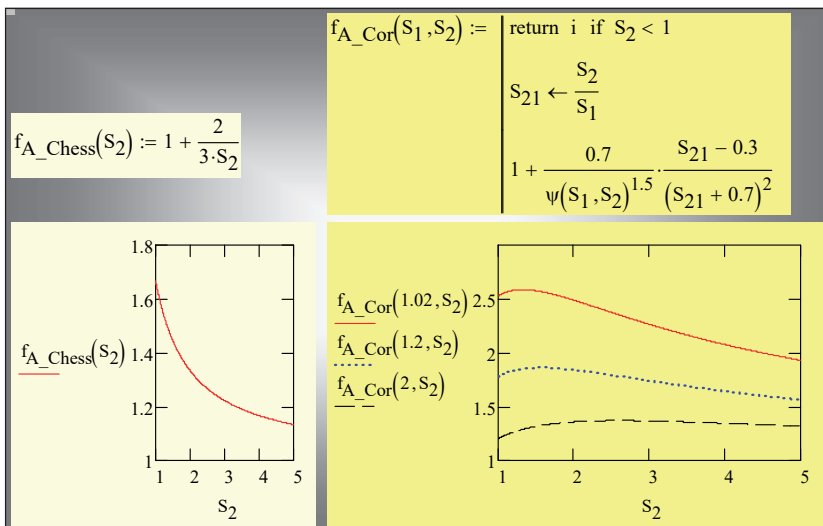


Рис. 1.25. Зависимость коэффициента структуры f от геометрических параметров пучка

$$\text{Nu}_{d_OneRow}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{Nu}_{d_Lam} \leftarrow 0.53 \cdot Re_d^{0.5} \cdot Pr^{0.33} \\ \text{Nu}_{d_Turb} \leftarrow 0.034 \cdot Re_d^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \\ \frac{0.3}{1.57} + \left(\text{Nu}_{d_Lam}^2 + \text{Nu}_{d_Turb}^2 \right)^{0.5} \end{cases}$$

Эмпирическая формула для коридорного пучка

$$\text{Nu}_{d_Corr}(Re_d, Pr) := \begin{cases} 0.22 \cdot Re_d^{0.65} \cdot Pr^{0.36} & \text{if } 0.999 \cdot 10^3 < Re_d < 2 \cdot 10^5 \\ \text{otherwise} \\ \text{"undefined"} \\ \text{NaN} \end{cases}$$

$$S_1 := 2$$

$$S_2 := 1.5$$

$$Pr = 0.7$$

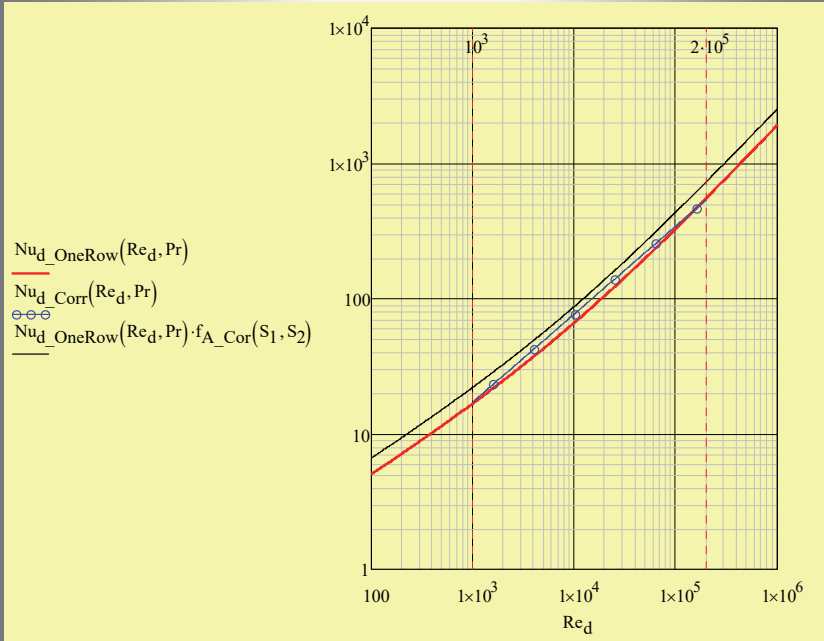


Рис. 1.26. Теплоотдача коридорного пучка

$$\text{Nu}_d\text{_OneRow}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{Nu}_d\text{_Lam} \leftarrow 0.53 \cdot Re_d^{0.5} \cdot Pr^{0.33} \\ \text{Nu}_d\text{_Turb} \leftarrow 0.034 \cdot Re_d^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \\ \frac{0.3}{1.57} + \left(\text{Nu}_d\text{_Lam}^2 + \text{Nu}_d\text{_Turb}^2 \right)^{0.5} \end{cases}$$

Эмпирическая формула для шахматного пучка

$$\text{Nu}_d\text{_Chess}(Re_d, Pr) := \begin{cases} 0.4 \cdot Re_d^{0.6} \cdot Pr^{0.36} & \text{if } 0.999 \cdot 10^3 < Re_d < 2 \cdot 10^5 \\ \text{"undefined"} \\ \text{NaN} \end{cases}$$

$S_1 := 2$ $S_2 := 1.5$ $Pr = 0.7$

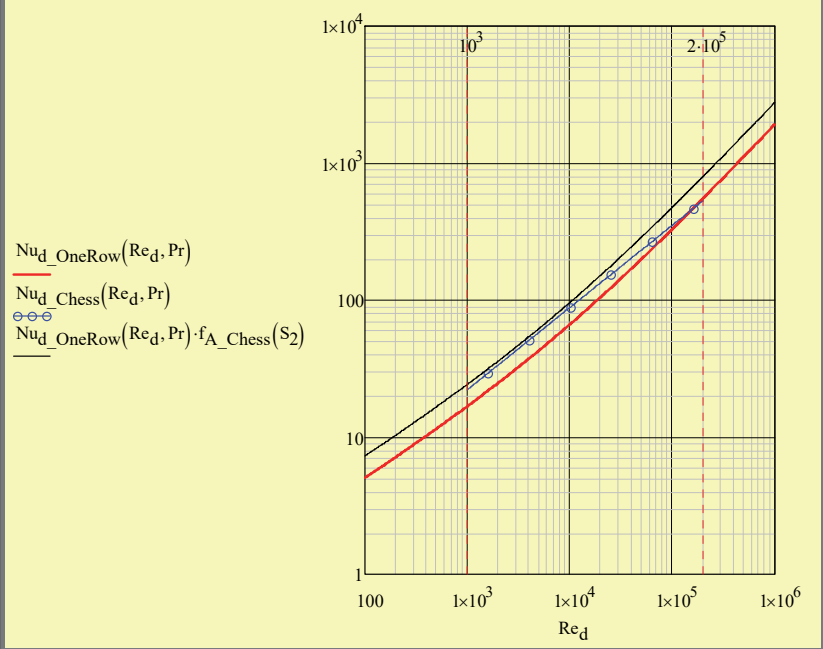


Рис. 1.27. Теплоотдача шахматного пучка

1.10. Теплоотдача в трубах и каналах

Теплоотдача в круглых трубах

Общая картина развивающихся полей скорости и температуры при ламинарном вынужденном течении в трубе (при $Re_d \leq 2300$) показана на рис. 1.28. Поля рассчитаны численным методом (подробности решения задачи можно найти в html-документе [51]).

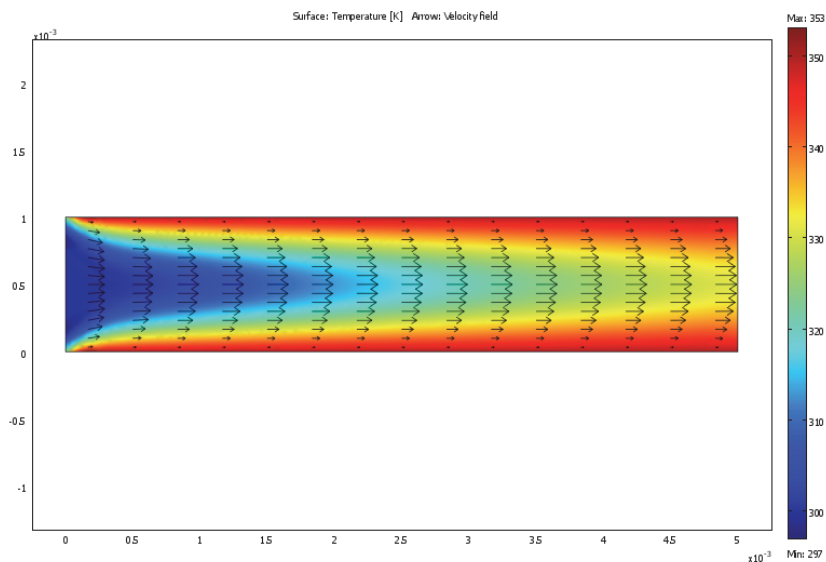


Рис. 1.28. Теплоотдача на начальном участке при ламинарном режиме (цвет – распределение температуры, стрелки – распределение скорости)

Холодная жидкость поступает в трубу, температура которой поддерживается на постоянном повышенном уровне. Цветом показано распределение температур с интуитивно понятной градацией: от низких (синий цвет) к высоким (красный цвет) значениям. Слой прогретой жидкости у горячей стенки утолщается по мере продвижения жидкости вдоль трубы, пока прогрев не охватит всю толщину потока от стенки до оси трубы. Аналогично развивается поле скоростей, показанное стрелками. Осевой поток жидкости подтормаживается у стенки, пока не сформируется

установившийся, известный из курса гидродинамики параболический (пуазейлевский) профиль скорости. Говорят, что на *начальном участке* (рис. 1.28) *развиваются* гидродинамический и тепловой пограничные слои с увеличивающейся толщиной, вплоть до достижения радиуса трубы. Далее развитие по продольной координате прекращается и имеет место *стабилизированное* течение и *стабилизированная* теплоотдача.

Можно полагать, что на начальном участке теплоотдача развивается аналогично тому, как это происходит при продольном обтекании пластины. Новым является вопрос о длине участка стабилизации и предельном, установившемся значении теплоотдачи (см. соответствующие оценки ниже). Дополнительную информацию о *локальной теплопередаче* при ламинарном течении в *микрорканальных теплообменниках* можно найти в гл. 10 «Микро-теплообменники».

При переходном ($2300 < Re_d < 10000$) и развитом турбулентном ($Re_d > 10000$) режимах картина течения и теплообмена в трубах оказывается существенно более сложной. Продемонстрируем ее с помощью численной модели. Подробности решения можно найти в html-документе [51], а основные результаты представлены графически (рис. 1.29–1.32). Вводную информацию о турбулентном переносе можно найти в Томе 1\ гл. 2.

Основная сложность расчета турбулентных потоков связана с необходимостью скорректировать значения коэффициентов *вязкости и теплопроводности* теплоносителя, чтобы учесть явление *турбулентного перемешивания*:

$$\lambda = \lambda_M + \lambda_T; \quad \mu = \mu_M + \mu_T.$$

Таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости в выражениях законов теплопроводности или трения

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}; \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

считаются не просто характеристиками молекулярного (индекс M) переноса – свойствами вещества, но *эффективными* величинами, содержащими дополнительную составляющую, связанную с турбулентным перемешиванием (индекс T).

Для определения коэффициентов турбулентного переноса существует целая иерархия расчетных моделей. В инженерных расчетах часто применяют k - ε модель турбулентности, где k – турбулентная энергия в расчете на единицу массы ($\text{м}^2/\text{с}^2$) и ε – скорость диссипации турбулентной энергии ($\text{м}^2/\text{с}^3$) – величины, связанные следующим балансовым уравнением в простейшем случае *затухающей* турбулентности:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \tau} = -\rho \varepsilon.$$

Вообще говоря, (k, ε) – это две новые переносимые величины (дополнительно к массе, импульсу и энергии потока), для которых должны быть составлены дифференциальные уравнения сохранения (переноса). Например, в случае кинетической энергии турбулентности содержание такого уравнения будет следующим: скорость возрастания турбулентной энергии k в единичном контрольном объеме определяется подводом k через его границу посредством кондукции и конвекции, производством турбулентной энергии за счет работы сил сопротивления и диссипацией ε .

Величины (k, ε) определяют значения турбулентных коэффициентов переноса:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad \text{Pr}_T \equiv \frac{\nu_T}{a_T} \approx 1 \Rightarrow \lambda_T \approx c_p \mu_T.$$

В иллюстративном расчетном примере (рис. 1.29–1.32) рассматривается теплоотдача к турбулентному потоку воздуха в трубе диаметром 0,1 м и длиной 5 м. Расположение трубы на рисунках вертикальное, правая вертикальная линия – ось симметрии (ось трубы), левая вертикальная линия – стенка трубы.

Общая картина развития теплоотдачи на начальном участке круглой трубы при турбулентном режиме (рис. 1.29) схожа с ламинарным течением (рис. 1.28): в обоих случаях сначала развиваются гидродинамический и тепловой пограничные слои, пока их толщина не достигнет радиуса трубы; далее имеет место *стабилизированное* течение и *стабилизированная* теплоотдача. Однако существенные детали различаются очень сильно.

Обратим внимание прежде всего на профили скорости турбулентного потока (рис. 1.30). Вместо плавного изменения скорости по сечению пограничного слоя (или по всему сечению трубы на стабилизированном участке) имеет место резко неравномерный профиль. Проследивая изменение скорости от нуля на стенке (левая вертикаль на рисунке) до максимального значения на оси потока (правая вертикаль), мы регистрируем сначала очень быстрое нарастание в тонком пристенном слое (настолько тонком, что его затруднительно изобразить на рисунке, и нарастание показано в виде скачка), а затем относительно плавное изменение в ядре потока.

Аналогично выглядят распределения температуры по сечению трубы на рис. 1.31.

Объяснение этому феномену дается распределением *турбулентной теплопроводности* λ_T по толщине потока (рис. 1.32) (и аналогичным по форме распределением *турбулентной вязкости* μ_T , не показанном на рисунках).

Видно, что обусловленная интенсивным турбулентным перемешиванием в ядре потока турбулентная теплопроводность λ_T намного превышает *молекулярные* значения (0,026 Вт/м К для воздуха), благодаря чему обеспечивается очень высокая *эффективная* теплопроводность потока, $\lambda = \lambda_M + \lambda_T$ и, соответственно, относительно низкий поперечный градиент температуры.

Напротив, вблизи стенки турбулентное перемешивание прекращается из-за влияния сил вязкости (действует условие прилипания). Поэтому турбулентная составляющая теплопроводности исчезает, эффективная теплопроводность становится равной ее молекулярному, относительно низкому значению, а градиент температуры у стенки достигает весьма больших значений.

Описанная в общих чертах картина теплоотдачи в турбулентном потоке показывает, с какими трудностями встречаются инженеры при расчетах и проектировании теплообменных устройств. Сложная геометрия элементов конструкций и потоков, разнообразие режимов, стремление к более глубокому пониманию механизмов переноса влечет разработку все более сложных моделей турбулентности.

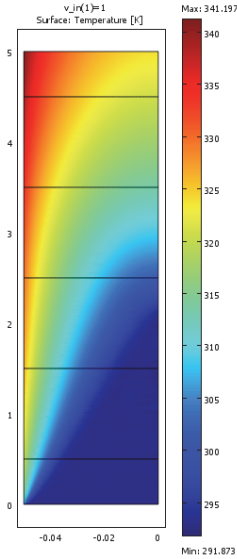


Рис. 1.29. Теплоотдача на начальном участке круглой трубы при турбулентном режиме (цвет – распределение температуры, правая вертикальная линия $r = 0$ – ось симметрии, или ось трубы; диаметр трубы – 0,1 м, длина – 5 м)

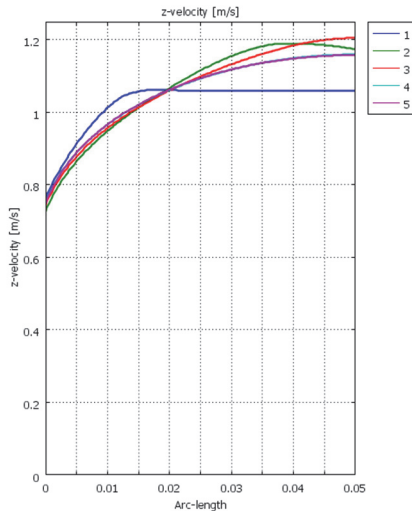


Рис. 1.30. Распределение скорости в различных сечениях по длине турбулентного потока (1–5 – номера сечения, рис. 1.29; линии 1, 2, 3 относятся еще к начальному участку; линии 4 и 5 сливаются, что означает стабилизацию потока; быстрое изменение скорости до нуля в тонком пристенном слое не показано)

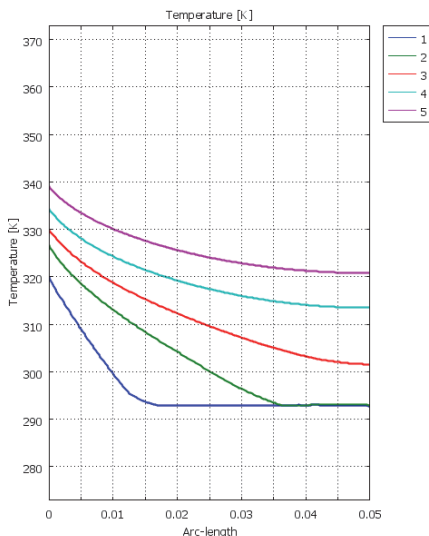


Рис. 1.31. Распределения температуры в различных сечениях по длине турбулентного потока (1–5 – номера сечения, в которых построены распределения, рис. 1.29; быстрое изменение температуры в тонком пристенном слое не показано)

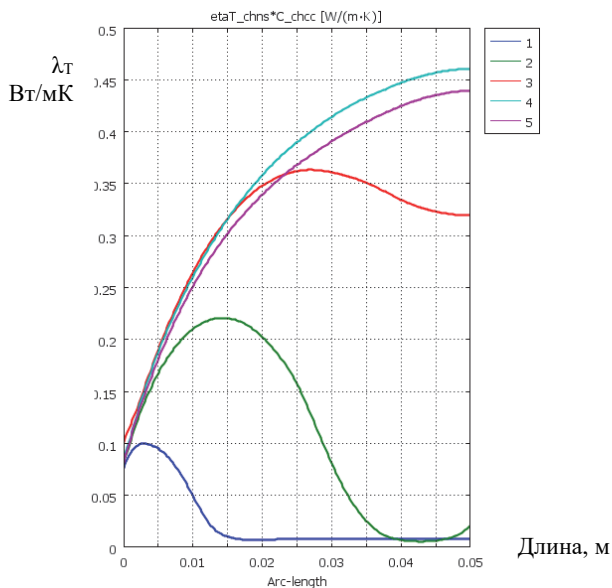


Рис. 1.32. Турбулентная теплопроводность λ_T в газовом потоке как функция расстояния от стенки трубы (1–5 – номера сечения, в которых построены распределения, рис. 1.29)

Вычислительные процедуры при реализации этих моделей также усложняются и требуют применения суперкомпьютеров (достаточно принять во внимание необходимость высокого пространственного разрешения вблизи твердых стенок, где все изменения происходят очень быстро). Поэтому на практике применяются разумное сочетание детального компьютерного моделирования теплообменных устройств с более простыми расчетными моделями, рассматриваемыми далее.

Теплоотдача на *начальном участке* может быть приближенно описана соотношениями п. 1.9 для пластины, по крайней мере вблизи входа, где толщина пограничного слоя еще мала по сравнению с радиусом трубы. Эти соотношения принимаются в дальнейшем в качестве *асимптотики* начального участка.

Стабилизированная теплоотдача при ламинарном течении оценивается очевидным соотношением:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{x \rightarrow \infty}} \approx \frac{\lambda_f}{d/2} \Rightarrow \text{Nu}_d \equiv \frac{\alpha d}{\lambda_f} = C.$$

Константа C порядка единицы принимает несколько отличающиеся числовые значения в зависимости от граничных условий. *Средняя* теплоотдача с удовлетворительной точностью рассчитывается по формуле:

$$\overline{\text{Nu}}_d \equiv \frac{\overline{\alpha} d}{\lambda_f} = 4 \cdot \varepsilon_t. \quad (1.78)$$

Элементарную оценку теплоотдачи при *турбулентном режиме* можно получить, предполагая что *все* сопротивление переносу теплоты сосредоточивается в так называемом *вязком подслое* δ_{vis} – тонком слое жидкости у стенки, в котором турбулентное перемешивание полностью подавлено силами вязкости (см. аналогичные вычисления в п. «Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины», «Турбулентный режим»):

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{\text{vis}}}.$$

Толщина вязкого подслоя оценивается через сопротивление вязкого трения следующим образом:

$$\tau \approx \mu \frac{U}{\delta_{vis}} = C_f \frac{\rho U^2}{2} \Rightarrow \delta_{vis} \approx \frac{2\nu}{C_f U};$$

$$C_f = \frac{0,046}{\text{Re}_d^{0,2}},$$

где коэффициент сопротивления C_f определен надежной эмпирической формулой для течений в трубах.

Последующие простые подстановки приводят к окончательному оценочному результату:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha d}{\lambda_f} \approx \frac{d}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha d}{\lambda_f} \approx \frac{Ud}{\nu} \frac{C_f}{2} = \left(\frac{Ud}{\nu} \right) \left(\frac{0,023}{\text{Re}_d^{0,2}} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Nu}_d \approx 0,023 \text{Re}_d^{0,8}.$$

Более строгая теория дает для *стабилизированной теплоотдачи при турбулентном режиме* следующее соотношение, являющееся общепринятым стандартом при инженерных расчетах (формула Б.С. Петухова):

$$\overline{\text{Nu}}_d = \frac{\frac{\xi}{8} \text{Re}_d \text{Pr}}{1,07 + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot (\text{Pr}^{2/3} - 1)}; \quad \xi = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg(\text{Re}_d) - 1,64)^2}; \quad (1.79)$$

$$10^4 < \text{Re}_d < 5 \cdot 10^5; \quad 0,5 < \text{Pr} < 2000,$$

где ξ – коэффициент гидравлического сопротивления, рассчитываемый в (1.79) по формуле Филоненко, характерным размером в числах подобия является внутренний диаметр трубы.

Возможно также применение более простой по структуре (факторизованной) эмпирической формулы М.А. Михеева:

$$\overline{\text{Nu}}_d = 0,021 \cdot \text{Re}_d^{0,8} \text{Pr}^{0,43}. \quad (1.80)$$

Различие между этими формулами относительно невелико (рис. 1.33).

Для построения глобальной аппроксимации наиболее подходящей оказывается формула вида (1.79), модифицированная с целью лучшего описания теплоотдачи в переходной области чисел Рейнольдса 2300÷10000 (Gnielinsky):

$$\overline{Nu}_d = \frac{\frac{\xi}{8} (Re_d - 1000) Pr}{1 + 12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot (Pr^{2/3} - 1)}; \quad \xi = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg(Re_d) - 1,64)^2}. \quad (1.81)$$

Формула (1.81) используется далее как предельное соотношение для *стабилизированной теплоотдачи при турбулентном режиме* в случае неметаллических жидкостей.

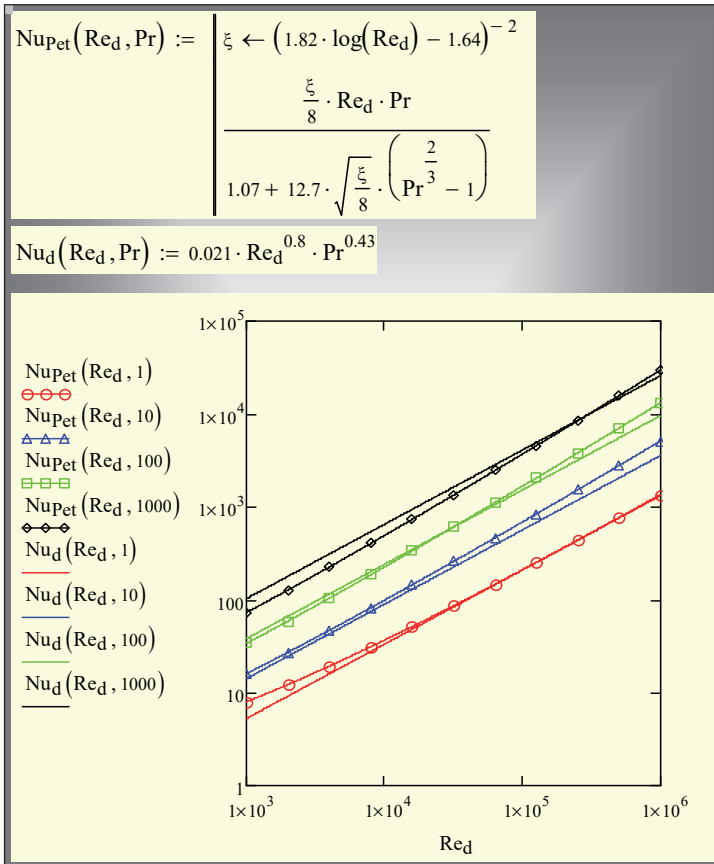


Рис. 1.33. Сопоставление формул Б.С.Петухова и М.А.Михеева для турбулентного течения в трубах

Стабилизированную теплоотдачу при турбулентном течении *жидкометаллических теплоносителей* получим как продолжение зависимости (1.80) в область малых чисел Прандтля, аналогично тому, как это было сделано в случае турбулентного обтекания пластины (формулы (1.25), (1.51) и комментарии к ним):

$$\begin{aligned}\overline{Nu}_d &= 0,021 \cdot (\text{Re}_d \text{Pr})^{0,8}; \\ \overline{Nu}_d &= 0,021 \cdot \text{Pe}_d^{0,8}.\end{aligned}\tag{1.82}$$

Теплоотдача к жидким металлам при ламинарном стабилизированном режиме рассчитывается по формуле (1.78), а на начальном участке – по рекомендациям п. 1.9.

Глобальную аппроксимацию строят методом интерполяции между асимптотами (рис. 1.34, рис. 1.35).

Теплоотдачу на начальном участке (рис. 1.34) описывают формулами для пластины (рис. 1.11), преобразованными к другому характерному размеру – диаметру трубы вместо длины по ходу потока; в результате появляется отношение длины канала к диаметру: $L_d = L/d$.

$$\begin{aligned}Nu_{L_force_Lam}(Re_L, Pr) &:= \sqrt[2]{\left[\left(\frac{1}{0,798 Pr^2} \right)^{-4} + \left(\frac{1}{0,479 Pr^3} \right)^{-4} \right]^{-0,25}} \cdot Re_L^{0,5} \\ Nu_{L_force_Turb}(Re_L, Pr) &:= \begin{cases} 0,037 Re_L^{0,8} \cdot Pr^{0,4} & \text{if } Pr \geq 0,5 \\ \text{"liquid metal"} \\ 0,037 (Re_L \cdot Pr)^{0,8} \end{cases} \\ Nu_{L_force}(Re_L, Pr) &:= \left(Nu_{L_force_Lam}(Re_L, Pr)^4 + Nu_{L_force_Turb}(Re_L, Pr)^4 \right)^{\frac{1}{4}} \\ Nu_{d_beg}(Re_d, Pr, L_d) &:= \begin{cases} Re_L \leftarrow Re_d \cdot L_d \\ \frac{Nu_{L_force}(Re_L, Pr)}{L_d} \end{cases}\end{aligned}$$

Рис. 1.34. Средняя теплоотдача на начальном участке трубы Nu_{d_beg}

Базовыми соотношениями для *стабилизированной* теплоотдачи являются (1.78) – асимптотика малых чисел Рейнольдса (ламинарный режим) и (1.81), (1.82) – асимптотика больших чисел Рейнольдса (турбулентный режим). Интерполяция между этими пределами (рис. 1.35) позволяет рассчитывать *стабилизированную* теплоотдачу (в *длинных* трубах) для ламинарного, переходного и турбулентного режимов (т.е. при любых числах Рейнольдса) и для любых теплоносителей (жидких металлов, газов, вязких жидкостей).

$$\text{Nu}_{d_Turb_inf}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{if } Pr > 0.6 \\ \quad \begin{cases} 0 & \text{if } Re_d < 1000 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} \xi \leftarrow (1.82 \log(Re_d) - 1.64)^{-2} \\ \frac{\xi}{8} \cdot (Re_d - 1000) \cdot \frac{Pr}{1 + 12.7 \cdot \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot \left(\frac{2}{Pr^3} - 1\right)} \end{cases} \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} \text{"liquid-metal"} \\ 0.021 \cdot (Re_d \cdot Pr)^{0.8} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Interpolation for long tubes:

$$\text{Nu}_{d_inf}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{Nu}_{d_Lam_inf} \leftarrow 4 \\ \text{Nu}_{d_inf} \leftarrow \left(\text{Nu}_{d_Lam_inf}^4 + \text{Nu}_{d_Turb_inf}(Re_d, Pr)^4 \right)^{0.25} \end{cases}$$

Рис. 1.35. Стабилизированная теплоотдача в длинных трубах

Глобальная интерполяция для теплоотдачи при вынужденной конвекции в трубах:

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Nu}}_d(Re_d, Pr, L_d) = & \\
 = & \left[\overline{\text{Nu}}_{d_beg}(Re_d, Pr, L_d)^4 + \overline{\text{Nu}}_{d_inf}(Re_d, Pr)^4 \right]^{1/4}; \quad (1.83) \\
 & Re_d < 10^6; \quad Pr < 2000; \quad 0 < L_d < \infty
 \end{aligned}$$

иллюстрируется диаграммами на рис. 1.36–1.38, соответственно для трех групп теплоносителей: газов, жидких металлов, вязких жидкостей. В комплектной Mathcad-программе формуле (1.83) предшествуют блоки, представленные на рис. 1.34, 1.35.

Диаграммы показывают, как функционирует глобальная аппроксимация в широком интервале чисел Рейнольдса. В левой части рисунков, при малых значениях числа Re фиксируется предел ламинарной стабилизированной теплоотдачи $Nu \approx 4$.

При больших значениях числа Re проявляется характерная для турбулентного режима зависимость $Nu \sim Re^{0,8}$ (см. формулу Михеева (1.80)). Переход происходит в области чисел Рейнольдса $10^3 \div 10^4$.

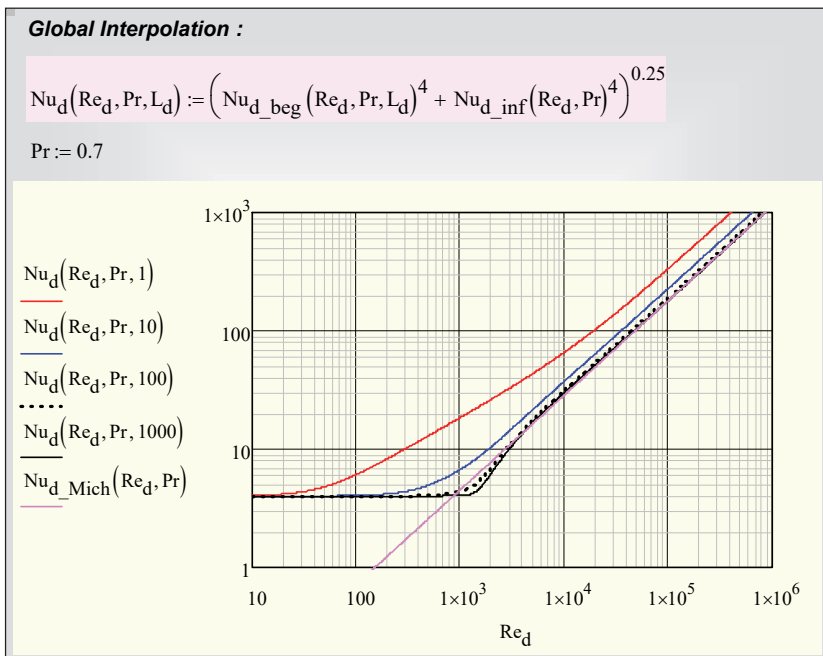


Рис. 1.36. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re ; теплоноситель – воздух ($Pr = 0,7$); варьируемый параметр – длина трубы

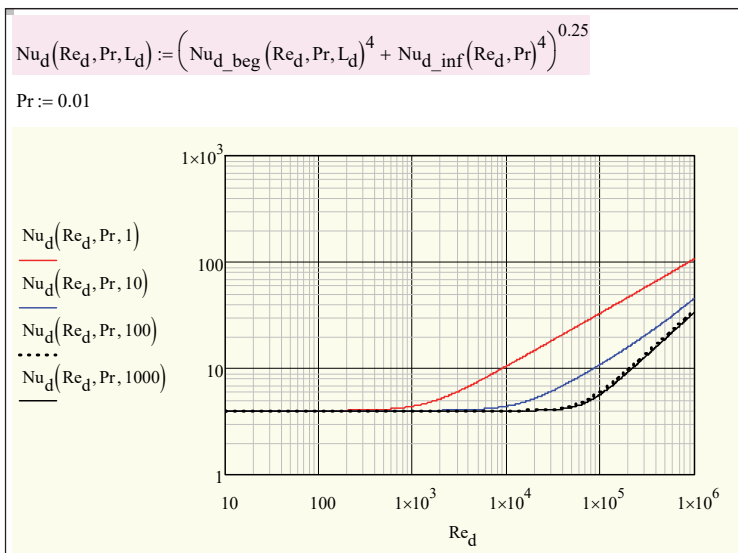


Рис. 1.37. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re; теплоноситель – жидкий металл ($Pr = 0,01$); варьируемый параметр – длина трубы

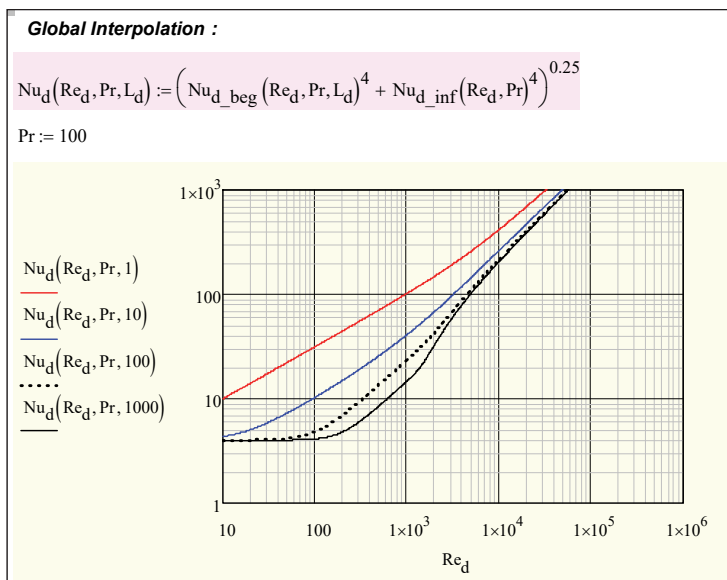


Рис. 1.38. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re; теплоноситель – вязкая жидкость ($Pr = 100$); варьируемый параметр – длина трубы

Для теплоотдачи жидких металлов (рис. 1.37) проявляется относительно слабое влияние турбулентности потока, ввиду большой собственной (молекулярной) теплопроводности этого типа теплоносителей.

Для вязких теплоносителей ($Pr \gg 1$) (рис. 1.38) характерно наличие длинного начального участка, что особенно отчетливо видно на рис. 1.39, где число Nu представлено как функция длины канала. Для вязких теплоносителей при ламинарном режиме начальный участок становится очень протяженным и достигает тысяч калибров (две нижние кривые на рис. 1.39). Верхняя кривая соответствует уже турбулентному режиму с коротким начальным участком в несколько десятков калибров.

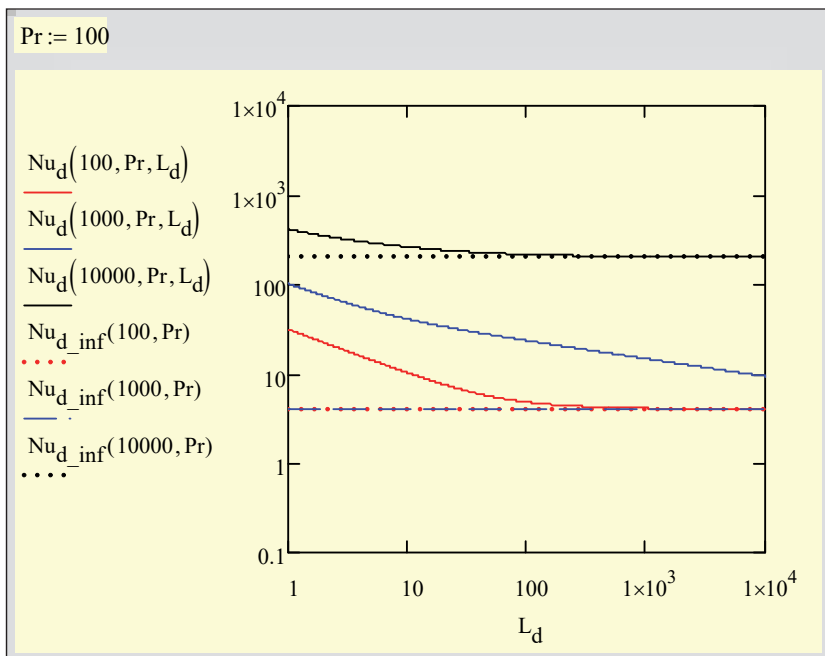


Рис. 1.39. Средняя теплоотдача вязких теплоносителей ($Pr = 1000$) в трубах различной длины

К Mathcad-программе для инженерного расчета теплоотдачи при течении в трубах можно обратиться по ссылке [51].

Специальные задачи

В инженерной практике приходится рассчитывать теплоотдачу для более сложных геометрических объектов, чем пластины или круглые трубы. В атомных энергетических установках часто применяются кольцевые каналы и продольно обтекаемые пучки труб. Плоские щелевые каналы, прямоугольные каналы с различным соотношением сторон, сплюснутые (эллиптического сечения) трубы и т.п. – таков широкий перечень возможных конфигураций поверхностей теплоотдачи.

При *развитом турбулентном течении* в некруглых каналах удовлетворительно работает простая методика, основанная на применении эквивалентного (гидравлического) диаметра:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nu}}_d &\equiv \frac{\overline{\alpha} d_{eq}}{\lambda_f}; & \text{Re}_d &\equiv \frac{w d_{eq}}{v_f}; \\ d_{eq} &\equiv \frac{4f}{u} \equiv 4 \frac{\text{площадь сечения}}{\text{смоченный периметр}}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Для треугольных или многоугольных сечений необходимо вводить дополнительную поправку на вторичную циркуляцию, развивающуюся в углах.

При *ламинарном течении* в каналах сложной формы необходимо численное моделирование, чтобы надежно учесть особенности течения и теплообмена. Целый ряд конфигураций описан в справочной литературе. Ламинарному течению в *микротеплообменниках* посвящена гл. 10.

Специальной проблемой является *смешанная конвекция* в трубах, когда из-за больших температурных напоров в трубах возникает заметная естественная циркуляция, накладывающаяся на относительно медленное вынужденное основное течение. Приближенную методику расчета методом интерполяции между асимптотами можно построить аналогично тому, как это сделано в вычислительном блоке на рис. 1.8.

В целом методика интерполяции между асимптотами является эффективным инструментом приближенного моделирования сложных задач теплообмена. Глобальные аппроксимации, пригодные во всей области изменения актуальных параметров, гаран-

тируют от грубых ошибок при моделировании реальных устройств, работающих не только в штатных оптимизированных условиях, но и на переходных и «нерасчетных» – ухудшенных, аварийных или даже грозящих катастрофой режимах.

В настоящее время, в связи с прогрессом вычислительной техники и достижениями численного анализа, расширяются *промышленные* применения прямого численного моделирования сложных реальных процессов и установок. Примеры моделирования термогидродинамических полей при вынужденном ламинарном и турбулентном течении в трубах и каналах представлены на рис. 1.28–1.32.

1.11. Аналогия процессов теплообмена и массообмена

Потоки теплоты и массы через границу раздела

В технике и в природе теплообмен часто сопровождается *массообменом*. Погода и климат на планете в значительной степени определяются *испарением / конденсацией* водяных паров атмосферы на поверхности океана. Существенно зависит от *газообмена* на водной поверхности содержание в земной атмосфере углекислого газа, ответственного за опасный парниковый эффект.

Важным техническим приложением теории массообмена является проектирование конденсационных и испарительных установок в энергетике, таких как конденсаторы паровых турбин, аппараты для обессоливания воды, технические кондиционеры. Эффект *испарительного охлаждения* применяется в тепловой и атомной энергетике для создания *градирен* – крупномасштабных установок в системах охлаждения конденсаторов паровых турбин, в ракетной технике – для защиты элементов конструкции от воздействия высокотемпературных газовых потоков и т.п.

Определяющим расчетным параметром в таких процессах является концентрация парогазовой смеси. Даже небольшие неконтролируемые примеси неконденсирующихся газов (воздуха в водяном паре) приводят к заметному снижению скорости конденсации («отравлению» конденсатора, системы охлаждения на тепловых трубах и т.п.).

Рассмотрим (Рис. 1.40) потоки массы и теплоты через границу раздела фаз, на которой происходит *конденсация пара из парогазовой смеси* (или испарение воды в парогазовую смесь). Отметим, что мы имеем дело с двухфазной (жидкость / газ) двухкомпонентной (вода / воздух) системой. Можно считать, что в *жидкой* фазе содержится только один компонент – вода, ввиду весьма малой растворимости воздуха.

Для такой двухфазной системы «вода – парогазовая смесь» граница раздела является *полупроницаемой*: *проницаемой* для водяного пара (при конденсации или испарении) и *непроницаемой* для газа.

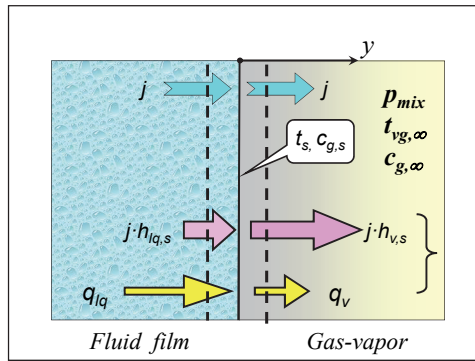


Рис. 1.40. Потоки массы и теплоты на поверхности раздела фаз

Условие сохранения массы диктует равенство потоков вещества j (кг/м²с) через пунктирные контрольные поверхности, расположенные бесконечно близко к межфазной границе $y = 0$ по обе ее стороны:

$$j|_{y=0} = j|_{y=+0} \equiv j. \quad (1.85)$$

Эти массовые потоки *смеси* (j) составлены из потоков *компонентов* смеси – воды (водяного пара, далее индекс «H₂O») или «v» (варог, англ.) и газа (воздуха, индекс «g»):

$$j = j_{H_2O} + j_g; \quad (1.86)$$

$$\left[\underbrace{j_{H_2O}}_{\text{liquid}} + \underbrace{j_g}_0 \right]_{y=0} = \left[\underbrace{j_{H_2O}}_{\text{vapor}} + \underbrace{j_g}_0 \right]_{y=+0} \equiv j.$$

Итак, полный поток массы j через границу – это поток водной компоненты, который мы будем обозначать в дальнейшем как поток пара j_v по правую сторону границы на рис. 1.40:

$$j_g \Big|_{y=+0} = 0 \Rightarrow j_v \Big|_{y=+0} \equiv \underbrace{j_{\text{H}_2\text{O}}}_{\text{vapor}} \equiv j \neq 0. \quad (1.87)$$

Существование макроскопического (гидродинамического) течения в *поперечном* направлении на границе раздела (поток смеси $j \neq 0$) является важной особенностью массообмена (рис. 1.41). При конденсации (правый рисунок) поперечная скорость V на стенке – ненулевая: $V = j_v / \rho$, хотя продольная составляющая U по-прежнему подчиняется условию прилипания и поэтому равна нулю на неподвижной границе. Сопоставление наглядно показывает, как деформируется поле течения под действием массообмена на стенке.

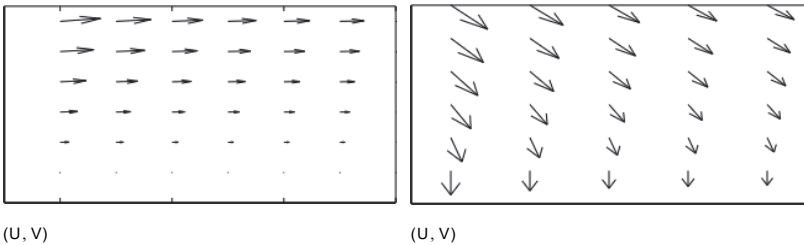


Рис. 1.41. Течение вблизи непроницаемой (слева) и проницаемой (справа) горизонтальной поверхности раздела, совпадающей с нижней кромкой рисунка (по результатам численного решения уравнения Фолкнера–Скэн для течения в пограничном слое)

Возвращаясь к анализу балансового соотношения (1.87) для границы, воспользуемся теперь базовыми феноменологическими соотношениями теории массопереноса и представим плотность потока паровой компоненты j_v как сумму *диффузионной* и *конвективной* составляющих:

$$j_v = \underbrace{j_{v, \text{conduct}}}_{- \rho D \text{ grad } c_v} + j c_v, \quad (1.88)$$

где D – коэффициент диффузии парогазовой смеси.

С учетом баланса (1.87), т.е равенства $j_v = j$, получают важное соотношение между кондуктивным (диффузионным) потоком пара и полным потоком массы через границу раздела:

$$\left. \begin{aligned} j_v &= j_{v,\text{conduct}} + jc_v \\ j_v &= j \end{aligned} \right\} \Rightarrow j_{v,\text{conduct}} = j_v \cdot (1 - c_v),$$

или

$$j_v = j_{v,\text{conduct}} \frac{1}{(1 - c_v)}. \quad (1.89)$$

(все величины записаны для межфазной границы $y = 0$).

Видно, что нельзя отождествлять скорость конденсации / испарения $j = j_v$ с диффузионным (кондуктивным) потоком пара $j_{v,\text{conduct}}$. Если концентрация пара c_v у поверхности раздела велика (близка к единице), то различие этих потоков может быть очень большим. С другой стороны, при испарении с поверхности *твердых* тел парциальное давление пара и его концентрация обычно малы ($c_v \ll 1$), и тогда уходящий поток вещества – это просто диффузионный поток.

Для *кондуктивного (диффузионного)* потока в расчетной практике используют представление в форме *уравнения массоотдачи* (по аналогии с уравнением теплоотдачи):

$$j_{v,\text{conduct}} = -\rho D_{\text{eff},\text{vg}} \left. \frac{\partial c_v}{\partial y} \right|_{y=+0} = \rho \beta (c_{v,s} - c_{v,\infty}), \quad (1.90)$$

где β , м/с – *коэффициент массоотдачи* – мера интенсивности массопереноса (аналог коэффициента теплоотдачи α), а разность концентраций – «концентрационный» напор, «движущая сила» массопереноса, аналог температурного напора.

Параметр проницаемости и Ψ -коррекция

Из (1.89), (1.90) следует выражение для *полного потока массы* через границу, т.е. для скорости конденсации / испарения ($j = j_v$, см. (1.87)):

$$j = \rho \beta \left(\frac{c_{v,s} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,s}} \right), \quad (1.91)$$

или, в безразмерном виде:

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \underbrace{\left(\frac{\rho \beta}{\rho u_\infty} \right)}_{St_D} \underbrace{\left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right)}_{b_1}; \quad j = j_v; \quad (1.92)$$

$$b_1 \equiv \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}}; \quad St_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty} \equiv \frac{Nu_D}{Re Pr_D},$$

где b_1 – параметр проницаемости, St_D – число Стантона диффузионное, безразмерный коэффициент массоотдачи, Nu_D – число Нуссельта диффузионное.

Коэффициент массоотдачи β рассчитывается на основе аналогии между процессами теплообмена и массообмена. Иллюстрацией аналогии может служить одинаковость структуры законов переноса массы и энергии:

$$j_{v, \text{conduct}} = -\rho D \frac{\partial c_v}{\partial y} \Leftrightarrow q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Из аналогии математического описания (т.е. законов переноса, дифференциальных уравнений сохранения и граничных условий) следует аналогия решений, т.е. расчетных уравнений для коэффициента теплоотдачи и коэффициента массоотдачи. Например, если необходимо рассчитать коэффициент *массоотдачи* при обтекании шахматного пучка труб, то следует воспользоваться соответствующей «тепловой» формулой (см. рис. 1.27, эмпирическая формула для шахматного пучка), заменив в ней тепловые величины их массообменными аналогами:

$$\text{теплоотдача: } Nu \equiv \frac{\alpha_{vg} d}{\lambda_{vg}} = 0,4 Re_d^{0,6} Pr^{0,36}; \quad Pr = \frac{\nu}{a} \Rightarrow$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad (1.93)$$

$$\text{массоотдача: } Nu_D \equiv \frac{\beta d}{D} = 0,4 Re_d^{0,6} Pr_D^{0,36}; \quad Pr_D = \frac{\nu}{D},$$

где Re_d – число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру, индекс «vg» означает парогазовую смесь.

Эта элементарная методика обеспечивает приемлемую точность, если *поперечный поток массы* на поверхности раздела относительно невелик и еще не вносит заметных искажений в поле

течения (таких, как на рис. 1.41 справа). В общем случае, в формулы вида (1.93) для теплоотдачи и массоотдачи вводят *корректирующий фактор* $\Psi_x(b_1)$:

$\Psi_x(b_1 < 0) > 1$: конденсация, отсос из пограничного слоя;

$\Psi_x(b_1 > 0) < 1$: испарение, вдув в пограничный слой;

$\alpha = \alpha_{j \rightarrow 0} \cdot \Psi_x(b_1)$; $\beta = \beta_{j \rightarrow 0} \cdot \Psi_x(b_1)$.

При вдуве (испарении) происходит увеличение толщины парогазового пограничного слоя и, следовательно, увеличение сопротивления переносу. Напротив, при отсосе (конденсации) пограничный слой в парогазовом потоке становится значительно тоньше (и сопротивление переносу меньше), чем для обтекания непроницаемой поверхности при той же скорости набегающего потока. Кроме того, изменяется структура пограничного слоя. При вдуве формируется отнесенный от стенки S-образный профиль скорости с перегибом. Напротив, при отсосе профиль прижимается к стенке и становится более заполненным. Эти эффекты удовлетворительно описываются аппроксимацией для корректирующего фактора Ψ_x , представленной на рис. 1.42 (подробнее см. гл. 8 «Тепломассообмен в парогазовом потоке при конденсации и испарении»).

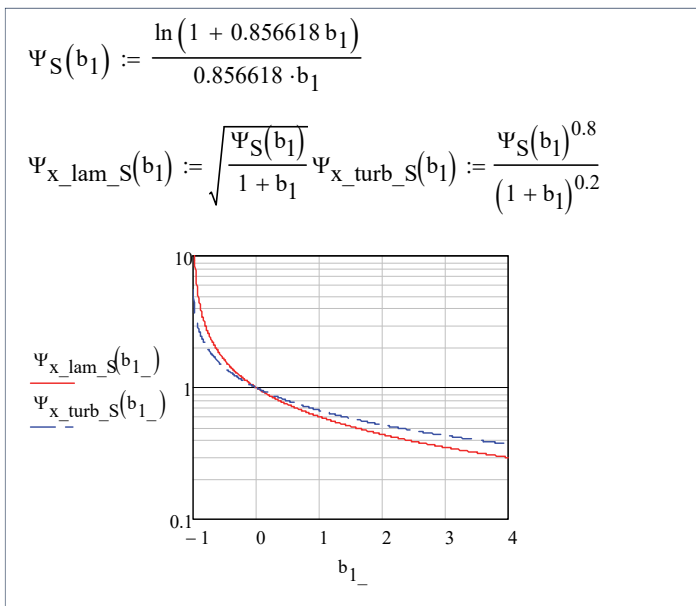


Рис. 1.42. Корректирующий фактор $\Psi_x(b_1)$

Ясно, что одних только формул (1.92), (1.93) недостаточно для расчета скорости испарения или конденсации, поскольку заранее неизвестна концентрация пара $c_{v,0}$ на межфазной границе. Эта величина, как и температура t_s на поверхности раздела фаз (рис. 1.40), определяется посредством специальной численной процедуры при решении *сопряженной задачи* тепло- и массообмена, обсуждаемой далее (подробнее см. гл. 8).

Условия сопряжения на межфазной границе

Вернемся к схеме на рис. 1.40 и запишем совместно *тепловой баланс* на полупроницаемой поверхности раздела и *массовый баланс* (1.86):

$$\begin{aligned} \left[q_{lq} + \underbrace{j_{\text{H}_2\text{O}}}_{\text{liquid}} h_{lq} \right]_{y=0} &= \left[q_v + \left(\underbrace{j_{\text{H}_2\text{O}}}_{\text{vapor}} h_v + \underbrace{j_g}_0 h_g \right) \right]_{y=+0} \\ \left[\underbrace{j_{\text{H}_2\text{O}}}_{\text{liquid}} + \underbrace{j_g}_0 \right]_{y=0} &= \left[\underbrace{j_{\text{H}_2\text{O}}}_{\text{vapor}} + \underbrace{j_g}_0 \right]_{y=+0} \equiv j \quad , \end{aligned} \quad (1.94)$$

где q_{lq} , q_v – тепловые (кондуктивные) потоки в конденсированной и газовой фазах. Конвективные потоки энтальпии выражены через потоки массы и *парциальные энтальпии* компонентов (h_v , h_g). Для идеальной газовой смеси парциальные значения совпадают с энтальпиями чистых компонентов. Замечая, что разность энтальпий пара и жидкости на *межфазной границе* есть теплота парообразования, после очевидных подстановок и перегруппировок получим:

$$q_{lq} = q_v + j \cdot \underbrace{(h_v - h_{lq})}_r \Rightarrow q_{lq} = q_v + j \cdot r, \quad (1.95)$$

или, выражая тепловой поток в парогазовой фазе в форме уравнения Ньютона-Рихмана и массовый поток в форме (1.91):

$$q_{lq} = \alpha_{\text{vg}} (t_{s,0} - t_{\text{vg},\infty}) + \rho\beta \left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) r. \quad (1.96)$$

Состояния на межфазной границе и вдали от нее обозначены соответственно индексами 0 и ∞ .

Уравнение (1.96) интерпретируется как баланс (рис. 1.40):

- теплового потока, подводимого к межфазной границе изнутри жидкой фазы (левая часть),

- теплового потока, отводимого в парогазовую смесь (первый член справа),
- теплоты испарения жидкости, уносимой потоком пара (второе слагаемое справа).

Эта интерпретация соответствует выбранному на рис. 1.40 положительному направлению – из жидкой в парогазовую фазу – и описывает работу испарительной установки.

Для конденсатора характерными будут следующие знаки для потоков:

$$\underbrace{q_{lq}}_{<0} = \underbrace{\alpha_{vg} (t_{s,0} - t_{vg,\infty})}_{<0} + \underbrace{\rho\beta \left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) r}_{<0} \quad (1.97)$$

Теплоотвод в систему охлаждения конденсатора
Теплоотдача от перегретого пара к поверхности жидкости
Теплота фазового превращения (конденсации)

Соотношение (1.96) для тепловых потоков на границе содержит неизвестные величины температуры $t_{s,0}$ и концентрации пара $c_{v,0}$ на межфазной поверхности. Если исключить из рассмотрения сверхинтенсивные процессы испарения / конденсации и ограничиться невысокими давлениями, то можно связать эти величины следующим образом:

- парциальное давление пара у поверхности раздела определить уравнением кривой насыщения $p_s(t_s)$;
- концентрацию пара вычислить по уравнению состояния идеального газа:

$$p_{v,0} = p_s(t_{s,0}); \quad c_{v,0} = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R_g} \left(\frac{p_{mix}}{p_{v,0}} - 1 \right)}, \quad (1.98)$$

где R_v, R_g – газовые постоянные компонентов смеси.

Соотношения (1.96), (1.98) составляют основу инженерной методики расчета тепломассообмена при испарении и конденсации. Параметры парогазового потока вдали от поверхности (его скорость, давление, температуру, а также концентрацию инертного газа рис. 1.40) считают заданными величинами. Проблема состоит в нахождении коэффициентов тепло- и массоотдачи, концентрации и температуры на поверхности раздела фаз, скорости конденсации (или испарения). Проведем далее необходимые вычисления в Mathcad'е.

Mathcad-программа и расчет тепломассообмена на границе раздела

Чтобы упростить вычисления, решим задачу в рамках аналогии, которая выражается наиболее лаконично в случае равенства теплового и диффузионного чисел Прандтля ($Pr = Pr_D$), как это имеет место для многоатомных газов:

$$St = St_D \Rightarrow \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} = \frac{\beta}{u_\infty} \Rightarrow \frac{\rho \beta}{\alpha_{vg} c_p} = \frac{1}{c_p}. \quad (1.99)$$

С учетом соотношения (1.99) между коэффициентами теплоотдачи и массоотдачи, представим тепловой баланс (1.96) на границе раздела в безразмерной форме:

$$\underbrace{\frac{c_{p,vg} \left(\frac{q_{lq}}{\alpha_{vg}} \right)}{r}}_{k_{out}} = \frac{c_{p,vg} (t_s - t_{vg,\infty})}{r} + \underbrace{\left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right)}_{b_1}. \quad (1.100)$$

Левая часть, обозначенная как k_{out} , есть мера теплового потока изнутри жидкости к поверхности раздела; первое слагаемое справа – мера теплового потока от границы в парогазовую смесь, второе слагаемое – мера теплоты фазового превращения, уносимой от поверхности испаряющимся потоком (см. комментарии к (1.96)). Для задачи *адиабатического испарения* $k_{out} = 0$.

Список внешних параметров включает давление, температуру и концентрацию смеси. Ясно, что необходима диагностика состояния паровоздушной смеси, например, чтобы исключить режимы в термодинамической области пересыщенного состояния, с образованием капельной влаги (тумана).

Первый блок Mathcad-программы (рис. 1.43) вычисляет парциальное давление пара при заданной массовой концентрации пара. Второй блок находит массовую концентрацию $c_{v,sat}$, соответствующую насыщению при заданной температуре смеси. Третий блок рассчитывает точку росы («dewpoint», англ.) парогазовой смеси, то есть ту температуру, до которой следовало бы изобарически охлаждать парогазовую смесь при фиксированной массовой концентрации пара, чтобы получить состояние насыщения. Температура t_{dew_max} есть температура насыщения при давлении смеси,

или точка росы при максимально возможной концентрации пара ($c_v = 1$). Функция $pSatPa(T)$ – это кривая насыщения (для воды, в наших расчетных примерах).

$$\begin{array}{l}
 p_v(p_{mix}, c_v) := \frac{p_{mix}}{\left[\frac{1}{R_{vg}} \cdot \left(\frac{1}{c_v} - 1 \right) + 1 \right]} \\
 \\
 c_{v,sat}(t_{mix}, p_{mix}) := \begin{array}{l}
 p_s \leftarrow pSatPa(t_{mix} + 273.15) \\
 \text{if } p_s \geq p_{mix} \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{" limiting value " } \\
 1
 \end{array} \right. \\
 \text{otherwise} \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{" ordinary value 0-1 " } \\
 \frac{1}{1 + R_{vg} \cdot \left(\frac{p_{mix}}{p_s} - 1 \right)}
 \end{array} \right.
 \end{array} \\
 \\
 t_{dew_max}(p_{mix}) := \left| \begin{array}{l}
 t \leftarrow 100 \\
 \text{root}\left[(p_{mix} - pSatPa(t + 273.15)), t \right]
 \end{array} \right. \\
 \\
 t_{dew}(p_{mix}, c_v) := \left| \begin{array}{l}
 t \leftarrow t_{dew_max}(p_{mix}) \\
 \text{root}\left[(p_v(p_{mix}, c_v) - pSatPa(t + 273.15)), t \right]
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 1.43. Mathcad-функции для диагностики состояния парогазовой смеси

В числовом примере (рис. 1.44) рассматривается влажный воздух при атмосферном давлении и при температуре 37°C , с относительной массовой концентрацией водяного пара 50% от состояния насыщения. Как видно из вычислений величины c_{v_inf} , это составляет примерно 19 г влаги на 1 кг паровоздушной смеси. Значение влажности в стандартной форме дается величиной ϕ (как отношение соответствующих парциальных давлений пара).

Точка росы в расчетном примере составляет $24,9^\circ\text{C}$ (при фиксированной концентрации водяного пара $c_{v_inf} = 0,0189$). Можно сказать, что если изобарически охладить эту смесь от исходной температуры 37°C до $24,9^\circ\text{C}$, то она станет насыщенной, с влажностью 100%.

$p_{mix_} := 10^5$	$t_{inf_} := 37$	$c_{vap_rel} := 0.5$
$c_{v_sat} := c_{v.sat}(t_{inf_}, p_{mix_})$		$c_{v_sat} = 3.77 \times 10^{-2}$
$c_{v_inf_} := c_{vap_rel} \cdot c_{v.sat}(t_{inf_}, p_{mix_})$		$c_{v_inf_} = 1.89 \times 10^{-2}$
$p_{mix_} = 1 \times 10^5$	$t_{inf_} = 37$	$c_{v_inf_} = 1.89 \times 10^{-2}$
$\varphi := \frac{P_v(p_{mix_}, c_{v_inf_})}{P_v(p_{mix_}, c_{v_sat})}$		$\varphi = 0.51$
$t_{dew_} := t_{dew}(p_{mix_}, c_{v_inf_})$		$t_{dew_} = 24.9$
$t_{dew_max_} := t_{dew_max}(p_{mix_})$		$t_{dew_max_} = 99.65$

Рис. 1.44. Параметры состояния парогазовой смеси

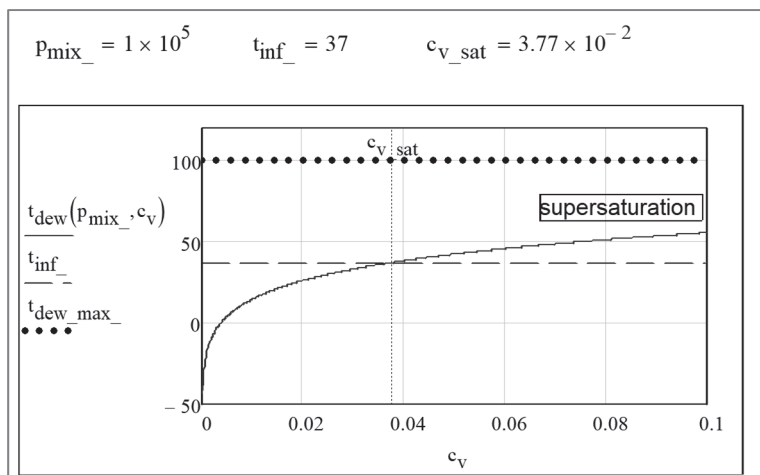


Рис. 1.45. Изменение точки росы в зависимости от концентрации пара в парогазовой смеси при фиксированной температуре смеси t_{inf}

С увеличением концентрации водяного пара при фиксированных температуре и давлении смеси (рис. 1.45) температура точки росы увеличивается. При переходе через граничное значение c_{v_sat} состояние становится пересыщенным, что приводит к образованию капельной влаги (тумана, облаков в атмосфере).

При расчетах тепломассообмена в парогазовой среде необходимо контролировать также состояние смеси на межфазной границе и рассчитывать тепловые и массовые потоки на поверхности раздела. Соответствующие Mathcad-функции показаны на рис. 1.46. Mathcad-функция «k_out(t_{surf}, \dots)» представляет основное уравнение модели (1.100) как зависимость безразмерного теплового потока в конденсированной фазе от температуры межфазной границы (график на рис. 1.47). Обратная функция t_{surf} использует встроенный алгоритм «root» для нахождения температуры на границе раздела. Функция J_evap рассчитывает скорость испарения/конденсации.

$$k_out(t_{surf}, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) := \left| \begin{array}{l} c_{v_surf} \leftarrow c_{v_sat}(t_{surf}, P_{mix}) \\ \frac{c_{v_surf} - c_{v_inf}}{1 - c_{v_surf}} + c_{p_vg} \cdot \frac{(t_{surf} - t_{inf})}{r_0} \end{array} \right.$$

$$t_{surf}(P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}, k_{out}) := \left| \begin{array}{l} t_s \leftarrow \frac{t_{dew}(P_{mix}, c_{v_inf}) + t_{dew_max}(P_{mix})}{2} \\ \text{root}[(k_out(t_s, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) - k_{out}), t_s] \end{array} \right.$$

$$J_evap(t_{surf}, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) := \left| \begin{array}{l} c_{v_surf} \leftarrow c_{v_sat}(t_{surf}, P_{mix}) \\ \frac{c_{v_surf} - c_{v_inf}}{1 - c_{v_surf}} \end{array} \right.$$

Рис. 1.46. Mathcad-функции для вычисления теплового потока, температуры межфазной поверхности и скорости испарения/конденсации (при адиабатическом испарении $k_{out} = 0$)

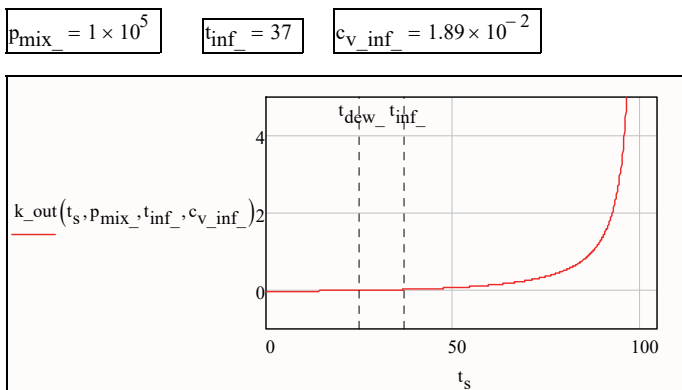


Рис. 1.47. Тепловой поток на поверхности конденсированной фазы как функция температуры поверхности, $k_{out}(t_s)$

Характерным граничным режимом в сопряженных задачах теплообмена является *адиабатическое испарение*, когда тепловой поток в жидкой фазе q_{lq} оказывается равным нулю (рис. 1.40 и уравнение (1.96)). Актуальная область адиабатического испарения, $k_{out}(t_s) \rightarrow 0$, специально показана на рис. 1.48 в увеличенном масштабе.

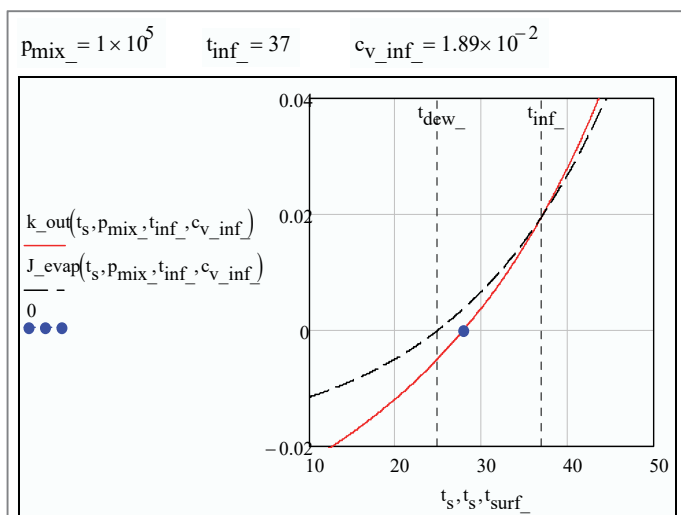


Рис. 1.48. Адиабатическое испарение, $k_{out}(t_s) \rightarrow 0$ (температура парогазовой смеси («температура сухого термометра») $t_{inf} = 37^\circ\text{C}$, «температура мокрого термометра» $t_{surf} = 27,9^\circ\text{C}$ (отмечена жирной точкой), температура точки росы $t_{dew} = 24,9^\circ\text{C}$)

Диаграмма $k_{out}(t_s)$ на рис. 1.48 дополнена кривой скорости испарения/конденсации, построенной по формуле для J_{evap} (см.фрагмент Mathcad-программы на рис. 1.46, а также соотношения (1.100) и комментариев к ним в тексте). Видно, что в режиме *адиабатического испарения* – при нулевом тепловом потоке k_{out} в конденсированной фазе – скорость фазового превращения J_{evap} есть ненулевая положительная величина. Это означает, что теплота, подводимая со стороны горячего газа ($t_{inf} > t_{surf}$), полностью расходуется на испарение жидкости. Характерное значение температуры межфазной границы в этом режиме часто называют «температурой мокрого термометра» (см. ниже описание психрометра).

Когда температура поверхности становится равной точке росы t_{dew} , скорость испарения/конденсации обращается в ноль, в то время как тепловой поток k_{out} будет ненулевой отрицательной величиной. Это граничная ситуация *однофазного* – без фазовых превращений – теплообмена.

Существует еще один специальный режим, когда температура поверхности сравнивается с температурой паровоздушной среды t_{inf} (на уровне 37°C в числовом примере). Теплота, подводимая к поверхности раздела изнутри конденсированной фазы, в точности равна теплоте испарения. Это пример *испарительного охлаждения*. Так функционирует встроенная система транспирационного охлаждения человека как биологического объекта.

Испарительное охлаждение будет работать, даже если температура окружающей среды превысит температуру тела. Благодаря испарительному охлаждению биологические объекты могут выживать в условиях экстремально высоких температур, если только влажность воздуха далека от условий насыщения. Влияние параметра c_{vap_rel} (рис. 1.44) читателю предлагается исследовать самостоятельно, используя приведенные Mathcad-программы. Представленная диаграммой на рис. 1.48 сложная диспозиция обусловлена совместным действием двух термодинамических сил: разности температур и разности концентраций.

Упомянутая выше задача об *адиабатическом испарении* реализуется, в частности, в известном простом приборе для измерения влажности воздуха – психрометре. Принцип действия основан на сопоставлении температур «сухого» и «мокрого» термометров, причем мокрый термометр просто обмотан бинтом, опущенным в воду.

В нашей расчетной модели температура сухого термометра – это $t_{v,g,\infty}$ на рис. 1.40 (или t_{inf} в тексте программы), а температура мокрого термометра – это температура поверхности раздела фаз t_s на рис. 1.40 (или t_{surf} в тексте программ).

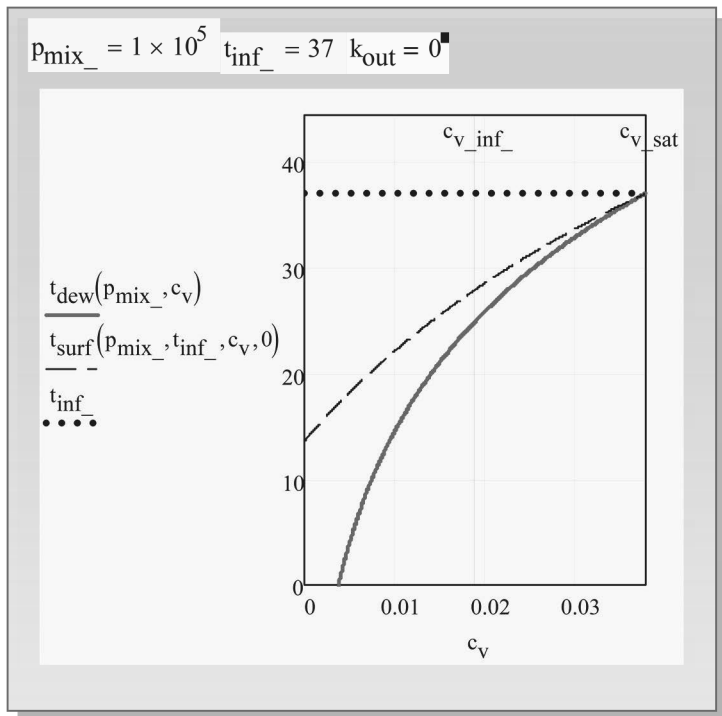


Рис. 1.49. Тарировка психрометра
(t_{surf} – температура мокрого термометра)

График на рис. 1.49 показывает, как изменяется разность температур сухого и мокрого термометра в зависимости от концентрации водяных паров в воздухе. Эта разность становится нулевой, если достигается насыщенное состояние с концентрацией c_{v_sat} . Другими словами, при одинаковых показаниях сухого и мокрого термометров влажность воздуха составляет 100%. Полезно с помощью диаграмм на рис. 1.48, 1.49 сопоставить температуры точки росы и мокрого термометра. Указанные понятия иногда смешивают, но эти величины различны по смыслу, и при дру-

гих режимах, чем в наших демонстрациях, могут сильно различаться также по численным значениям.

Влияние поперечного потока массы на интенсивность теплообмена иллюстрируется на рис. 1.50. По горизонтальной оси отложены значения температуры межфазной поверхности, по вертикальной – значения безразмерной скорости испарения/конденсации, скорректированные ($J \cdot \Psi$) с учетом поперечного потока массы (рис. 1.42) и без коррекции (J). Напомним, что переключение испарения ($J > 0$) на конденсацию ($J < 0$) происходит при температурах поверхности, соответствующих точке росы (рис. 1.48).

При приближении температуры поверхности t_s к значению t_{dew_max} наблюдается неограниченный рост скорости испарения ($J > 0$), несмотря на демпфирующее действие Ψ -коррекции. Хотя физический предел скорости испарения существует – разумным ограничением является скорость звука – однако он не связан, по-видимому, с собственно процессом массообмена.

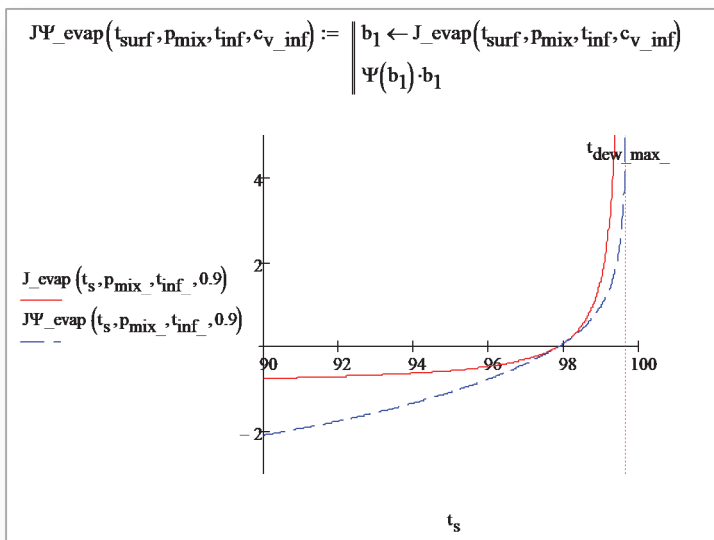


Рис. 1.50. Испарение/конденсация с учетом Ψ -коррекции на поперечный поток массы ($t_{inf} = 600^\circ\text{C}$; $p_{mix} = 10^5 \text{Па}$; $c_v = 0,9$; $t_{dew_max} = 99,65^\circ\text{C}$)

При конденсации ($J < 0$) Ψ -коррекция увеличивает интенсивность переноса. Предельный переход к конденсации *чистого* (без примесей инертного газа) пара осуществляется через стадию «сильной» конденсации:

$$b_1 = \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1;$$

$$\boxed{1 \gg c_{g,0} \gg c_{g,\infty}} \Rightarrow b_1 + 1 \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \ll 1 \Rightarrow b_1 \approx -1;$$

$$\Psi_x = \frac{\sqrt{\Psi_S(b_1)}}{\sqrt{1 + b_1}} \approx \frac{\sqrt{2,267}}{\sqrt{\frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}}}} \Rightarrow \infty;$$

$$j = \rho\beta b_1 \Psi_x \approx -\rho\beta \sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_{g,\infty}}} \rightarrow -\infty.$$

Соотношение концентраций инертного газа в объеме и на поверхности раздела определяется сильными неравенствами, отмеченными рамкой. Предельное соотношение $j \rightarrow -\infty$ означает, что диффузионные процессы перестают ограничивать скорость конденсации, если содержание инертных примесей $c_{g,\infty}$ стремится к нулю; разумный физический предел определяется скоростью звука в паровой фазе.

Контрольные вопросы и задания

1. Запишите уравнения, составляющие математическое описание процесса конвективного теплообмена: дифференциальные уравнения энергии, движения, неразрывности.

2. Что такое условия однозначности?

3. Выведите уравнение конвективной теплоотдачи. Локальный и средний коэффициент теплоотдачи.

4. Что такое безразмерный коэффициент теплоотдачи, число Нуссельта (Nu)?

5. Дайте понятие пограничного слоя. Что такое гидродинамический и тепловой пограничный слой?

6. Какой физический смысл имеет число Рейнольдса (Re)?
7. Приведите классификацию теплоносителей по числу Прандтля (Pr).
8. Кратко опишите теплообмен при ламинарном и турбулентном пограничном слое на пластине.
9. Представьте алгоритм расчета числа Nu при обтекании пластины.
10. Представьте алгоритм расчета коэффициента трения (C_f) при обтекании пластины.
11. Поясните основную идею аналогии Рейнольдса. Что такое число Стантона (St)?
12. Кратко опишите теплообмен при ламинарном и турбулентном обтекании трубы, пучка труб.
13. Представьте алгоритм расчета числа Nu при обтекании одиночной трубы, пучка труб.
14. Представьте алгоритм расчета сопротивления при обтекании пучка труб.
15. Дайте понятие диффузионного пограничного слоя.
16. Проведите качественный анализ характеристик диффузионного пограничного слоя.
17. Как выглядит уравнение массоотдачи?
18. Опишите диффузионные аналоги чисел Прандтля (Pr), Пекле (Pe) и Нуссельта (Nu).
19. Опишите теплообмен при ламинарной и турбулентной свободной конвекции около вертикальной пластины (трубы).
20. Представьте алгоритм расчета числа Nu при свободной конвекции.
21. Кратко опишите теплообмен при течении в трубе.
22. Представьте алгоритм расчета сопротивления при течении в трубе.
23. Представьте алгоритм расчета числа Nu в ламинарном, переходном и турбулентном режиме течения в трубе.

Глава 2. ТЕПЛООБМЕН И ТРЕНИЕ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В природе и в технике большинство течений жидкостей и газов происходит при больших числах Рейнольдса, когда процессы переноса – т.е. трение и тепломассообмен – оказываются локализованными вблизи обтекаемых поверхностей, в так называемых *пограничных слоях* – гидродинамическом, тепловом, диффузионном.

Пограничный слой в гидродинамике определяется как тонкий *пристенный* слой движущейся жидкости, в котором скорость потока быстро уменьшается до нулевого значения на стенке, чтобы выполнилось *условие прилипания*. В пограничном слое силы вязкого трения велики, а за его пределами – пренебрежимо малы, так что поток во внешней области можно рассматривать как течение *идеальной* (невязкой) жидкости. Аналогично формируются тепловой и диффузионный пограничные слои, в которых «срабатываются» все располагаемые перепады температуры и концентрации в потоке теплоносителя.

Теория гидродинамического пограничного слоя – это асимптотическая теория, справедливая при больших числах Рейнольдса Re_L , когда *в целом* для потока *инерционные* силы существенно превосходят *вязкие* силы. Поэтому для наглядности часто говорят о течениях *маловязких* жидкостей. Водные и воздушные потоки в природе и технике часто являются такого рода течениями. В рамках данной главы рассмотрены *ламинарные* пограничные слои, так что актуальные значения Re_L заключены в интервале:

$$1 \ll Re_L < \sim 10^5; \quad Re_L \equiv \frac{u_\infty L}{\nu},$$

где L – протяженность обтекаемой поверхности, характерный размер объекта (рис. 2.1). При еще больших значениях числа Рейнольдса наблюдается переход к турбулентному режиму течения (турбулентные пограничные слои анализируются в последующих главах в рамках *интегрального метода* решения задач пограничного слоя).

Основным математическим инструментом исследования гидродинамического пограничного слоя является *дифференциальное уравнение Фолкнера – Скэн* (обоснование см. ниже в этой главе) с соответствующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} f''' + f f'' + \beta(1 - f'^2) &= 0 \\ f(0) &= f_w; \quad f'(0) = 0; \\ f'(\infty) &\rightarrow 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Зависимая переменная f есть безразмерная функция тока, независимая переменная η – безразмерное расстояние от стенки. Продольная составляющая скорости и касательное напряжение трения определяются как первая и вторая производные от f .

Уравнение Фолкнера – Скэн описывает класс так называемых автомоделных (подобных) ламинарных течений в пограничном слое на *проницаемой* поверхности (рис. 2.1) и при изменяющейся скорости (изменяющемся давлении) во внешнем потоке.

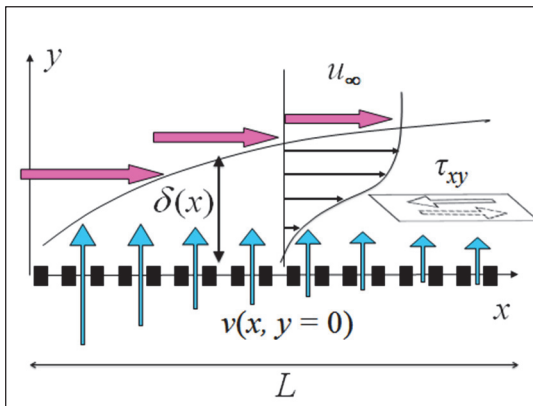


Рис. 2.1. Схема обтекания проницаемой поверхности вынужденным потоком жидкости

Числовой параметр f_w в граничном условии на стенке задает величину поперечного потока массы на поверхности. Положительные значения определяют течения с отсосом, отрицательные – со вдувом (как на рис. 2.1) через проницаемую поверхность. Нулевое значение соответствует течению на непроницаемой поверхности. Числовой параметр f_w (положительный или отрицательный) в уравнении Фолкнера – Скэн задает степень ускорения или

замедления внешнего потока. Нулевое значение определяет течение с нулевым продольным градиентом давления (т.е. течение с постоянной скоростью внешнего потока u_∞ , как при продольном обтекании пластины).

Уравнение Фолкнера – Скэн (2.1), совместно с аналогичным по структуре уравнением для теплового пограничного слоя:

$$\begin{aligned} g''(\eta) + \text{Pr} \cdot f(\eta) \cdot g'(\eta) &= 0; & \text{Pr} &\equiv \nu / a; \\ g(0) = 0 & & g(\infty) &= 1; \end{aligned} \quad (2.2)$$

(см. далее п. 2.4, соотношения (2.42), (2.43)), образует математический фундамент решения погранслоевых задач конвективного теплообмена. Важными приложениями являются задачи, связанные с

- обтеканием криволинейных профилей, таких как лопатки газовых турбин или крылья самолетов,
- обтеканием проницаемых (перфорированных) стенок со специально организованным вдуванием или отсасыванием;
- конденсацией или испарением на межфазных границах;
- интенсивными каталитическими реакциями на стенке.

Простейшие оценочные модели трения и теплообмена представлены в предыдущей главе (рис. 1.1, 1.6). В настоящей главе рассмотрены точные решения уравнений пограничного слоя, составляющие теоретическую основу теплообмена как научной и инженерной дисциплины.

2.1. Система дифференциальных уравнений пограничного слоя

Оба упомянутых *обыкновенных* дифференциальных уравнения (2.1) и (2.2) получены из более общих уравнений переноса импульса и энергии в *частных производных* (Том 1 \ гл.2 «Законы сохранения. Дифференциальные уравнения теплообмена») на основе следующих двух фундаментальных идей:

- о пограничном слое;
- о преобразованиях подобия.

В Том 1 \ п.п. 2.6 и 2.7 система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена записана в компактной, ясно отражающей физический смысл векторной форме. Как осуществляется переход к координатной записи, которая используется далее

при анализе пограничного слоя, показано в Томе 1\ п. 2.8 «Математическая структура уравнений конвективного теплообмена».

Гидродинамический пограничный слой. При обтекании тел *маловязкой* жидкостью изменения скорости должны быть сосредоточены в пределах тонкого *пограничного слоя* жидкости у стенки (рис. 2.1), чтобы силы вязкости

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

могли обеспечить торможение (потерю импульса) внешнего потока от величины u_∞ до нуля непосредственно на обтекаемой поверхности («условие прилипания»). Это утверждение основано на физическом смысле уравнения движения как уравнения сохранения импульса. Более конкретно его содержание раскрывают далее оценки порядка в уравнениях неразрывности (2.3):

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\frac{u}{x}} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{v}{\delta}} = 0; \Rightarrow v \approx \frac{\delta}{x} u_\infty \quad (2.3)$$

и движения (2.4):

$$\left. \begin{aligned} p_\infty + \rho \frac{u_\infty^2}{2} = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} &\cong \frac{dp_\infty}{dx} = -\underbrace{\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx}}_{\frac{\rho u_\infty^2}{x}} \\ \hline \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\frac{\mu u_\infty}{x^2}} + \underbrace{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\frac{\mu u_\infty}{\delta^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} \approx \frac{u_\infty^2}{x} + \frac{\mu u_\infty}{\rho \delta^2} \Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} \approx \frac{\mu u_\infty}{\rho \delta^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\frac{u_\infty x}{\nu}}} \quad \text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu} \gg 1; \Rightarrow \frac{\delta}{x} \ll 1;$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Уравнения записаны для двумерной стационарной задачи в предположении о постоянстве свойств жидкости.

Первое из соотношений (2.4) есть уравнение Бернулли для внешнего *идеального (невязкого) потока* жидкости. Оно дает оценку порядка для сил давления в потоке. В следующем записанном уравнении – уравнении движения для *пристенного слоя* – силы вязкости уже существенны. Знак вычеркивания отмечает пренебрежимо малую величину, с учетом $\delta \ll x$. Далее в (2.4) из сопоставления величин одного порядка выводится строгая формулировка асимптотического предела «*маловязкой жидкости*»: это течение в асимптотическом случае *больших* чисел Рейнольдса. Если $Re_x \equiv u_\infty x / \nu \gg 1$, то реализуется условие «тонкости» пристенного пограничного слоя $\delta \ll x$, в пределах которого влияние вязкости остается существенным.

Результат асимптотического перехода (т.е. уравнение гидродинамического пограничного слоя) записан в последней строке (2.4). Получается радикальное упрощение: при записи вязких напряжений исчезает вторая производная по продольной координате x . Кроме того, давление становится *заданным* управляющим параметром: оно определяется течением во внешнем, невязком потоке.

Полагая вязкость малой, $\mu \rightarrow 0$, мы *не считаем ее нулевой* и сохраняем вязкие силы в уравнении пограничного слоя, чтобы реализовать условие прилипания на стенке. Толщина пограничного слоя *должна быть* малой, $\delta \rightarrow 0$, $\delta \ll x$, чтобы обеспечить необходимую величину силы трения (порядка $\mu \cdot (u_\infty / \delta)$) даже для маловязкой жидкости. Неприемлемой альтернативой было бы вообще пренебречь силами вязкости, поскольку в уравнении движения исчезнет вторая производная по координате, математический порядок дифференциального уравнения понизится (уравнение вырождается), и вследствие этого, граничное условие прилипания окажется невыполненным. Итак, в (2.3), (2.4) осуществляется асимптотический переход $Re_L \gg 1$ к более простым *уравнениям гидродинамического пограничного слоя*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2.5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty(x) \frac{du_\infty(x)}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.6)$$

В пределах пограничного слоя ($0 < y < \delta$, $\delta/x \ll 1$, рис. 2.1), продольная скорость $u(x, y)$ быстро меняется от нуля на стенке до скорости внешнего невязкого потока $u_\infty(x)$; поперечная составляющая скорости « v » оказывается существенно меньше продольной составляющей « u ». Изменение давления вдоль потока выражено (посредством уравнения Бернулли) через изменение скорости внешнего потока $u_\infty(x)$; это распределение должно быть задано в условиях однозначности задачи.

Тепловой пограничный слой. Аналогичные выкладки можно провести для исходной формулировки уравнения энергии (Том 1 \ гл. 2) и получить в результате следующее дифференциальное уравнение теплового пограничного слоя:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \quad \delta_T \ll x \Rightarrow \\
 \underbrace{u \frac{\Delta t}{x}}_{\left(\frac{u_\infty \delta}{x}\right) \left(\frac{\Delta t}{\delta_T}\right)} &+ \underbrace{v \frac{\Delta t}{\delta}}_{\left(\frac{u_\infty \delta}{x}\right) \left(\frac{\Delta t}{\delta_T}\right)} = \underbrace{a \frac{\Delta t}{x^2}}_{\left(\frac{u_\infty \delta}{x}\right) \left(\frac{\Delta t}{\delta_T}\right)} + \underbrace{a \frac{\Delta t}{\delta_T^2}}_{\left(\frac{u_\infty \delta}{x}\right) \left(\frac{\Delta t}{\delta_T}\right)}; \\
 \Rightarrow u_\infty \frac{\Delta t}{x} \approx a \frac{\Delta t}{\delta_T^2} &\Rightarrow \boxed{\frac{\delta_T}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u_\infty x}{a}\right)}}}; \quad (2.7) \\
 \left(\text{Pe}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu} \equiv \text{Re}_x \cdot \text{Pr} \gg 1; \quad \frac{\delta_T}{x} \ll 1; \right) & \\
 \boxed{u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}}, &
 \end{aligned}$$

где a – коэффициент температуропроводности, $\delta_T \ll x$ – толщина теплового пограничного слоя, Δt – температурный напор.

Знак вычеркивания в (2.7) отмечает величину более высокого порядка малости, с учетом $\delta_T \ll x$. Напомним, что физическое содержание правой части уравнения энергии ((2.7), верхняя строка) составляет перенос теплоты посредством теплопроводности. Следовательно, эффект *продольной* теплопроводности (вдоль x , вдоль потока) в пограничном слое оказывается пренебрежимо малым.

Замечание об аналогии трения и теплообмена. Уравнения гидродинамического и теплового пограничных слоев (2.6), (2.7) весьма схожи по структуре, а при постоянной скорости внешнего потока ($u_\infty = \text{const}$) и при $\text{Pr}=1$ (т.е. при $\nu=a$) просто одинаковы с точностью до обозначений искомых величин:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Leftrightarrow u \frac{\partial t}{\partial x} + \nu \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2};$$

$$t(x, y) \equiv u(x, y).$$

Очевидно, если u есть решение гидродинамического уравнения, то $t \equiv u$ будет решением теплового уравнения. Нетрудно показать, что следствием будет равенство коэффициента сопротивления и числа Стантона:

$$\frac{c_f}{2} \xleftrightarrow[\text{Pr}=1; u_\infty = \text{const}]{} \text{St}.$$

Эта *аналогия* нарушается, если течение происходит под действием градиента давления, когда $u_\infty = \text{var}$.

Дифференциальные уравнения (2.5)–(2.7) гидродинамического и теплового пограничного слоя дают асимптотическое описание трения и теплообмена в ламинарных потоках в предельном случае больших чисел Рейнольдса и Пекле. Получившиеся упрощения позволяют осуществить *преобразование подобия*.

Преобразование подобия. Вторая идея (см. начало данного пункта) позволяет перейти от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям благодаря преобразованию подобия – такой замене переменных, что две *независимые* переменные (x, y) комбинируются в единственную независимую переменную следующим образом:

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)};$$

$$\left(\frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}; \text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu} \gg 1; \frac{\delta}{x} \ll 1 \right),$$

т.е. поперечная координата y измеряется в *естественном* масштабе $\delta(x)$ – масштабе локальной толщины пограничного слоя (рис. 2.1). Полагают, что зависимые переменные задачи могут

быть представлены функцией единственной независимой переменной η . (Эта идея станет более наглядной, если в мысленном эксперименте фиксировать точку измерения скорости не в миллиметрах от стенки, а в долях толщины погранслоя. Можно ожидать, что, например, в середине погранслоя скорость составит примерно половину от скорости внешнего потока – независимо от того, где *по длине* пластины находится датчик скорости).

Преобразованию подобия предшествует еще одна эффективная замена переменных, позволяющая автоматически удовлетворить уравнению неразрывности (2.5):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где ψ – новая *зависимая* переменная – *функция тока*, такая что

$$d\psi = u \, dy \quad \text{при } x = \text{const}, \quad \psi = \int_0^y u \, dy.$$

Последнее соотношение означает, что функция тока определяет объемный расход жидкости в пристенном слое ($0 \div y$). Масштабом для « ψ » служит величина $(u_\infty \delta)$, примерно равная расходу в пределах пограничного слоя, толщина которого δ оценивается соотношением порядка (см. (2.4)):

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}.$$

Итак, идея состоит в том, чтобы перейти от исходных переменных $(u(x,y), v(x,y))$ к автомодельным переменным $(\psi/(u_\infty \delta), \eta)$.

$$\left(\frac{\psi}{u_\infty \delta} \right) \equiv f(\eta).$$

Это означает, что сложная задача с уравнениями в *частных* производных ((2.5), (2.6)) будет редуцирована к *обыкновенному* дифференциальному уравнению, представленному выше во введении (см. (2.1)). Осуществимость такого радикального упрощения зависит не только от структуры исходных дифференциальных уравнений, но и от способа задания граничных условий.

В инженерной практике встречаются задачи со сложными граничными условиями – с переменной скоростью внешнего потока (движение в сопловых аппаратах, обтекание лопаток турбин

и т.п.), с проницаемой поверхностью стенки (массообмен на стенке, фазовые превращения, вдув или отсос). В некоторых случаях, например:

- при степенном законе изменения скорости внешнего потока u_∞ ;
- при изменении скорости вдува/отсоса как $(1/\sqrt{x})$;
- при степенном законе изменения избыточной температуры стенки в задачах теплообмена) –

удается получить автомодельные (подобные) решения. Обобщенные переменные называются в этом случае переменными Фолкнера – Скэн, а математическая формулировка гидродинамической задачи записывается в виде уравнений (2.1), (2.2).

Мы не приводим подробностей этих формальных преобразований переменных. Для ознакомления с соответствующей техникой рекомендуется обратиться к похожей, но более простой «Задаче о прогреве полуограниченного массива» (Том 1\гл. 5, п. 5.4). Здесь же ограничимся краткой сводкой соотношений для автомодельных течений, описываемых дифференциальным уравнением Фолкнера – Скэн.

Рассматривается класс течений со степенным изменением скорости внешнего потока вдоль обтекаемой поверхности:

$$u_\infty = c \cdot x^m, \quad (2.8)$$

где, с учетом уравнения Бернулли (см. (2.4)), показатель степени m

$$m \equiv -\frac{dp}{dx} \frac{x}{\rho u_\infty^2} \quad (2.9)$$

есть модификация числа Эйлера (т.е. соотношения сил давления и инерции в потоке).

Параметр β в уравнении Фолкнера – Скэн связан с числом Эйлера m соотношением:

$$\beta = \frac{2m}{m+1}. \quad (2.10)$$

Автомодельная переменная η и безразмерная функция тока, $f = \psi/(u_\infty \delta)$, определяются как

$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{\nu \beta} \cdot \frac{du_\infty}{dx}}; \quad f = \frac{\psi}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{\nu \beta} \cdot \frac{du_\infty}{dx}}; \quad (u_\infty = c \cdot x^m). \quad (2.11)$$

Другая, эквивалентная этой, но более наглядная форма записи,

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}}; \quad f = \frac{\Psi}{u_\infty} \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}}; \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad (2.12)$$

явно содержит оценочное соотношение для толщины пограничного слоя:

$$\delta \approx \sqrt{\nu \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{u_\infty} \right)}_{Time}}, \quad (2.13)$$

где *Time* – характерное время продвижения жидкости вдоль обтекаемой поверхности на расстояние x .

В двух важных частных случаях автомодельные переменные определяются следующим образом:

- для безградиентного течения ($u_\infty = \text{const}$, $p = \text{const}$, $m = 0$, $\beta = 0$), т.е. для продольного обтекания пластины –

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{2 \frac{\nu x}{u_\infty}}}; \quad f = \frac{\Psi}{u_\infty \sqrt{2 \frac{\nu x}{u_\infty}}}. \quad (2.14)$$

- для линейного изменения скорости вдоль обтекаемой поверхности ($u_\infty = cx$, $m = 1$, $\beta = 1$) –

$$m=1; \quad \beta=1; \quad u_\infty(x) = c \cdot x; \quad \frac{du_\infty}{dx} = c; \quad (2.15)$$

$$\eta = y \sqrt{\frac{1}{\nu} \cdot c}; \quad \left(\delta \approx \sqrt{\frac{\nu}{c}} \right); \quad f = \frac{\Psi}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{\nu} \cdot c}.$$

Течение (2.15) имеет место в *окрестности* критической точки при поперечном обтекании цилиндра; его особым свойством является постоянство толщины пограничного слоя вдоль обтекаемой поверхности (так как автомодельная переменная η не зависит от x).

Ниже будут подробно рассмотрены процедуры решения уравнения Фолкнера – Скэн. При заданных значениях безразмерных параметров β и f_w будут получены распределения функции тока $f(\eta)$ и ее производных по обобщенной координате η . Физиче-

ские поля скорости и напряжения трения, другие важные параметры течения можно рассчитать по приведенным далее соотношениям.

Координаты:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}}; \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}. \quad (2.16)$$

Продольная и поперечная составляющие скорости:

$$u(x, y) = u_\infty(x) \cdot f'(\eta)$$

$$v(x, y) = -\sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu \cdot u_\infty(x)}{x}} \cdot \left(f(\eta) + \frac{m-1}{m+1} \cdot \eta f'(\eta) \right). \quad (2.17)$$

Поперечная скорость непосредственно на поверхности (скорость вдува), связь с параметром вдува f_w :

$$v(x, y=0) = -\sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu \cdot u_\infty(x)}{x}} \cdot f(0); \quad f(0) \equiv f_w. \quad (2.18)$$

Коэффициент сопротивления (вычисляется при подстановке выражения (2.17) для продольной составляющей скорости):

$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mu}{\rho u_\infty^2} u_\infty f_w'' \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}}; \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{c_f}{2} = f_w'' \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu}{u_\infty x}}.}$$

Толщина вытеснения, толщина потери импульса и формпараметр пограничного слоя:

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}};$$

$$\Delta_* \equiv \delta_* \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}} = \int_0^\infty (1 - f'(\eta)) \cdot d\eta;$$

$$\Delta_{**} \equiv \delta_{**} \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}} = \int_0^\infty f'(\eta) \cdot (1 - f'(\eta)) \cdot d\eta;$$

$$H = \frac{\Delta_*}{\Delta_{**}}.$$

Эти *интегральные* характеристики пограничного слоя подробно обсуждаются в гл. 3.

Число Рейнольдса, построенное по толщине потери импульса:

$$\text{Re}_{**} = \frac{u_{\infty}(x) \cdot \delta_{**}}{\nu} \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_{\infty}}{\nu x}} = \frac{\Delta_{**}}{\sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu}{u_{\infty} x}}}; \quad (2.21)$$

$$\frac{c_f}{2} \cdot \text{Re}_{**} = f_w'' \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu}{u_{\infty} x}} \cdot \frac{\Delta_{**}}{\sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu}{u_{\infty} x}}} = f_w'' \Delta_{**}.$$

Ψ – корректор, учитывающий влияние деформации поля течения – под действием ускорения потока и проницаемости стенки – на интенсивность трения:

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = \frac{\frac{c_f}{2} \cdot \text{Re}_{**}}{\left(\frac{c_f}{2} \cdot \text{Re}_{**} \right)_0} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}}; \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{c_f}{2} \cdot \text{Re}_{**} \right)_0 = 0,2205.$$

Индекс «0» в этих соотношениях указывает на *стандартную* ситуацию, в качестве которой принимают простое *безградиентное* течение вдоль *непроницаемой* поверхности. Мерой отклонения от стандартных условий являются

- безразмерный градиент скорости внешнего потока:

$$f_{\Lambda} \equiv \frac{\delta_{**}^2}{\nu} \frac{du_{\infty}}{dx} = \beta \tilde{\delta}_{**}^2; \quad (2.23)$$

$$F = f_{\Lambda} H / \left(\frac{c_f}{2} \text{Re}_{**} \right)_0 = \frac{f_{\Lambda} H}{0,2205};$$

- и параметр проницаемости b :

$$\text{Re}_V \equiv \frac{\nu(x, y=0) \cdot \delta_{**}}{\nu} = -f_w \cdot \tilde{\delta}_{**}; \quad (2.24)$$

$$b = \text{Re}_V / \left(\frac{c_f}{2} \cdot \text{Re}_{**} \right)_0.$$

Корреляции вида

$$\Psi(b, F); \quad H(b, F) \quad (2.25)$$

могут быть построены на основе численного анализа уравнения Фолкнера – Скэн (для ламинарных течений) и применены для расчета самых сложных и практически важных задач теплообмена, как это показано в данной и последующих главах. С несколько меньшей надежностью аналогичные аппроксимации строятся также для турбулентных пограничных слоев.

Примечание. Обозначение « Ψ » используется в тексте для двух величин: функции тока (начертание «строчный курсив», например, в (2.14)), либо для корректирующего фактора (прямой шрифт, как в (2.22)). Из контекста нетрудно понять конкретный смысл Ψ . Эти обозначения установились в специальной литературе, и их смена привела бы к большей путанице.

2.2. Интегрирование системы уравнений пограничных слоев в условиях вынужденной конвекции

Итак, благодаря асимптотике пограничного слоя и преобразованию подобия сложную исходную формулировку с дифференциальными уравнениями в частных производных удалось свести к задаче с обыкновенным дифференциальным уравнением (2.1), (2.2)

Однако, даже будучи результатом существенных упрощений, уравнение Фолкнера–Скэн остается сложным математическим объектом, вследствие нелинейности и задания граничных условий на *обоих концах отрезка* интегрирования («двухточечная» задача).

Как обычно, для учебного проекта имеется две целевых установки – решение предметной задачи и овладение техникой дела.

Мы решаем одну из важных задач технической физики, и в этом аспекте главным будет понимание того, как формируется поток вязкой жидкости и поле температур вблизи обтекаемой поверхности и как можно повлиять на структуру течения посредством внешних воздействий, таких как вдув или отсос, ускорение или торможение потока жидкости. Мы постараемся достичь этой цели, экспериментируя с прилагаемыми компьютерными моделями, варьируя в расчетах управляющие параметры и делая наглядными, видимыми результаты – с помощью графиков распределений, картин векторных полей и линий тока.

С точки зрения овладения техникой работы, главной темой будет численное решение *краевой двухточечной задачи* для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В инженерном математическом пакете Mathcad используется встроенная функция `sbval`, решающая *краевую* проблему посредством многократного численного интегрирования *начальной* задачи с *пробными* начальными условиями. Инфраструктура проекта включает интегрирование посредством встроенных функций `rkfixed` и `odesolve`, решение нелинейных алгебраических уравнений, операции сплайновой и полиномиальной интерполяции и аппроксимации, матричные операции и т.д. Основные результаты, а именно практические расчетные рекомендации для трения и теплоотдачи при продольном обтекании плоской пластины, получены далее этим методом в пакете Mathcad (п.п. 2.2–2.5).

Однако метод `sbval` оказывается неэффективным в случае сильной зависимости решения от начальных условий (условий на стенке), что имеет место при интенсивном вдуве и /или сильном торможении потока. Такие сложные задачи решаются численными *сеточными* методами. Несколько примеров в профессиональном математическом пакете Matlab приведены в п. 2.6.

Преобразование к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Поскольку основной интерес представляют профиль скорости и трение, т.е. первая и вторая производные от решения f , целесообразно представить дифференциальное уравнение третьего порядка (2.1) в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. Такое представление полезно также при обращении к стандартным процедурам численного интегрирования в инженерных математических пакетах.

Искомую функцию, ее первую и вторую производную будем рассматривать как компоненты вектор-функции (F_0, F_1, F_2) . Прделаав следующие очевидные по смыслу замены

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f = \frac{\partial}{\partial \eta} F_0 = F_1; \quad \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} f = \frac{\partial}{\partial \eta} F_1 = F_2; \\ \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} f = \frac{\partial}{\partial \eta} F_2; \quad f = F_0$$

получим систему уравнений в векторной записи:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} F = D(\eta, F), \quad (2.26)$$

где зависимая переменная и правая часть определены как вектор-функции:

$$F = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}; \quad D(\eta, F) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ -F_0 F_2 - \beta(1 - F_1^2) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Поскольку полученная система дифференциальных уравнений нелинейна (содержит квадратичные члены $F_0 * F_2$ и F_1^2), потребуется численная процедура интегрирования.

Краевые условия в (2.1) следует переписать в новых обозначениях следующим образом:

$$\begin{aligned} F_0(0) = f_w; \quad F_1(0) = 0; \\ F_1(\infty) = 1. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Первое из этих условий указывает значение безразмерной функции тока на стенке (при $\eta = 0$). Это варьируемый параметр, посредством которого задается интенсивность вдува или отсоса.

Второе условие задает нулевое значение продольной составляющей скорости на стенке (при $\eta = 0$), что соответствует фундаментальному условию прилипания.

Третье условие определяет продольную скорость на бесконечности как скорость набегающего потока. При численном интегрировании это условие ставится на некотором достаточно большом, но *конечном* значении координаты η , $\eta = \eta_{\text{inf}}$ таком, что при дальнейшем его увеличении никаких заметных изменений профиля скорости не наблюдается. Этого можно достичь при нескольких пробных численных экспериментах (или даже так формализовать выбор η_{inf} , чтобы вычислительная программа автоматически определяла нужное значение внешней границы η_{inf} , исходя из заданной точности расчетов).

Организация вычислений для задачи о продольном обтекании пластины

Целью дальнейших расчетов будет построение поля течения вблизи проницаемой стенки при различных значениях параметра f_w – отрицательных, соответствующих вдуву (или испарению), и положительных, как при отсосе (или конденсации).

Основные результаты, а именно практические расчетные рекомендации для трения и теплоотдачи при продольном обтекании плоской пластины, получены далее методом sbval в пакете Mathcad (п.п. 2.2–2.5). Для исследуемой задачи с *постоянной скоростью* внешнего потока (с нулевым продольным градиентом давления) принимают соответственно:

$$u_\infty = \text{const}, m = 0, \beta = 0. \quad (2.29)$$

В результате численного интегрирования системы (2.26) будут получены функции $F_0(\eta)$, $F_1(\eta)$, $F_2(\eta)$, после чего может быть рассчитано поле течения в исходных, физических координатах, а также определено трение на стенке.

Связь между *физическими* переменными, т.е.:

- координатами x, y ;
- продольной $u(x, y)$ и поперечной $v(x, y)$ составляющими скорости;

• функцией тока $\psi(x, y)$;

и *автомодельными* переменными Фолкнера – Скэн, т.е.:

• безразмерным расстоянием от стенки η ;

• безразмерной функцией тока $f(\eta)$ –

задается при условиях (2.29) следующими уравнениями:

для продольной скорости, отнесенной к скорости внешнего потока:

$$U = \frac{u}{u_\infty} = \frac{\partial}{\partial \eta} f = F_1, \quad (2.30)$$

для поперечной скорости, отнесенной к скорости внешнего потока:

$$V = \frac{v}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}_L X}} \left(\eta \frac{\partial}{\partial \eta} f - f \right) = \frac{\eta F_1 - F_0}{\sqrt{2 \text{Re}_L X}}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31), записанное для нулевого значения η определяет связь между значениями функции тока и поперечной скорости (скорости вдува или отсоса) непосредственно на стенке:

$$\frac{v}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}_L X}} (-f_w) = \frac{-F_{0,w}}{\sqrt{2 \text{Re}_L X}}. \quad (2.32)$$

Вторая производная, вычисленная непосредственно на стенке, дает значение коэффициента трения, как это видно из следующего уравнения:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{\mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w}{\rho u_\infty^2} = \frac{f_w''}{\sqrt{2 \operatorname{Re}_L X}} = \frac{F_{2,w}}{\sqrt{2 \operatorname{Re}_L X}}. \quad (2.33)$$

Соотношения (2.31) и (2.32) дают основание назвать величину f_w – параметром проницаемости, а величину f_w'' – параметром трения.

Автомодельная переменная, интерпретируемая как отношение расстояния от стенки к толщине пограничного слоя, вычисляется через физические координаты (x, y) по формуле:

$$\eta = \frac{Y}{\sqrt{2 \frac{X}{\operatorname{Re}_L}}}. \quad (2.34)$$

Безразмерная функция тока f (или F_0) связана с обычной функцией тока ψ уравнением:

$$f = \frac{\psi}{u_\infty L} \sqrt{\frac{\operatorname{Re}_L}{2X}}. \quad (2.35)$$

Эти формулы дублируют приведенные в п.2.2 более общие соотношения (2.8)–(2.24) для рассматриваемого здесь частного случая постоянной скорости внешнего потока.

Напомним физический смысл функции тока, ясный из определяющего соотношения:

$$\psi_2 - \psi_1 = \int_{y_1}^{y_2} u \, dy, \quad (2.36)$$

где интеграл берется при фиксированном значении продольной координаты x , т.е. по поперечному сечению потока. Разность значений на двух линиях тока равна объемному расходу (рис. 2.5).

Число Рейнольдса определяется по длине обтекаемой поверхности L :

$$\operatorname{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}.$$

Физические координаты (x, y) приводятся к безразмерному виду отнесением к длине:

$$X = x/L, \quad Y = y/L.$$

Сведение краевой задачи к начальной задаче методом *sbval*

Граничные условия для уравнения Фолкнера – Скэн заданы на концах области интегрирования – на стенке, при $\eta = 0$, и вдали от нее, при $\eta \rightarrow \infty$, практически на некотором большом, но конечном расстоянии $\eta = \eta_{\text{inf}}$.

Другими словами, необходимо решать *краевую*, или, как иногда говорят, *двухточечную* задачу. Численные алгоритмы для таких задач более сложны, чем для *начальных* задач, когда *все* граничные условия заданы в *начальной* точке.

Применительно к начальным задачам, вычислительная математика располагает эффективным арсеналом быстрых и точных численных методов, среди которых наиболее распространены методы Рунге–Кутты с фиксированным или адаптирующимся шагом.

Можно использовать этот арсенал, сводя решение краевой задачи к интегрированию серии начальных задач с *пробными* значениями недостающих начальных условий. Насколько удачна или неудачна каждая такая попытка, можно судить по «расстоянию», на котором оказывается вычисленное значение от предписанного граничным условием на другом конце отрезка интегрирования. Здесь можно увидеть аналогию со стрельбой из пушки по цели, когда прицел корректируют по расстоянию разрыва от цели. Численный метод, основанный на этой аналогии, называют «методом пристрелки» (или стрельбы).

Обсудим более конкретно эту идею применительно к нашей задаче. В начальной точке поставлены два условия – заданы значения для $F_0(0)$ и $F_1(0)$. Недостаёт значения для $F_2(0)$ в начальной точке, но задано $F_1(\eta_{\text{inf}} = 1)$ на конце отрезка интегрирования. Решим задачу с начальными данными, взяв в качестве недостающего условия для $F_2(0)$ некоторое число ξ , может быть, просто наугад. В результате на конце отрезка получится решение с некоторым значением F_1 , которое мы обозначим как $F_{1,\text{inf}}$. Маловероятно, что после интегрирования получится правильное единичное значение $F_{1,\text{inf}} = 1$, но можно считать результат $F_{1,\text{inf}}$ функцией от пробного значения ξ . Теперь ясно, как действовать дальше.

Имеется два варианта.

- Решать уравнение $F_{1,\text{inf}}(\xi) - 1 = 0$ каким-либо численным методом, например, методом секущих, понимая, что пробные

значения функции $F_{1,\text{inf}}(\xi)$ находятся не просто подстановкой в какую-то формулу, но посредством обращения к процедуре численного интегрирования системы дифференциальных уравнений.

- Стремиться минимизировать невязку $(F_{1,\text{inf}}(\xi)-1)^2 \rightarrow 0$, добиваясь нулевого значения с помощью какого-либо алгоритма оптимизации (минимизации), например, методом покоординатного спуска, или симплексным методом Нелдера – Мида, или каким-либо другим имеющимся в распоряжении методом.

В Mathcad'е имеется специальная функция `sbval`, посредством которой можно определить *недостающие условия в начальной точке*. Мы не знаем подробностей внутреннего устройства этой функции, но по-видимому, она работает по какому-либо из описанных выше вариантов. В справочной системе Mathcad название функции `sbval` расшифровывается следующим образом. Часть «`bval`» соотносится со словосочетанием «`boundaryvalue`», т.е. «граничное значение». Буква «`s`» означает «`shootingmethod`», т.е. метод стрельбы, или пристрелки.

После того как недостающее начальное значение будет возвращено функцией `sbval` (рис. 2.2), получившуюся начальную задачу решают численным методом (например, методом Рунге–Кутты с фиксированным шагом `rkfixed`).

Далее, воспользовавшись приведенными выше формулами (2.30)–(2.35) перехода к физическим переменным и программой интерполяции (рис. 2.4), строят векторное поле скорости и функцию тока, чтобы сделать видимым влияние вдува или отсоса на гидродинамику потока. Mathcad программу можно запустить по ссылке [51].

Набор числовых параметров для примера решения уравнения Фолкнера – Скэн будет следующим:

- числовой параметр, определяющий ускорение внешнего потока: $\beta = 0$;

- числовой параметр, задающий вдув ($f_w < 0$) или отсос ($f_w > 0$): $f_w = 0$ (это случай непроницаемой стенки); в программе принято обозначение $f_w \equiv f0$;

- фиксированное нулевое значение координаты на обтекаемой стенке: $\eta_w = 0$;

- числовой параметр, задающий внешнюю границу пограничного слоя: $\eta_{\text{inf}} = 6$.

Обращение к встроенной функции `sbval` показано на рис. 2.2. Последовательность действий такова.

Вводятся значения параметров, записывается правая часть (2.27) системы дифференциальных уравнений (2.26).

Пользовательская функция `SetInit` формирует вектор начальных условий в соответствии с

$$F_0(0) = f_w; \quad F_1(0) = 0; \\ F_1(\infty) = 1.$$

Вводится пробное значение второй производной при $\eta = 0$ как *компонент вектора* с нулевым индексом ξ_0 (в других задачах недостающих начальных условий может быть больше, чем одно, поэтому ξ должно быть вектором).

Пользовательская функция `discrepancy` формирует невязку на конце отрезка интегрирования: $(F_1 - 1)$ должно быть равно нулю:

$$F_0(0) = f_w; \quad F_1(0) = 0; \\ F_1(\infty) = 1.$$

Записывается обращение к функции `sbval`, а результат, т.е. недостающее начальное условие, помещается в вектор `MissingInitCond`. Напомним, что это недостающее условие есть значение второй производной на стенке, т.е. $F_2(0)$.

```

β := 0      ηw := 0      ηinf := 6
D(η, F) := [
              F1
              F2
             -F0·F2 - β·[1 - (F1)²]
            ]
f_w := 0      ξ0 := 0.1      SetInit(ηw, ξ) := (
                                                f_w
                                                0
                                                ξ0
                                                )
discrepancy(ηw, F) := F1 - 1
MissingInitCond := sbval(ξ, ηw, ηinf, D, SetInit, discrepancy)
MissingInitCond = (0.4696)

```

Рис. 2.2. Применение функции `sbval`, возвращающей недостающие условия в начальной точке ($F_2(0)=0,4696$ для непроницаемой стенки)

Решение начальной задачи методом *rkfixed*

Поскольку теперь известны все начальные условия, можно обратиться к какой-либо встроенной функции численного интегрирования, например *rkfixed* (рис. 2.3). Параметрами этой функции являются: вектор начальных условий *InitCond*, координаты начальной и конечной точек, число шагов интегрирования *N* и вектор-функция правой части системы дифференциальных уравнений. Заметим, что фрагмент вычислений на рис. 2.3 является продолжением документа *Mathcad* на рис. 2.2, где уже была представлена правая часть *D*.

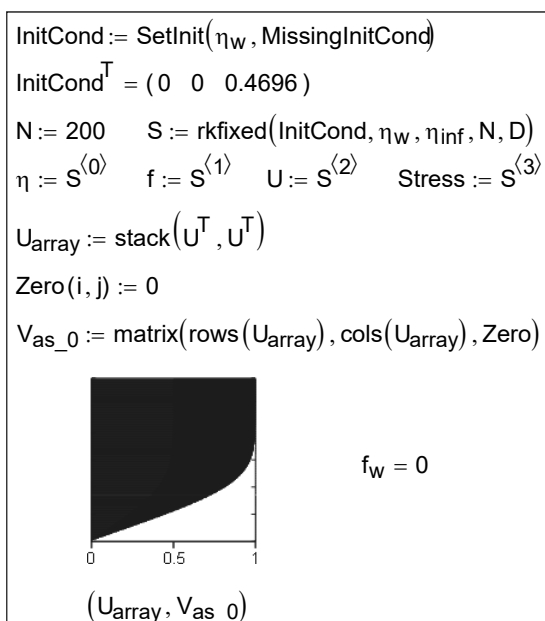


Рис. 2.3. Распределение продольной скорости в пограничном слое на непроницаемой поверхности

Результат интегрирования возвращается как массив *S*, составляющими которого являются векторы независимой переменной, безразмерных функции тока, продольной составляющей скорости и напряжения трения.

Для наглядности профиль продольной скорости построен таким образом, что обтекаемую стенку следует отождествить с горизонтальной осью координат, а поток считать движущимся слева направо. По вертикальной оси отложены значения безразмерного расстояния от стенки η . Значения продольной скорости отсчитываются по горизонтальной оси. В действительности построен график типа `VectorFieldPlot` (векторное поле), но горизонтальные стрелки продольной составляющей скорости нарисованы так часто, что сливаются, образуя эпюру скорости. Последние три строчки перед диаграммой на рис. 2.3 с помощью функций `stack` и `matrix` подготавливают необходимые массивы данных.

Итак, на рис. 2.3 представлен классический профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой стенке. Далее будут проведены расчеты для проницаемой поверхности, и мы увидим, как вдув или отсос управляют профилем скорости в пограничном слое.

Но предварительно представим результаты еще в двух формах (рис. 2.5). Во-первых, построим наглядную картину развития векторного поля течения вдоль обтекаемой поверхности, и, во-вторых, построим линии тока. Полезно сопоставить приведенные в этом разделе компьютерные картинки с фотографиями течений в альбоме М. Ван-Дайка.

Построение поля течения

Для построения поля течения в исходных, физических координатах необходимо заполнить область течения квадратной координатной сеткой (x, y) и для каждого узла сетки вычислить по формуле (2.34) значения автомодельной переменной. Затем по формулам (2.30), (2.31) и (2.35) следует найти значения продольной U и поперечной V проекций вектора скорости, а также функции тока ψ .

Эти вычисления реализованы в `Mathcad`-программе, ядро которой составляют операции интерполяции посредством функции `linterp` (рис. 2.4).

```

Fields(S, Re L, X min) ≡ ( X max ← 1  nX ← 10  nY ← 40 )
( Y max ← max(S<sup>(0)</sup>) ·  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\text{Re L}}}$   Y min ← 0 )
for i ∈ 0 .. nX - 1
  Xi ← X min + i ·  $\frac{X \text{ max} - X \text{ min}}{nX - 1}$ 
  for j ∈ 0 .. nY - 1
    Yj ← Y min + j ·  $\frac{Y \text{ max} - Y \text{ min}}{nY - 1}$ 
    ηi,j ← Yj  $\sqrt{\frac{\text{Re L}}{2 \cdot X_i}}$ 
    Ui,j ← linterp(S<sup>(0)</sup>, S<sup>(2)</sup>, ηi,j)
    fi,j ← linterp(S<sup>(0)</sup>, S<sup>(1)</sup>, ηi,j)
    Vi,j ←  $\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \text{Re L} \cdot X_i}}$  · (Ui,j · ηi,j - fi,j)
    Ψi,j ← fi,j ·  $\sqrt{\frac{2 \cdot X_i}{\text{Re L}}}$ 
  ( U  V  Ψ  Y max )

```

Рис. 2.4. Программа интерполяции для расчета поля течения в физических координатах

Результаты расчетов представлены на рис. 2.5. Поскольку на передней кромке обтекаемой пластины (при $X=0$) решение имеет особенность: построение начинается с некоторого малого конечного значения X_{\min} .

Двухмерные массивы проекций скорости U, V определены на равномерной сетке, и для построения векторного поля течения применяется диаграмма вида `VectorFieldPlot` (верхний рисунок). Функция тока Ψ также вычислена как двухмерный массив над той же равномерной сеткой. Постоянные значения Ψ соответствуют линиям тока, и для их построения применена диаграмма типа `ContourPlot` (нижний рисунок).

На верхнем рисунке видно, как постепенно по ходу потока утолщается пограничный слой, в пределах которого происходит все изменение скорости – от нуля на стенке до скорости набегающего потока. Линии тока (нижний рисунок) идут почти параллельно обтекаемой поверхности, хотя заметно их некоторое

отклонение вверх по ходу потока вследствие подтормаживания, «налипания» жидкости на твердой стенке.

И продольная, и поперечная составляющие скорости обращаются в ноль на самой твердой непроницаемой поверхности.

Напряжение трения, пропорциональное производной $(\frac{\partial u}{\partial y})$, достигает максимального значения на стенке и обращается в ноль на внешней границе пограничного слоя. В соответствии с уравнением (2.33), в котором следует сделать замену (см. значение переменной MissingInitCond на рис. 2.2):

$$f_w'' \equiv F_2(0) = 0,4696,$$

коэффициент трения на непроницаемой пластине выражается формулой:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{0,4696}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}} = \frac{0,332}{\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}}. \quad (2.37)$$

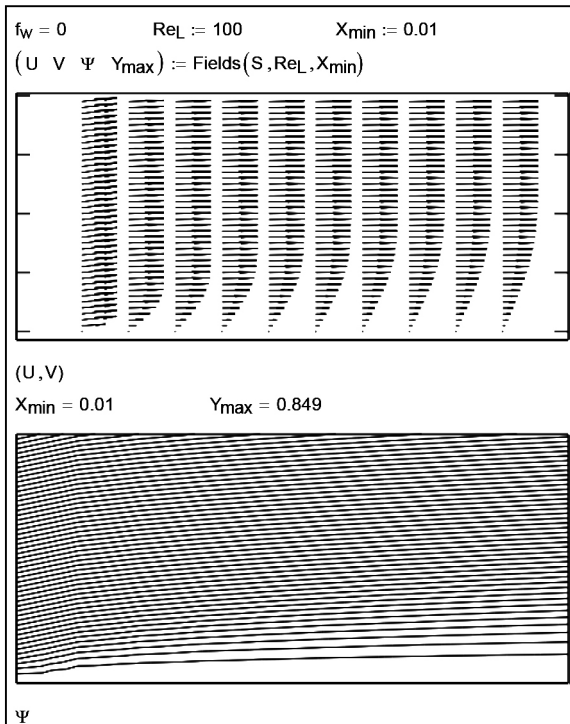


Рис. 2.5. Векторное поле течения и функция тока для непроницаемой стенки

2.3. Пограничный слой на проницаемой поверхности

При вдуве через проницаемую стенку (рис. 2.6–2.8) наблюдается резкое изменение структуры течения в пограничном слое. Профиль скорости (рис. 2.6) приобретает характерную S-образную форму. Слой сдвига, в котором происходит резкое изменение скорости и где касательные напряжения трения отличны от нуля (т.е. собственно пограничный слой), оказывается *оттесненным* от обтекаемой поверхности. На самой же стенке напряжения трения уменьшается и в пределе, при так называемом *критическом* вдуве, обращается в ноль. Значение параметра проницаемости $f_w = -0,7$, принятое в расчете, близко к критическому, а значение коэффициента трения практически нулевое ($f''_w = F_2(0) = 0,05458$, (рис. 2.6), сравнить со значением $f''_w = F_2(0) = 0,4696$ для непроницаемой стенки).

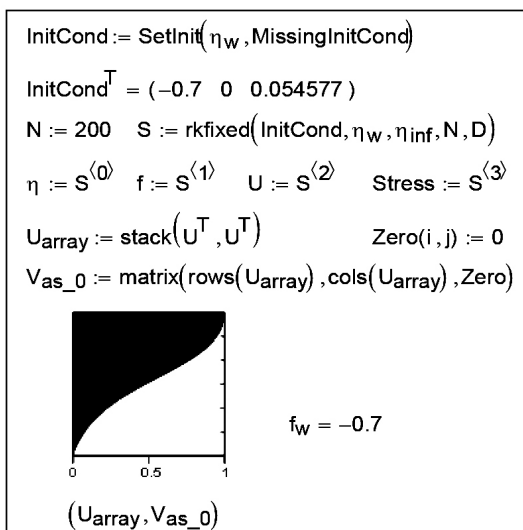


Рис. 2.6. Распределение продольной скорости в пограничном слое при вдуве на рис. 2.7

Чтобы сделать структуру течения вблизи стенки более отчетливой, на рис. 2.8 показано векторное поле скорости в увеличенном масштабе. Следует отметить, что продольная составляющая на самой стенке по-прежнему равна нулю, т.е. выполняется условие прилипания. Однако поперечная составляющая, в отли-

чие от непроницаемой поверхности, уже ненулевая. Поэтому на самой стенке вектор скорости ненулевой и направлен по нормали к поверхности.

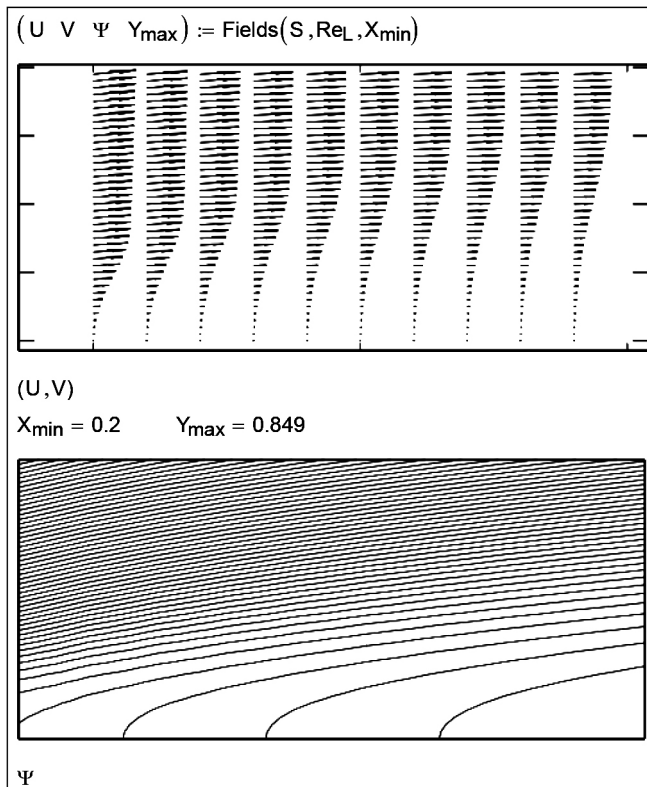


Рис. 2.7. Векторное поле скорости и функция тока при вдуве

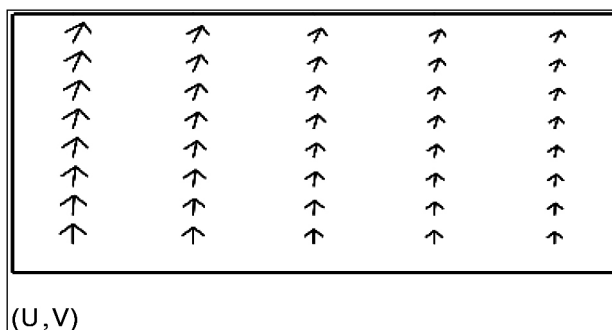


Рис. 2.8. Векторное поле скорости вблизи стенки при вдуве

Течение в пограничном слое с отсосом показано на рис. 2.9–2.11.

Мы вновь замечаем существенные отличия от непроницаемой стенки. Теперь пограничный слой прижимается к стенке, его толщина заметно меньше, чем для непроницаемой поверхности и тем более для течения со вдувом. Благодаря большей крутизне профиля скорости, значительно возрастает трение на проницаемой поверхности в случае отсоса. *Вторая производная на стенке*, пропорциональная трению, принимает значение $f''_w = F_2(0) = 7$ (при $f_w = 7$). Это очень большая величина, если сравнить со значением $f''_w = F_2(0) = 0,4696$ для непроницаемой стенки.

На рисунке 2.11 показано векторное поле скорости в увеличенном масштабе для случая течения с отсосом. Как всегда, благодаря условию прилипания продольная составляющая на самой стенке равна нулю. Поперечная составляющая, в отличие от непроницаемой поверхности, ненулевая и принимает отрицательные значения.

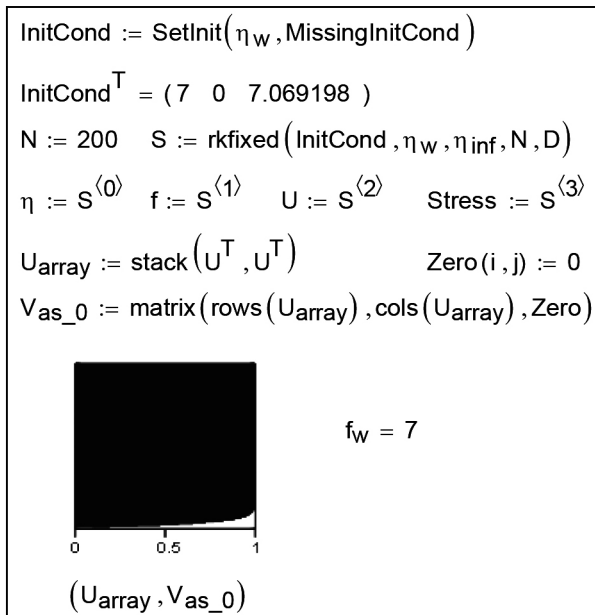


Рис. 2.9. Распределение продольной скорости в пограничном слое с отсосом ($f_w=7$, $f''_w=F_2(0)=7,0692$)

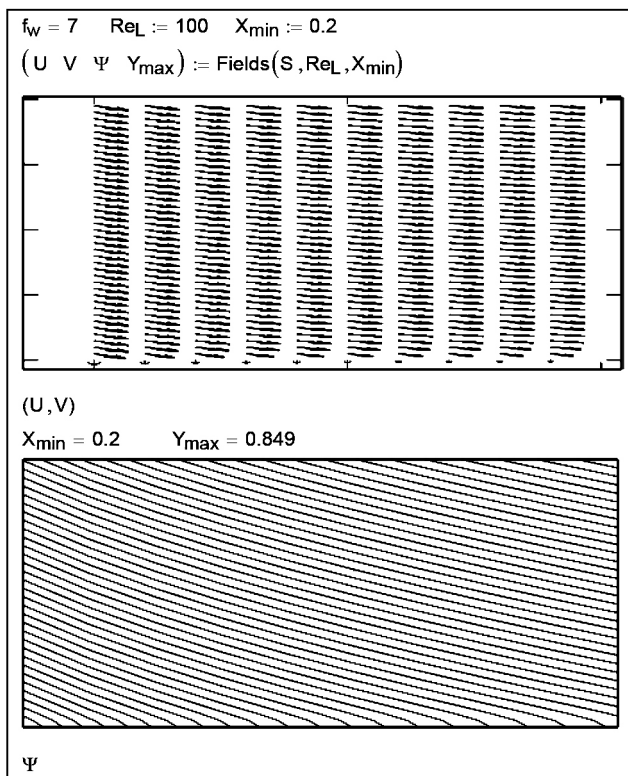


Рис. 2.10. Поле скорости и функция тока при сильном отсосе

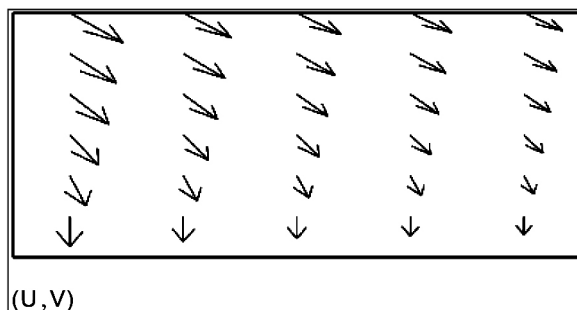


Рис. 2.11. Поле скорости вблизи стенки при сильном отсосе

В расчетах, проведенных выше для обтекания непроницаемой поверхности и для случаев со вдувом и отсосом через стенку, варьируемым параметром было значение функции тока на стенке

f_w , которое мы называли параметром проницаемости (уравнение (2.32)). При численном интегрировании краевой задачи каждый раз для заданного параметра f_w получалось соответствующее значение второй производной на стенке f''_w , которое является мерой трения (2.33). Результаты таких вычислений представлены графически на рис. 2.12 в форме зависимости $f''_w(f_w)$.

Как видно из графика, для больших положительных значений параметра проницаемости, т.е. для сильного отсоса, обнаруживается следующая асимптотика: $f''_w \Rightarrow f_w$.

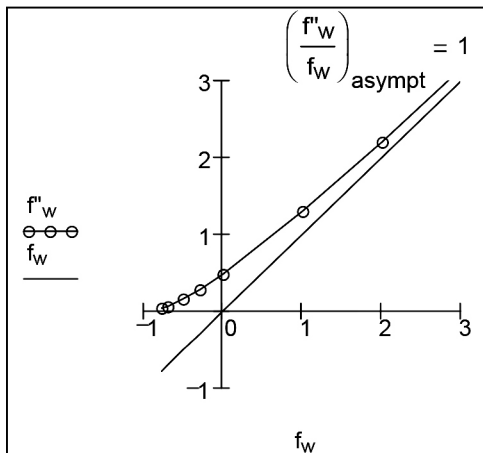


Рис. 2.12. Зависимость параметра трения от поперечного потока

Из уравнений (2.32) и (2.33) следует, что в указанном асимптотическом пределе сильного отсоса

$$\frac{c_f}{2} = \frac{-v_w}{u_\infty} \quad (2.38)$$

или, что то же самое,

$$\tau_w = [\rho \cdot (-v_w)] \cdot u_\infty. \quad (2.39)$$

Физический смысл асимптотической формулы (2.39) для трения можно пояснить следующим образом. Заключенная в квадратные скобки часть этого выражения есть плотность *поперечного* потока массы, поступающего из внешнего потока в проницаемую стенку, а второй сомножитель есть *продольный* импульс, «содержащийся» в каждой единице массы этого попереч-

ного потока. Произведение этих величин составляет *плотность потока импульса* через поверхность стенки, что равносильно заданию трения на стенке.

Замечательным свойством предельного закона (2.38) или (2.39) является независимость напряжения трения (или коэффициента трения) от вязкости жидкости.

Другой важный результат уже обсуждался выше – это обращение в ноль трения на поверхности при сильном вдуве. На графике (рис. 2.12) этот случай оттеснения (или отрыва) пограничного слоя виден в области предельных отрицательных значений параметра вдува f_w , где параметр трения f_w'' обращается в ноль.

Исследование пограничного слоя на проницаемой поверхности методом Odesolve

При применении встроенного интегратора Odesolve в пакете Mathcad (рис. 2.13) дифференциальное уравнение и краевые условия записываются в обычной математической нотации. Результат численного интегрирования возвращается как функция $f(\eta)$, с которой можно обращаться обычным образом: найти числовое значение, построить график и т.п. (рис. 2.13).

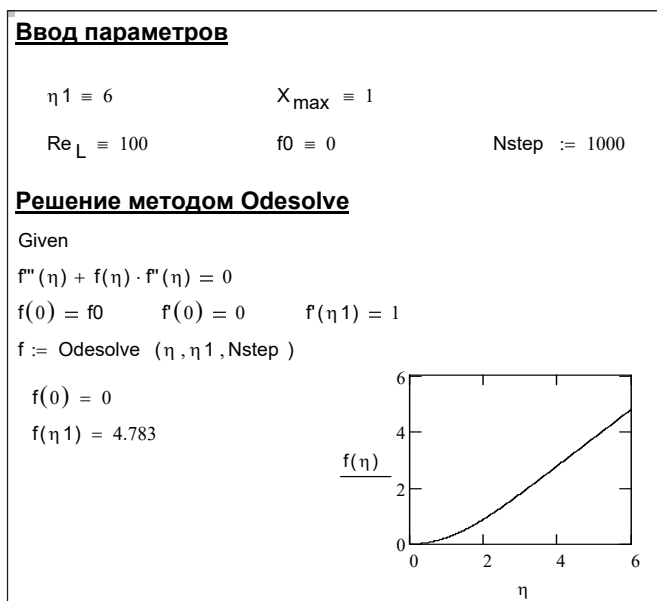


Рис. 2.13. Интегрирование методом Odesolve

В действительности за обращением к интегратору стоит сложная вычислительная программа, но это остается *скрытым* от пользователя. Численный метод переводится в категорию рутинных автоматизированных операций, благодаря чему внимание исследователя может быть полностью сосредоточено на главной творческой задаче – разработке адекватной математической модели.

Однако пользуясь таким математическим сервисом, следует сохранять контроль над получаемыми результатами. Оказывается, что реализация Odesolve в пакете Mathcad имеет существенные недостатки (рис. 2.14): программа отказывается вычислять значения скорости потока U на концах отрезка интегрирования, а также напряжение трения.

Решение методом Odesolve

Nstep := 100

Given

$$f'''(\eta) + f(\eta) \cdot f''(\eta) = 0$$

$$f(0) = f_0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\eta_1) = 1$$

f := Odesolve(η, η1, Nstep)

$$U(\eta) := \frac{d}{d\eta} f(\eta) \quad V(\eta) := \frac{U(\eta) \cdot \eta - f(\eta)}{\sqrt{2 \cdot \text{Re}_L \cdot X_{\max}}} \quad \tau(\eta) := \frac{d^2}{d\eta^2} f(\eta) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \text{Re}_L \cdot X_{\max}}}$$

??? U(0) = ■ U(η1) = ■ τ(0) = ■ ???

Рис. 2.14. Недостатки Odesolve

Ясно, что ошибки связаны с дифференцированием функции f , выводимой интегратором Odesolve. Ситуация выглядит таким образом, что решение не удовлетворяет поставленным краевым условиям для скорости потока, в том числе условию прилипания на стенке, а основная гидродинамическая характеристика потока – трение на стенке – вообще не может быть вычислена.

По-видимому, решение Odesolve возвращает функцию f , некорректно аппроксимированную на концах отрезка интегрирования. Причиной является применение сплайн-интерполяции для формирования функции f . На концах отрезка при стандартной

сплайн–интерполяции *предполагается равенство нулю второй производной*, в то время как *следует использовать краевые условия конкретной задачи*.

Для уравнения Фолкнера – Скэн обнуление второй производной на стенке означает равенство нулю напряжения трения на стенке, т.е. ошибочный результат.

Решение проблемы состоит в следующем.

В методе Odesolve *не искаженные* сплайн–интерполяцией результаты численного анализа содержатся в наборе значений функции тока f в точках, определяемых параметром Nstep (рис. 2.14). Поэтому следует переопределить функцию f вблизи стенки посредством кубического интерполяционного многочлена, построенного по четырем ближайшим к стенке точкам. Соответствующую Mathcad программу можно вызвать по ссылке [51].

С добавлениями, сделанными в этой программе, функция Odesolve становится действительно эффективным инструментом исследования пограничного слоя.

2.4. Теплообмен при продольном обтекании пластины.

Уравнение теплового пограничного слоя

Если температуры стенки и потока жидкости (рис. 2.1) не одинаковы, то возникает тепловой поток, который в инженерных расчетах определяют по уравнению Ньютона–Рихмана

$$q_w = \alpha(t_w - t_\infty), \quad (2.40)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, мера интенсивности процесса конвективного теплообмена между твердой поверхностью и потоком жидкости. Разность температур стенки и набегающего потока называют температурным напором.

Коэффициент теплоотдачи является сложной функцией скорости и режима течения, формы и размеров обтекаемой поверхности, теплофизических свойств жидкости. Можно сказать, что разработка методов расчета коэффициента теплоотдачи – это главная задача теории конвективного теплообмена. Далее показано (2.44), как вычислить коэффициент теплоотдачи по результа-

там численного интегрирования дифференциального уравнения теплового пограничного слоя (полезное обсуждение этого вопроса см. в Томе 1 \ гл. 3 «Краевые условия»).

Напомним, что уравнения в частных производных для *гидродинамического* пограничного слоя (2.5), (2.6) после преобразований подобия превращаются в обыкновенное дифференциальное уравнение (2.1), интегрирование которого дает полную информацию о скорости и трении в пограничном слое.

К уравнению в частных производных (2.7) для теплового пограничного слоя также можно применить преобразование Фолкнера – Скэн и, при некоторых ограничениях на вид краевых условий, свести задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению. Ограничимся случаем *постоянных значений* температур стенки и внешнего потока и введем безразмерную избыточную температуру:

$$t_w, t_\infty, (t_w - t_\infty) = \text{const};$$

$$g(\eta) \equiv \frac{t(x, y) - t_w}{t_\infty - t_w}, \quad (2.41)$$

для которой из уравнения в частных производных (2.7) получается обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$g''(\eta) + \text{Pr} \cdot f(\eta) \cdot g'(\eta) = 0; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} \quad (2.42)$$

с краевыми условиями

$$g(0) = 0 \quad g(\infty) = 1. \quad (2.43)$$

Автомодельная переменная η имеет прежний смысл (2.34):

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}}; \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}; \quad u_\infty(x) = c \cdot x^m.$$

Представление (2.42) в форме системы ОДУ первого порядка, аналогичное уравнениям для гидродинамического пограничного слоя (2.26), (2.27), выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{d\eta} G = D(\eta, G).$$

Зависимая переменная G и правая часть определены как вектор-функции:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}; \quad D(\eta, G) = \begin{pmatrix} G_2 \\ -\text{Pr} \cdot f(\eta) \cdot G_2 \end{pmatrix},$$

где G – безразмерная избыточная температура и ее производная.

Поскольку функция $f(\eta)$ для поля скоростей уже известна (рис. 2.5–2.11), тепловую задачу несложно решить: уравнение (2.42) – это *линейное* однородное обыкновенное дифференциальное уравнение (с переменными коэффициентами).

Простые выкладки показывают, как выразить коэффициент теплоотдачи α и его безразмерное представление – число Стантона (St) или число Нуссельта (Nu) – через производную от безразмерного профиля температуры на стенке g'_w :

$$\alpha = \frac{q_w}{t_w - t_\infty} = \frac{-\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}}{t_w - t_\infty} = \lambda \frac{dg}{d\eta} \Big|_{y=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda g'_w \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty(x)}{\nu x}};$$

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p \cdot u_\infty(x)} = \frac{\lambda}{\rho c_p} g'_w \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty}{\nu x}} \frac{1}{u_\infty} \frac{\nu}{\nu} = \frac{g'_w}{\text{Pr}} \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{\nu}{u_\infty(x) \cdot x}}; \quad (2.44)$$

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda} \equiv \text{St} \cdot \text{Re}_x \cdot \text{Pr} = g'_w \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot \frac{u_\infty(x) \cdot x}{\nu}}.$$

Для задачи продольного обтекания пластины $m = 0$, для течения в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра $m = 1$.

Теплообмен при продольном обтекании пластины

Mathcad программа, реализующая вычисления для продольного обтекания непроницаемой пластины, вызывается по ссылке [51].

В программе имеется блок для интегрирования гидродинамической задачи (рис. 2.15) методом Odesolve. Функция тока $f(\eta)$ скорректирована вблизи стенки, как описано в предыдущем параграфе. Встроенная функция `poluscoeff` возвращает коэффициенты интерполирующего полинома.

Расчет поля течения

$$N := 40 \quad \eta_1 := 6 \quad f_0 := 0$$

$$\text{Given } f''(\eta) + f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0 \quad f(0) = f_0 \quad f'(0) = 0 \quad f'(\eta_1) = 1$$

$$f := \text{Odesolve}(\eta, \eta_1, N)$$

$$h := \frac{\eta_1}{N} \quad f''_0 := \frac{2 \cdot (f(h) - f_0)}{h^2} \quad f''_0 = 0.47$$

$$f_a(\eta) := \begin{cases} \text{if } \eta > \eta_1 & \begin{cases} \text{"main stream"} \\ f_a \leftarrow \eta - (\eta_1 - f(\eta_1)) \end{cases} \\ \text{otherwise} & \begin{cases} \text{if } \eta \leq 3 \cdot h & \begin{cases} \text{"at the wall"} \\ vx \leftarrow (0 \quad h \quad 2 \cdot h \quad 3 \cdot h)^T \\ vy \leftarrow (f(0) \quad f(h) \quad f(2 \cdot h) \quad f(3 \cdot h))^T \\ (a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3) \leftarrow \text{polycoeff}(vx, vy)^T \\ f_a \leftarrow a_0 + a_1 \cdot \eta + a_2 \cdot \eta^2 + a_3 \cdot \eta^3 \end{cases} \\ \text{otherwise} & \begin{cases} \text{"inside"} \\ f_a \leftarrow f(\eta) \end{cases} \end{cases} \\ f_a \end{cases}$$

$$U(\eta) := \frac{d}{d\eta} f_a(\eta) \quad \eta_{inf} := \text{root}(0.99 - U(\eta), \eta, 1, 10) \quad \eta_{inf} = 3.472$$

Рис. 2.15. Расчет поля течения в случае непроницаемой стенки $f_0 = 0$ и постоянной скорости внешнего потока ($\beta = 0$)

За пределами слоя $\eta = 3,472$ скорость уже практически постоянна, а функция тока линейно увеличивается с расстоянием от стенки (рис. 2.16).

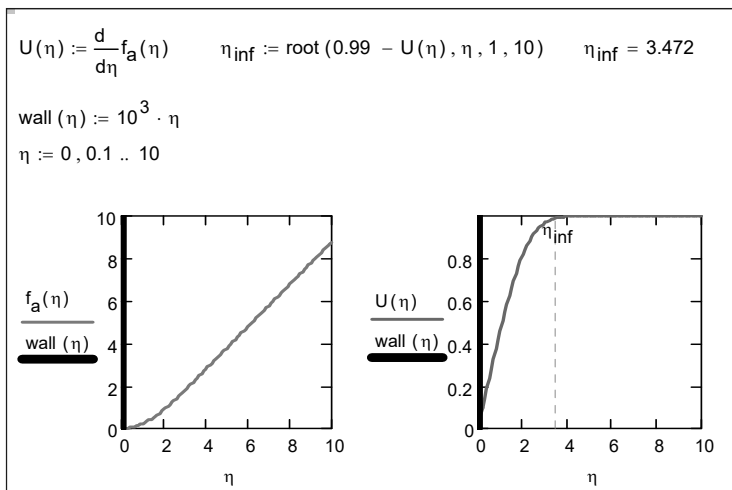


Рис. 2.16. Функция тока и профиль скорости в случае непроницаемой стенки $f_0 = 0$

Расчет температурного поля

$\text{Pr} := 1$

Given $g''(\eta) + \text{Pr} \cdot f_a(\eta) \cdot g'(\eta) = 0 \quad g(0) = 0 \quad g(\eta_1) = 1$

$g_{\text{Pr}_1} := \text{Odesolve}(\eta, 6, N) \quad g'_{\text{Pr}_1}(\eta) := \frac{d}{d\eta} g_{\text{Pr}_1}(\eta)$

$\text{Pr} := 10$

Given $g''(\eta) + \text{Pr} \cdot f_a(\eta) \cdot g'(\eta) = 0 \quad g(0) = 0 \quad g(\eta_1) = 1$

$g_{\text{Pr}_{10}} := \text{Odesolve}(\eta, 6, N) \quad g'_{\text{Pr}_{10}}(\eta) := \frac{d}{d\eta} g_{\text{Pr}_{10}}(\eta)$

$\eta_1 := 12$

$\text{Pr} := 0.1$

Given $g''(\eta) + \text{Pr} \cdot f_a(\eta) \cdot g'(\eta) = 0 \quad g(0) = 0 \quad g(\eta_1) = 1$

$g_{\text{Pr}_{0.1}} := \text{Odesolve}(\eta, 12, N) \quad g'_{\text{Pr}_{0.1}}(\eta) := \frac{d}{d\eta} g_{\text{Pr}_{0.1}}(\eta)$

$\eta_0 := 10^{-307}$

$g'_{\text{Pr}_{10}}(\eta_0) = 1.03 \quad g'_{\text{Pr}_1}(\eta_0) = 0.47 \quad g'_{\text{Pr}_{0.1}}(\eta_0) = 0.198$

Рис. 2.17. Интегрирование уравнения (2.42) для температурного поля

Интегрирование уравнения (2.42) для температурного поля проводится для трех характерных значений числа Pr (рис. 2.17).

Поля температуры и градиента температуры (или теплового потока) в безразмерном представлении показаны на рис. 2.18. Расчеты проведены в широком диапазоне чисел Прандтля. Близкие к единице значения числа Прандтля характерны для газовых теплоносителей, много большие единицы – для вязких мало-теплопроводных органических жидкостей, много меньшие единицы – для жидких металлов.

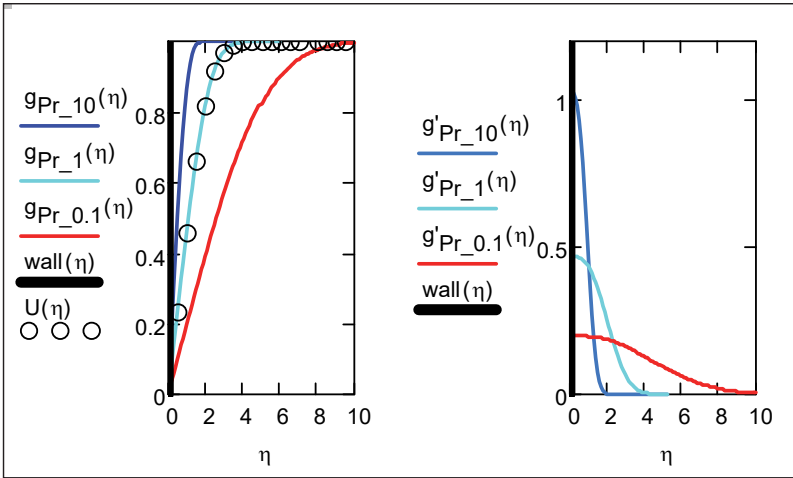


Рис. 2.18. Распределения температуры (левый график) и теплового потока (правый график) по толщине пограничного слоя для чисел $Pr = 0,1; 1; 10$

В случае $Pr = 1$ (газовые теплоносители) профили скорости и температуры полностью совпадают и толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев оказываются одинаковыми (аналогия трения и теплообмена, аналогия Рейнольдса).

При $Pr \ll 1$ (жидкометаллические теплоносители, см. числовой пример с $Pr = 0,1$) толщина теплового слоя намного больше толщины гидродинамического.

Можно сказать, что течение в основных пределах теплового пограничного слоя происходит с равномерной скоростью u_∞ , за исключением самой близкой окрестности стенки.

При $Pr \gg 1$ (вязкие теплоносители, см. числовой пример с $Pr = 10$) толщина гидродинамического слоя намного больше толщины теплового слоя. На самом дне гидродинамического слоя находится тепловой слой, и течение в нем происходит с относительно малой скоростью, уменьшенной из-за близости к стенке. Более подробное исследование теплоотдачи в широком диапазоне чисел Прандтля можно провести с Mathcad программой [51]. Полезной особенностью этой программы является *параметризация* вычислительного блока Odesolve с целями:

- ввести в программу индексированный набор (вектор-столбец) значений параметра Pr (рис. 2.19);
- провести вычисления в автоматическом режиме;
- зафиксировать результаты также в виде массива данных.

Техника программирования показана на рис. 2.19. Там же представлены распределения температуры для нескольких значений числа Pr . Далее вычисляется градиент температуры на стенке как индексированный массив g'_w (рис. 2.20). Он сопоставляется с массивом определяющего параметра Pr (рис. 2.19).

Результаты представлены графически, причем сопоставлены:

- данные численного интегрирования как функция $g'_w(Pr)$;
- известные асимптотические выражения для малых и больших значений числа Прандтля;

• приближенное универсальное уравнение g'_{appr} для градиента на стенке g'_w , которое получено методом интерполяции между асимптотами и, как видно из графика, пригодно во всем диапазоне чисел Прандтля. При практических расчетах локальной теплоотдачи полученный результат используется следующим образом. Определяющими безразмерными параметрами являются числа Рейнольдса и Прандтля и критериальное соотношение для теплоотдачи записывается как

$$\begin{aligned}
 Nu_x &= Nu_x(Re_x, Pr); \\
 Nu_x &\equiv \frac{\alpha x}{\lambda}; \quad Re_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{a}; \\
 g'_w(Pr) &= \left((0,479 Pr^{1/3})^{-4} + (0,798 Pr^{1/2})^{-4} \right)^{-\frac{1}{4}}; \\
 Nu_x &= \frac{g'_w(Pr)}{\sqrt{2}} \sqrt{Re_x}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

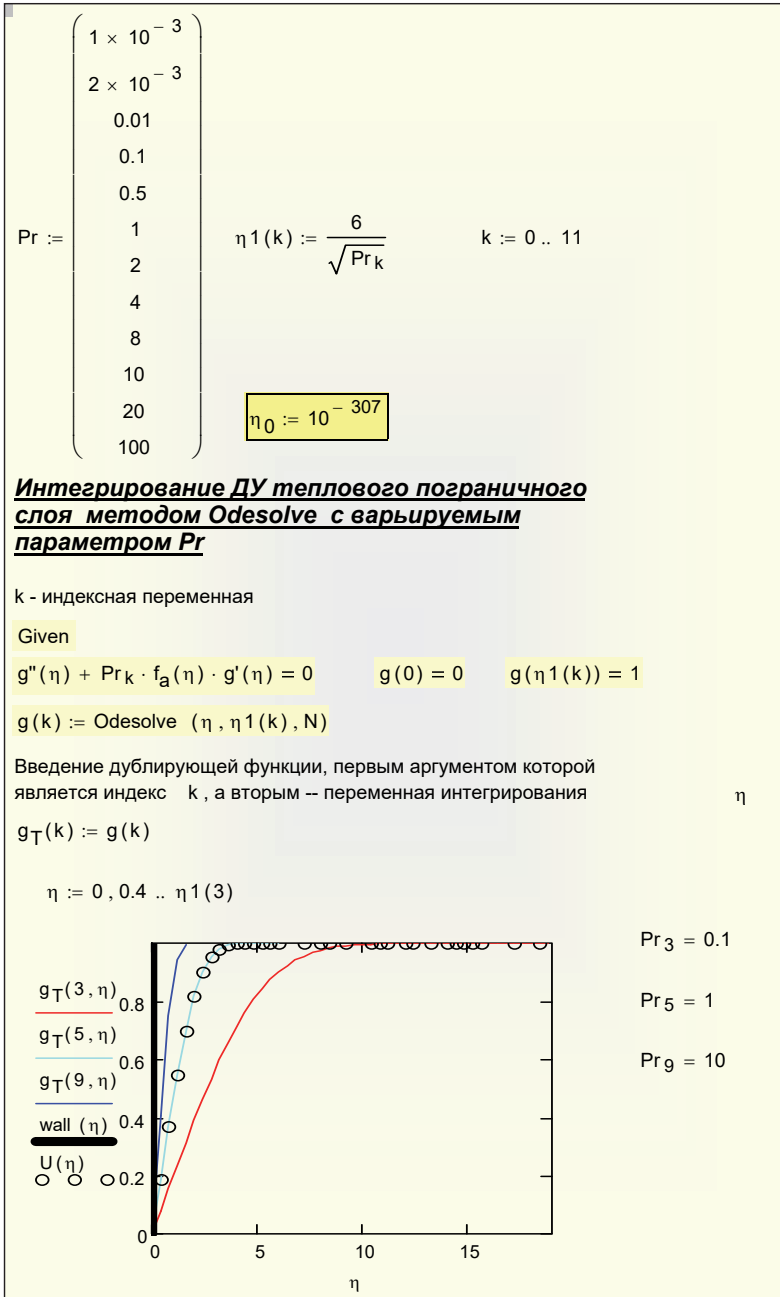


Рис. 2.19. Параметризация блока Odesolve: параметр Pr как массив значений

Разработка аппроксимаций

$$\alpha = \frac{q_w}{t_w - t_\infty} = \frac{-\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=+0}}{t_w - t_\infty} = \lambda \frac{dg}{d\eta} \Big|_{y=+0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda g'_w \sqrt{\frac{u_\infty}{2\nu x}}$$

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = \frac{g'_w}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}}$$

$$g'(k, \eta) := \frac{d}{d\eta} g_T(k, \eta) \quad g'_{w_k} := g'(k, \eta_0)$$

$$g'_{\text{appr}}(\text{Pr}) := \left[\left(0.479 \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \right)^{-4} + \left(0.798 \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{2}} \right)^{-4} \right]^{-0.25}$$

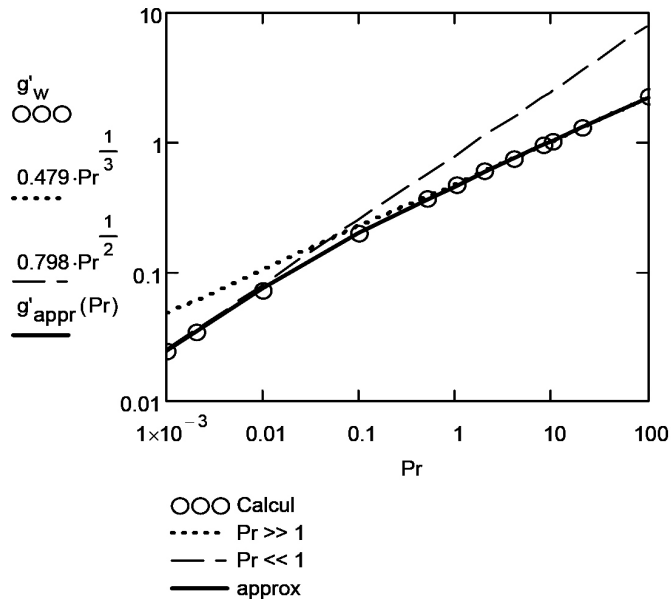


Рис. 2.20. Аппроксимация результатов расчета

Для неметаллических теплоносителей рекомендуют формулу:

$$Nu_x = 0,33 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}; \quad Pr > 0,5. \quad (2.46)$$

Сопоставление этих соотношений (рис. 2.21) показывает, что в области применимости они практически совпадают.

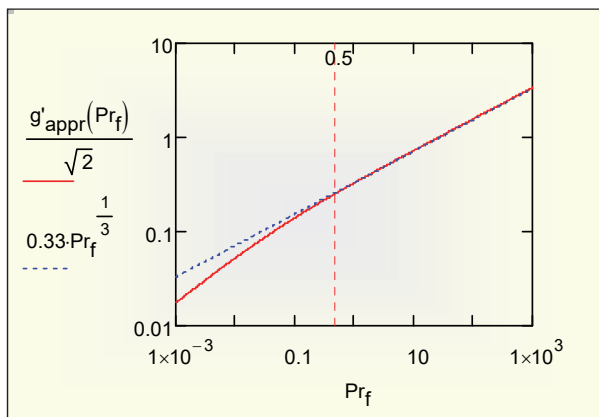


Рис. 2.21. Сопоставление расчетных соотношений (2.45) и (2.46)

Полезно по результатам теории получить представление о реальных цифровых значениях коэффициента теплоотдачи для трех различных теплоносителей – ртути, воздуха и масла МК, представляющих три характерные группы, а также для самого важного теплоносителя – воды (рис. 2.22, теплоносители идентифицированы числовыми индексами).

Теплофизические свойства взяты для нормальных условий. Размерные величины записаны в системе СИ: теплопроводность λ , W/(m K), кинематическая вязкость ν , m²/s; длина поверхности L , m; скорость набегающего потока U , m/s; коэффициент теплоотдачи α , W/(m² K).

Длина обтекаемой стенки и скорость были выбраны небольшими, чтобы выполнялось условие ламинарного режима. Коэффициент теплоотдачи рассчитывался по формуле (2.44) при $m = 0$:

$$\alpha = \lambda \frac{g'_w}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu L}}.$$

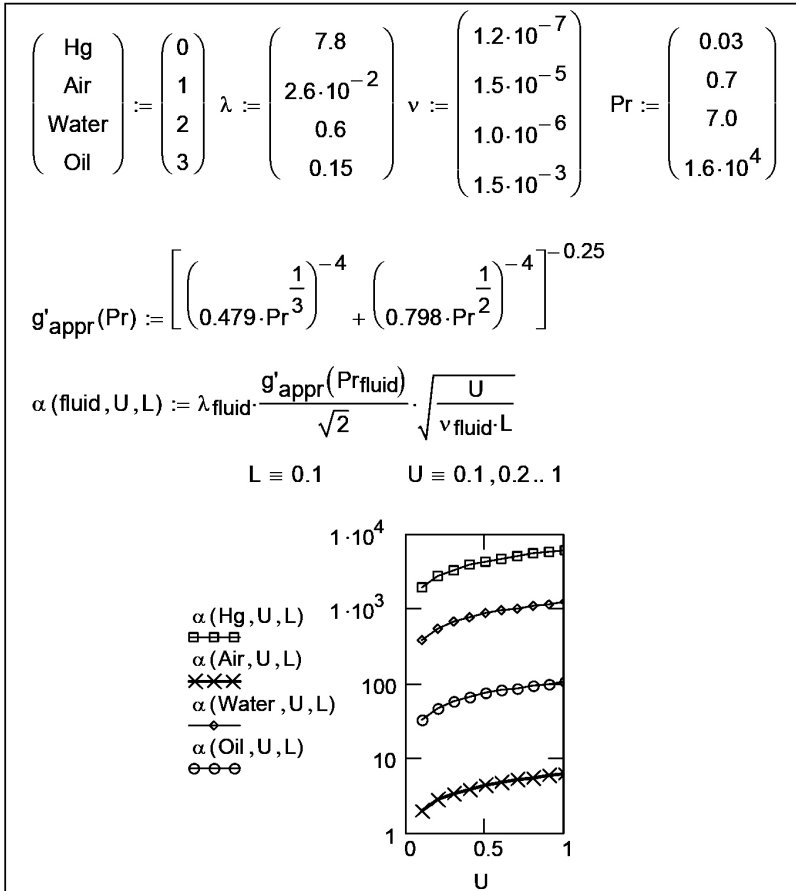


Рис. 2.22. Теплоотдача к различным теплоносителям

Результаты вычислений показывают, как сильно зависит интенсивность теплообмена от физических свойств жидкости. Теплоотдача к потоку ртути (жидкого металла с высокой теплопроводностью) на три порядка превышает теплоотдачу к воздуху. Видно, что и вода является гораздо лучшим охладителем, чем вязкое масло или воздух с его малой плотностью и теплопроводностью.

Другой важный вывод теории – существенный рост интенсивности теплообмена при увеличении скорости течения, пропорционально корню квадратному из значения скорости потока (рис. 2.22).

Хотя эти результаты получены для ламинарного режима, качественный характер полученных зависимостей сохраняется и для более важных для практики (и более сложных для расчета) турбулентных потоков.

2.5. Закон теплообмена

Результаты вычислений для интенсивности теплообмена можно представить в форме, которая предположительно должна обладать большей общностью, чем соотношение (2.46) для коэффициента теплоотдачи при продольном обтекании изотермической пластины. Перепишем (2.44) как уравнение, связывающее

- безразмерное *локальное* значение коэффициента теплоотдачи
- и число Рейнольдса, построенное по *локальным* значениям толщины пограничного слоя и скорости внешнего потока:

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p \cdot u_\infty(x)} = \frac{g_w'}{\text{Pr}} \sqrt{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{v}{u_\infty(x) \cdot x} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\rho c u_\infty} = \frac{g_w'}{\text{Pr}} \frac{\delta_{t_{xx},rel}}{\text{Re}_{t_{xx}}}, \quad (2.47)$$

где

$$\text{Re}_{t_{xx}} = \frac{u_\infty \delta_{t_{xx}}}{\nu}; \quad \delta_{t_{xx},rel} = \frac{\delta_{t_{xx}}}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty} \frac{2}{m+1}}} \xrightarrow{m=0} \frac{\delta_{t_{xx}}}{\sqrt{\frac{2\nu x}{u_\infty}}}. \quad (2.48)$$

Толщина потери энтальпии может быть вычислена, если известны профили скорости и температуры. В безразмерном виде:

$$\delta_{t_{xx},rel} = \int_0^\infty U(\eta) (1 - g(\eta)) d\eta. \quad (2.49)$$

Вычисления реализованы в Mathcad программе [51] и результаты представлены на рис. 2.23, 2.24.

Закон теплообмена
Ламинарный пограничный слой
Газы и неметаллические жидкости

$$m := 4 .. 11$$

Толщина потери энthalпии

$$\delta_m := \int_0^{\eta^{1(m)}} U(\eta) \cdot (1 - g_T(m, \eta)) \, d\eta$$

$$Pr_m = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 10 \\ 20 \\ 100 \end{pmatrix} \quad g'_{w_m} = \begin{pmatrix} 0.367 \\ 0.47 \\ 0.597 \\ 0.756 \\ 0.956 \\ 1.03 \\ 1.303 \\ 2.31 \end{pmatrix} \quad \delta_m = \begin{pmatrix} 0.73356 \\ 0.46968 \\ 0.29856 \\ 0.18898 \\ 0.11909 \\ 0.10248 \\ 0.06361 \\ 0.01883 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\alpha}{\rho c u_\infty} = \frac{g'_w \cdot \delta_{txx,rel}}{Pr} \cdot \frac{1}{Re_{txx}}$$

$$\varphi_m := \frac{g'_{w_m} \cdot \delta_m}{Pr_m}$$

$$\varphi_m = \begin{pmatrix} 0.538 \\ 0.221 \\ 0.089 \\ 0.036 \\ 0.014 \\ 0.011 \\ 4.144 \times 10^{-3} \\ 4.351 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Рис. 2.23. Расчет толщины потери энthalпии при различных числах Pr

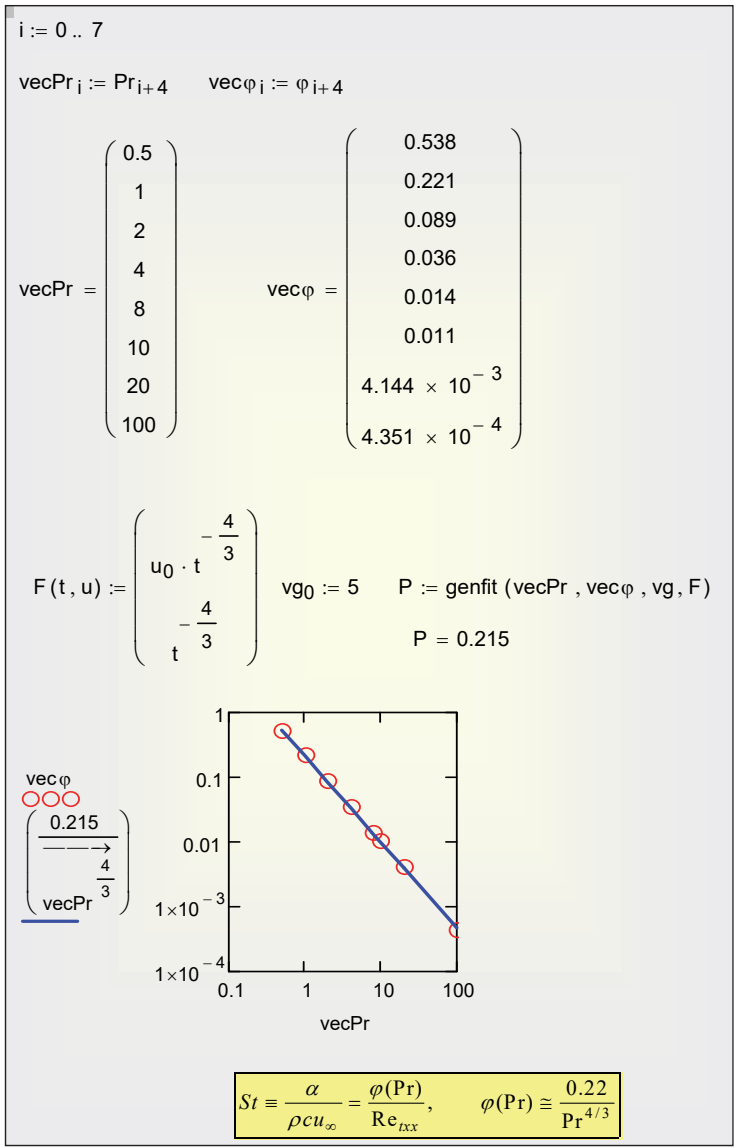


Рис. 2.24. Аппроксимация зависимости от Pr степенной функцией

Основной результат будет следующим:

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c u_\infty} = \frac{\varphi(\text{Pr})}{\text{Re}_{\text{txx}}}, \quad \varphi(\text{Pr}) \equiv \frac{0.22}{\text{Pr}^{4/3}}. \quad (2.50)$$

Аппроксимация $\phi(\text{Pr})$ пригодна для газов и жидких неметаллических теплоносителей.

В рамках *интегрального метода* (гл. 3 и 4) соотношение (2.50) для числа Стантона St носит название *стандартного закона теплообмена* при ламинарном режиме течения. Мы получили его при расчете теплообмена на продольно обтекаемой изотермической пластине. Расчеты и эксперименты показывают, что с удовлетворительной точностью этот закон описывает *локальную* теплоотдачу также и для *неизотермических* поверхностей с *переменной* скоростью внешнего потока.

Определенная универсальность соотношения (2.50) объясняется его структурой: это связь между *локальными* значениями толщины теплового пограничного слоя и коэффициента теплоотдачи. Предполагается, что предыстория развития тонкого пограничного слоя несущественна, а важна только локальная толщина пограничного слоя. Фактором, который может существенно изменить структуру пограничного слоя и повлиять на формулировки законов трения и теплообмена (вида (2.50)), является проницаемость обтекаемой поверхности. Корректирующий фактор к стандартному закону теплообмена вводят следующим образом:

$$\Psi \equiv \left(\frac{St}{St_0} \right)_{\text{Re}_{T^{**}}},$$

т.е. сопоставляют стандартную (индекс «0», (2.50)) и измененную ситуацию при *фиксированном* значении числа $\text{Re}_{T^{**}}$, т.е. фиксированном значении характерной толщины пограничного слоя. Располагая численными решениями уравнений (2.1), (2.2) пограничного слоя, вычисления Ψ -коррекции проводят по формулам:

$$\Psi \equiv \left(\frac{St}{St_0} \right)_{\text{Re}_{T^{**}}} = \frac{\left(\frac{g'_w \delta_{t_{xx},rel}}{\text{Pr} \text{Re}_{t_{xx}}} \right) \Big|_{\text{Re}_{t_{xx}}=\text{idem}, \text{Pr}=1}}{\left(\frac{0,22}{\text{Pr}^{4/3} \text{Re}_{t_{xx}}} \right) \Big|_{\text{Re}_{t_{xx}}=\text{idem}, \text{Pr}=1}} = \frac{g'_w \cdot \delta_{t_{xx},rel}}{0,22}; \quad (2.51)$$

$$\delta_{t_{xx},rel} = \int_0^{\infty} U(\eta)(1-g(\eta))d\eta$$

(см. также соотношения (2.47)–(2.50)).

Следует обратить внимание на то, что сопоставление производится при фиксированном значении толщины потери энthalпии (или импульса, см. также (2.22)). Поэтому Ψ -коррекция учитывает *структурные* изменения в пограничном слое, т.е. характерную деформацию профилей скорости и температуры под воздействием управляющих параметров.

2.6. Управление пограничным слоем

Представленные выше картины поля течения (рис. 2.5–2.11) наглядно показывают, как радикально меняется структура потока в пограничном слое при вариациях параметра вдува f_w .

Компактная вычислительная Mathcad – программа (рис. 2.25) предоставляет оперативный инструмент управления течением вдоль пластины.

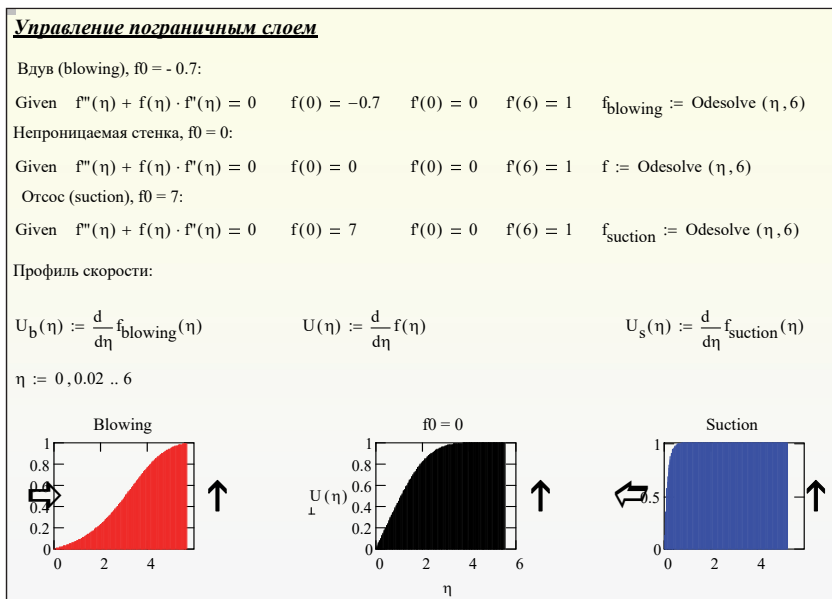


Рис. 2.25. Управление пограничным слоем при продольном обтекании пластины (левая вертикальная ось – проницаемая стенка, поток движется вверх)

При $f_w = 0$ (f_w обозначено на рисунке как f_0) получается стандартное обтекание непроницаемой стенки, а при положительных значениях – картина течений с отсосом. Заметим, что в аэродинамике отсос используется для предотвращения опасного явления отрыва пограничного слоя при обтекании крыла с большими углами атаки, как при посадке самолета.

В теплообменных установках задачи с отсосом возникают при интенсивной конденсации паров.

При заданном в одном из примеров *большом отрицательном* значении параметра вдува $f_w = -0.7$ имеет место явление *оттеснения* пограничного слоя. Такие режимы со вдувом теплоносителя через стенку используются для защиты поверхностей от воздействия высокотемпературного потока газа или для защиты от химически агрессивных сред.

Интересные эффекты можно наблюдать при совместном влиянии параметров ускорения β и проницаемости f_w . Варьируя эти два параметра, инженер-проектировщик может осуществлять целевое управление пограничным слоем, например, применяя отсос, чтобы предотвратить отрыв при течении против давления.

Решения уравнения Фолкнера – Скэн и аналогичного по структуре уравнения для теплового пограничного слоя выявляют основные закономерности трения и теплообмена, показывая, какую роль в этих процессах играют физические свойства жидкости, размеры обтекаемой поверхности, скорость течения.

Результаты решения, представленные в форме законов трения, теплообмена и массообмена с введением корректирующего фактора Ψ (например, рис. 2.26), используются в рамках приближенного *интегрального метода*, ориентированного на инженерные приложения (гл. 3 и 4).

Построенная функциональная зависимость $\Psi(b)$ показывает (рис. 2.26), как сильно меняется интенсивность переноса (трение и тепломассообмен) при вдуве/отсосе.

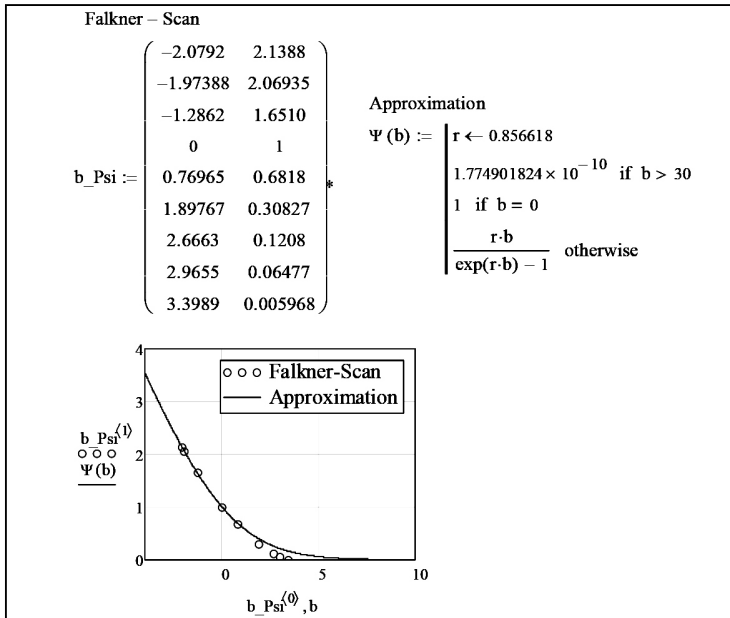


Рис. 2.26. Корректирующий фактор для трения и теплообмена на проницаемой поверхности (по результатам расчетов в данной главе)

Характерные совместные распределения *скоростей и температур* в ламинарных пограничных слоях при различных управляющих воздействиях сопоставлены далее на рис. 2.27–2.31. Расчеты проведены при единичном значении числа Прандтля ($Pr = 1$). Диаграммы вверху на рисунках построены в обобщенных координатах, нижние – в физических координатах (x, y). Горизонтальная ось на всех графиках совпадает с обтекаемой поверхностью.

В левом верхнем квадранте показано распределение скорости (маркированная кривая) и ее поперечного градиента (пропорционального напряжению вязкого трения) в зависимости от безразмерного расстояния от стенки (вертикальная ось η). В правом верхнем квадранте построено распределение температуры (маркированная кривая) и поперечного градиента температуры, пропорционального плотности теплового потока. Внизу слева пред-

ставлено векторное поле скорости, справа – распределение температуры. На двух нижних рисунках координата x расположена вдоль обтекаемой поверхности, а y – по нормали к ней (картинки построены для относительно небольшого значения числа Рейнольдса (100), чтобы сделать распределения по толщине пограничного слоя более наглядными).

Эталонном для сравнения служит обтекание плоской непроницаемой поверхности (рис. 2.27). Две верхние диаграммы демонстрируют аналогию трения и теплообмена – полное совпадение полей скорости и температуры.

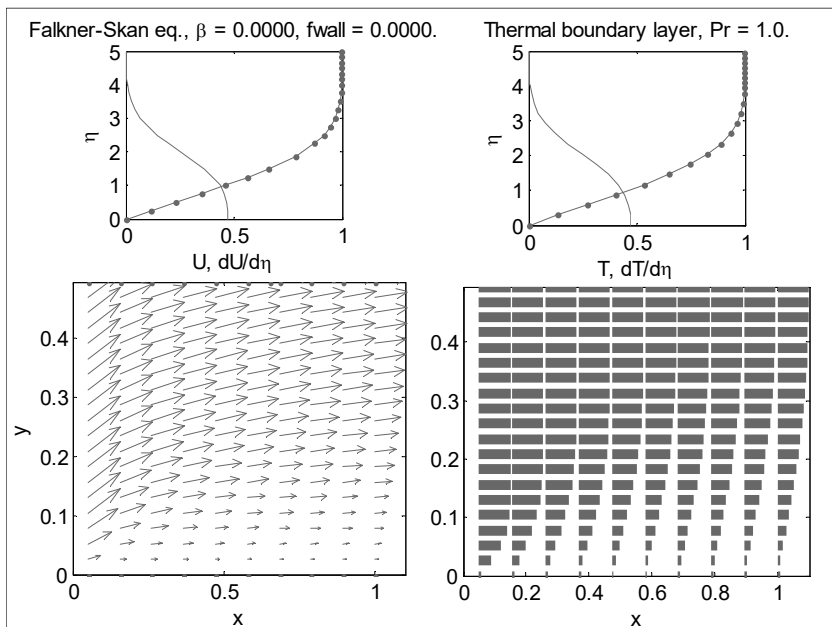


Рис. 2.27. Обтекание плоской непроницаемой поверхности

Числовые параметры исходного режима следующие:

$$\beta = 0; \quad f_w = 0$$

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 1; \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_T \equiv \frac{\text{St}}{\text{St}_0} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 1.$$

Далее представлен режим с сильным вдувом (рис. 2.28):

$$\beta = 0; \quad f_w = -0,6$$

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 0,3083; \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_T \equiv \frac{\text{St}}{\text{St}_0} \Big|_{\text{Re}_{T**} = \text{idem}} = 0,3083.$$

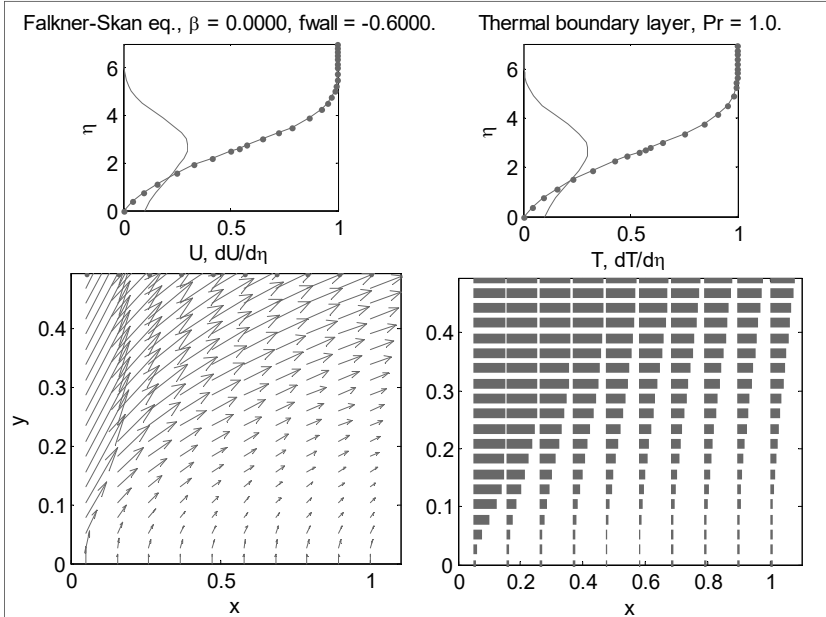


Рис. 2.28. Пограничный слой со вдувом

В непосредственной близости от стенки вектор скорости направлен практически вертикально, и только на некотором удалении от нее развивается продольное течение со сдвигом. Ψ -коррекция указывает на сильное уменьшение интенсивности трения и теплообмена. Видно, что сохраняется аналогия между трением и теплообменом.

На рисунке 2.29 представлен режим с сильным отсосом:

$$\beta = 0; \quad f_w = 1$$

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 1,6510; \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_T \equiv \frac{\text{St}}{\text{St}_0} \Big|_{\text{Re}_{T**} = \text{idem}} = 1,6510.$$

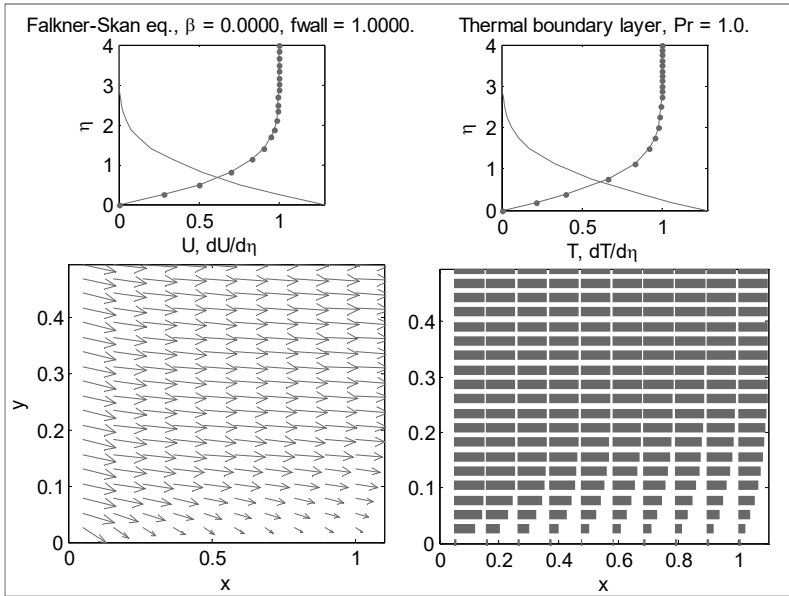


Рис. 2.29. Пограничный слой с отсосом

Пограничный слой прижимается к стенке. Ψ -коррекция указывает на сильное увеличение интенсивности трения и теплообмена. Видно, что сохраняется аналогия между трением и теплообменом. Для потоков с отсосом характерно увеличение устойчивости к внешним возмущениям течения, возможен даже эффект ламинаризации турбулентного течения.

На рисунке 2.30 детально представлен режим трения и теплообмена при интенсивном торможении потока ($\beta = -0,1985$), когда пограничный слой заметно оттесняется от стенки вследствие обратного действия давления.

Напомним, что при *стандартных* условиях (непроницаемая стенка, нулевой градиент давления) гидродинамическая и тепловая картины были подобны друг другу (рис. 2.27). Однако теперь – при сильном торможении потока – мы констатируем существенное различие *гидродинамической* и *тепловой* картин. Распределение скорости (левый верхний график) приобретает характерный «S»-образный вид с точкой перегиба на профиле; напряжение вязкого трения (немаркированная линия на графике) *стремится к нулю* на стенке. Это радикально отличается от стандартной картины обте-

кания с постоянной скоростью и давлением во внешнем потоке (рис. 2.27, 2.3, 2.5).

В то же время тепловая картина остается *качественно* неизменной. По-прежнему тепловой поток (правый верхний график, немаркированная линия) достигает максимального значения непосредственно на стенке. Эпюра температур сохраняет структуру с практически линейным распределением у стенки.

Эти различия выражаются количественно значениями корректирующего фактора Ψ соответственно для гидродинамической (2.22) и тепловой (2.51) задач:

$$\beta = -0,1985; \quad f_w = 0$$

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 0,0421 \ll 1; \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_T \equiv \frac{\text{St}}{\text{St}_0} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 0,5059 < 1.$$

Видно, что сопротивление трения на обтекаемой поверхности практически заблокировано, в то время как теплоотдача остается значительной, хотя и сниженной эффектом обратного давления.

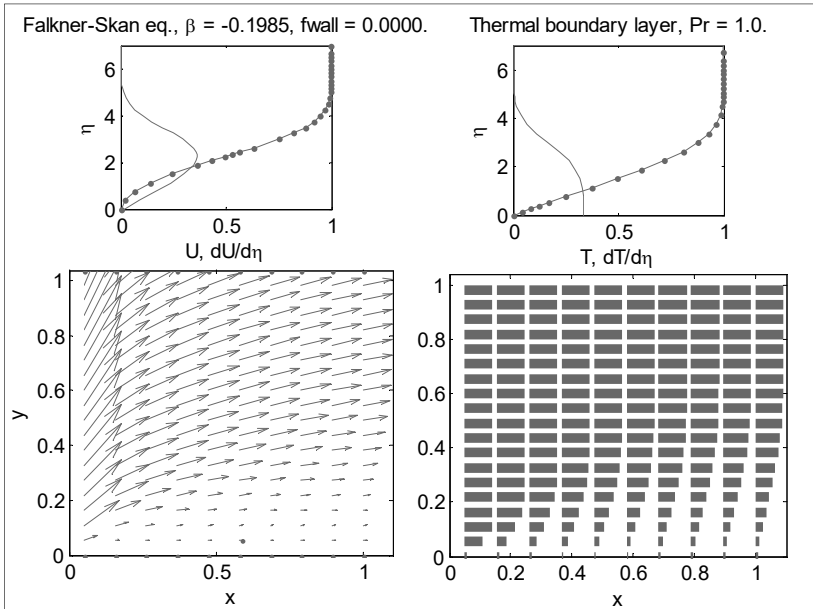


Рис. 2.30. Пограничный слой при торможении внешнего потока

Противоположный пример представлен на рис. 2.31. Это течение в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра при сильном вдуве – т.е. при одновременном воздействии ускорения потока и вдува. Теперь радикально изменилась структура теплового пограничного слоя (два правых рисунка). Профиль температур приобретает характерную S-образную форму. Тепловой поток на стенке практически блокирован вследствие сильного вдува, несмотря на *ускоренное* течение во внешнем потоке.

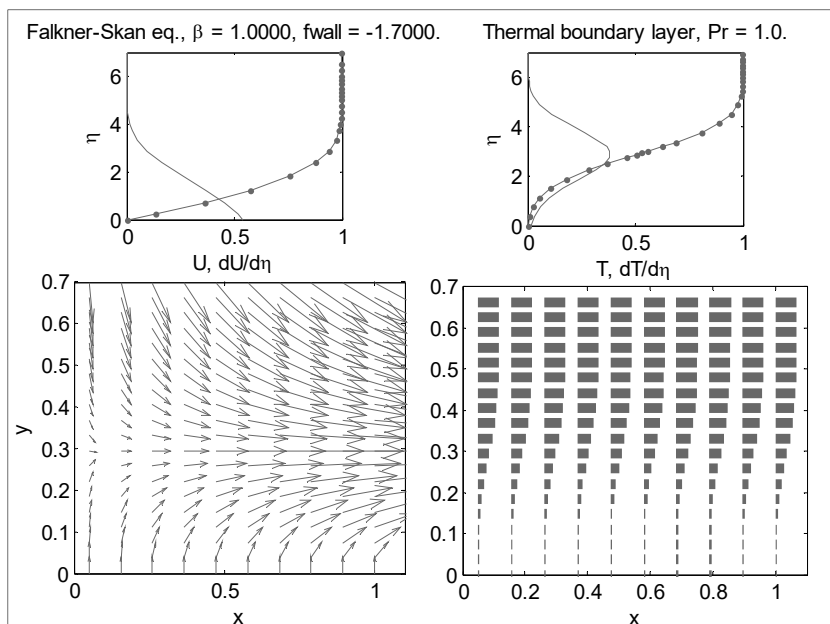


Рис. 2.31. Гидродинамика и теплообмен в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра со вдувом

В то же время, *несмотря* на сильный вдув, трение на стенке остается конечной величиной (левые рисунки), *благодаря* ускорению потока. Следовательно, в *гидродинамической задаче* два сильных противоположных по эффекту управляющих воздействия примерно компенсируются, в то время как в *тепловой задаче* влияние вдува оказывается предопределяющим, а влияние ускорения – весьма слабым.

Эти нарушения аналогии между теплообменом и трением выражаются количественно:

$$\beta = 1; \quad f_w = -1,700$$

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 1,2494; \quad \Leftrightarrow \quad \Psi_T \equiv \frac{\text{St}}{\text{St}_0} \Big|_{\text{Re}_{**} = \text{idem}} = 0,1313,$$

где Ψ и Ψ_T – соответственно корректирующие факторы для гидродинамической задачи (2.22) и для тепловой задачи (2.51).

Таким образом, теплообмен *относительно слабо* зависит от изменения давления во внешнем потоке, в отличие от гидродинамического сопротивления. В рамках приближенного интегрального метода решения задач пограничного слоя, при построении оперативных инженерных методов расчета обнаруженный выше эффект обобщают и говорят о *консервативности* (независимости) теплообмена по отношению к градиентам давления во внешнем потоке. (В действительности, эта зависимость имеет место и для теплообмена, но проявляется заметно слабее, чем для гидродинамического сопротивления).

2.7. Интегрирование уравнений свободноконвективных пограничных слоев. Асимптотика малых и больших чисел Прандтля

Общее описание свободной конвекции у вертикальной стенки (рис. 2.32), механизм и элементарные оценки теплоотдачи приведены выше в гл. 1.

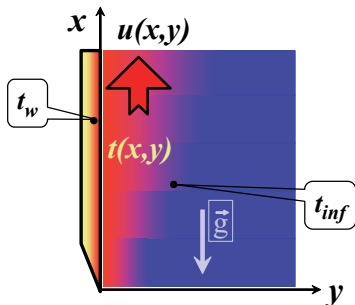


Рис. 2.32. Гидродинамический и тепловой пограничные слои при свободной конвекции

Далее получены точные (численные) решения этой задачи методом автомодельных переменных, как это было сделано ранее для пограничных слоев при вынужденном течении.

Дифференциальные уравнения

Запишем систему дифференциальных уравнений в частных производных для ламинарного свободно-конвективного пограничного слоя:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.52)$$

Уравнение движения, включающее выталкивающую Архимедову силу:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(t - t_\infty). \quad (2.53)$$

Уравнение энергии:

$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}; \quad a \equiv \frac{\lambda}{\rho c}. \quad (2.54)$$

Граничные условия ставятся на непроницаемой стенке и на значительном удалении от нее:

$$\begin{aligned} u(x, y = 0) &= 0; & v(x, y = 0) &= 0; \\ u(x, y = \infty) &= 0; \\ t(x, y = 0) &= t_w; \\ t(x, y = \infty) &= t_\infty. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Первые два – это условие прилипания и условие непроницаемости стенки. Третье указывает на неподвижность жидкости вдали от стенки. Четвертое и пятое – задают температуры на стенке и вдали от нее, соответственно.

Автомодельные переменные

Идея перехода от математического описания с уравнениями в частных производных к обыкновенным дифференциальным производным такая же, как и для задачи о пограничном слое при вынужденном течении. Преобразования начинаются с введения функции тока,

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x};$$

$$d\Psi = u \, dy \quad \text{при } x = \text{const}, \quad \Psi = \int_0^y u \, dy,$$

автоматически удовлетворяющей уравнению неразрывности (2.52). Автомодельную переменную формируют как и ранее,

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)},$$

но с другой оценкой толщины пограничного слоя (см. гл. 1 формулы (1.31)).

В результате получается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

- Уравнение для безразмерной функции тока f , включающее выталкивающую силу, пропорциональную местной избыточной температуре g

$$f''' + 3f f'' - 2f'^2 + g = 0. \quad (2.56)$$

- Уравнение для безразмерной избыточной температуры с числом Pr в качестве параметра

$$g''(\eta) + 3Pr \cdot f(\eta) \cdot g'(\eta) = 0. \quad (2.57)$$

- Граничные условия на стенке и вдали от нее:

$$\begin{aligned} \eta = 0; \quad f(0) = f_w; \quad f'(0) = 0; \\ \eta \rightarrow \infty; \quad f'(\infty) \rightarrow 1; \\ g(0) = 1 \quad g(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Значение функции тока на стенке f_w есть параметр проницаемости. В основной серии расчетов эта величина равна нулю, $f_w = 0$, так же как поперечная составляющая скорости на стенке.

Связь между физическими и автомодельными переменными задается уравнениями:

$$\text{Gr}_x \equiv \frac{g\beta \Delta t x^3}{\nu^2}; \quad \eta \equiv \frac{y}{x \left(\frac{4}{\text{Gr}_x} \right)^{1/4}}; \quad (2.59)$$

$$U \equiv \frac{u x}{\nu} \frac{1}{2\sqrt{\text{Gr}_x}} = f'(\eta); \quad \frac{t(x, y) - t_{\text{inf}}}{t_w - t_{\text{inf}}} \equiv g(\eta); \quad (2.60)$$

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha_x x}{\lambda} \equiv \frac{-\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=+0}}{t_w - t_{\text{inf}}} \frac{x}{\lambda} = \frac{-g'(0)}{\sqrt{2}} \text{Gr}_x^{1/4} \equiv F(\text{Pr}) \text{Gr}_x^{1/4}. \quad (2.61)$$

Формула (2.61) позволит рассчитывать локальную теплоотдачу при ламинарной свободной конвекции, после того как будет определена функция $F(\text{Pr})$.

Численное интегрирование. Поля скорости и температуры

Для численного интегрирования систему (2.56), (2.57) преобразуют в систему уравнений *первого* порядка посредством следующих замен:

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f_0; & f' &\equiv f_0' = f_1; & f'' &\equiv (f_1)' = f_2; & f''' &\rightarrow f_2'; \\ g &\rightarrow f_3; & g' &\equiv f_3' = f_4; & g'' &\rightarrow f_4'. \end{aligned} \quad (2.62)$$

В результате получают:

$$\begin{aligned} f_0' &= f_1 \\ f_1' &= f_2 \\ f_2' &= -3f_0 f_2 + 2f_1^2 - f_3 \\ f_3' &= f_4 \\ f_4' &= -3\text{Pr} f_0 f_4. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Краевые условия к этой системе пятого порядка также ставятся на обеих границах области интегрирования, как и для двухточечной задачи. Чтобы лучше ориентироваться в физическом содержании математических формулировок, напомним, что искомые функции представляют собой, в некотором масштабе:

- f_0 – функцию тока, нуль на непроницаемой стенке;
- f_1 – продольную скорость, нулевую на стенке и на бесконечности;
- f_2 – напряжение трения, неизвестную величину на стенке;
- f_3 – температуру, заданную на стенке и на удалении от нее;
- f_4 – градиент температуры, неизвестную величину на стенке.

Итак, имеется информация о функции тока, скорости и температуре на левом конце интервала интегрирования, а также о скорости и температуре – на правом:

$$\begin{aligned}
 f_0(0) &= 0 \\
 f_1(0) &= 0 & f_1(\infty) &= 0 \\
 f_2(0) &= ??? \\
 f_3(0) &= 1 & f_3(\infty) &= 0 \\
 f_4(0) &= ???
 \end{aligned}$$

Знаками ??? отмечены недостающие начальные условия.

В численном анализе имеются эффективные, оформленные в виде стандартных процедур алгоритмы решения *начальных* задач, когда все условия ставятся на одном конце интервала интегрирования. Хуже обстоит дело с двухточечными задачами. Мы воспользуемся имеющимся в Mathcad методом sbval (рис. 2.33), позволяющим сначала определить недостающие условия в начальной точке, а затем провести интегрирование получившейся начальной задачи обычным методом (рис. 2.34).

Pr := 1

$\eta_w := 0$ $\eta_{inf} := 5$ $v := \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ $\leftarrow \begin{pmatrix} f''(0) \\ g'(0) \end{pmatrix}$

$D(\eta, f) := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ -3 \cdot f_0 \cdot f_2 + 2 \cdot (f_1)^2 - f_3 \\ f_4 \\ -3 \cdot Pr \cdot f_0 \cdot f_4 \end{pmatrix}$

$SetInit(\eta_w, v) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \\ 1 \\ v_1 \end{pmatrix}$ $residual(\eta_{inf}, f) := \begin{pmatrix} f_1 - 0 \\ f_3 - 0 \end{pmatrix}$

$MissingInitCond := sbval(v, \eta_w, \eta_{inf}, D, SetInit, residual)$

Рис. 2.33. Метод sbval решения двухточечной краевой задачи для свободно конвективного пограничного слоя

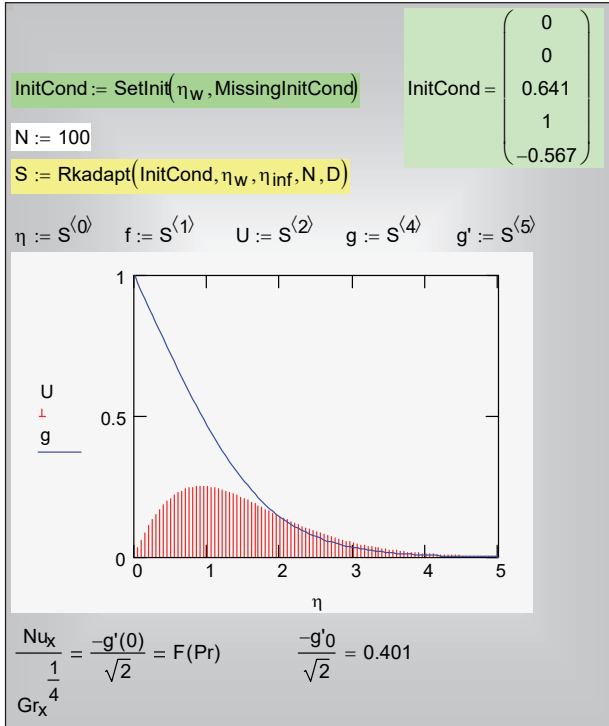


Рис. 2.34. Распределения скорости и температуры

Mathcad-программу для проведения численных экспериментов со свободной конвекцией можно вызвать по ссылке [51].

Расчет коэффициента теплоотдачи. Критериальное уравнение теплоотдачи

Краевая задача многократно решалась при различных значениях числа Прандтля в интервале 0,01÷100. Вычисления производились таким образом, чтобы обеспечить точность в определении градиента температуры на поверхности $g'(0)$, соответствующую трем правильным значащим цифрам (см. столбец с номером 2, рис. 2.35).

Значение правого предела интегрирования η_{inf} в вариантных расчетах увеличивалось до тех пор, пока не переставали изменяться первые три значащие цифры отыскиваемой величины $g'(0)$.

Prmtrs:=

	0	1	2	3
0	"Pr"	"eta_inf"	"g'(0)"	"f'(0)"
1	0.01	41	-0.0807	0.9873
2	0.02	30	-0.1117	0.9588
3	0.05	30	-0.1697	0.9082
4	0.1	20	-0.2301	0.8591
5	0.5	10	-0.441	0.713
6	1	6	-0.567	0.642
7	2	5	-0.716	0.571
8	5	6	-0.954	0.482
9	10	6	-1.169	0.419
10	20	6	-1.42	0.362
11	50	6	-1.82	0.294
12	100	4	-2.181	0.25

Рис. 2.35. Результат решения: градиенты температуры и скорости на стенке в зависимости от числа Pr

Универсальная аппроксимация коэффициента F в критериальной формуле для теплоотдачи (рис. 2.36) определялась по методу интерполяции между следующими асимптотами

$$\begin{aligned}
 F(\text{Pr} \rightarrow 0) &\cong 0,6004\text{Pr}^{1/2} \\
 F(\text{Pr} \rightarrow \infty) &\cong 0,5027\text{Pr}^{1/4},
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

взятыми из книги В.Гебхарта и др [55].

Показатель степени 2,265 подобран так, чтобы обеспечить точное соответствие аппроксимации и прямого результата для теплоотдачи при $\text{Pr} = 1$.

При этом обеспечивается хорошая аппроксимация во всем диапазоне чисел Прандтля, с выходом на асимптотические зависимости при больших и малых числах Прандтля (рис. 2.36).

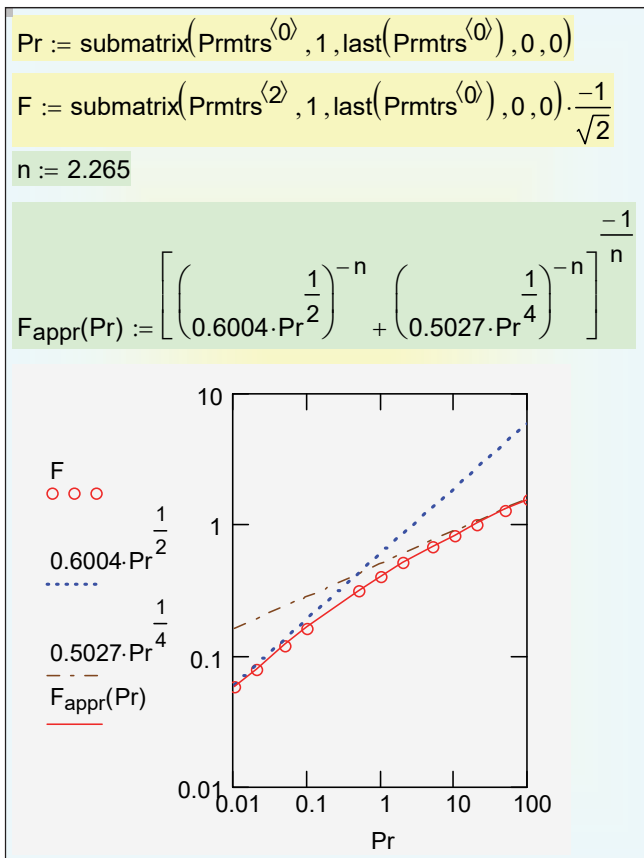


Рис. 2.36. Интерполяция между асимптотами для функции $F(Pr)$

Таким образом, для расчета теплоотдачи при ламинарной свободной конвекции на вертикальной изотермической поверхности теория дает следующую формулу:

$$\begin{aligned}
 Nu_x &= F(Pr) Gr_x^{1/4} \\
 n &= 2,265 \\
 F(Pr) &= \left[\left(0,6004 Pr^{1/2} \right)^{-n} + \left(0,5027 Pr^{1/4} \right)^{-n} \right]^{-1/n}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Это главный практически важный результат теоретического анализа свободно-конвективного ламинарного пограничного слоя.

Структура пограничных слоев для жидкостей с различными свойствами

Теперь мы сопоставим картины течения и распределения температуры в свободно-конвективных пограничных слоях для сильно различающихся по свойствам теплоносителей:

- жидких металлов;
- газов;
- вязких органических жидкостей.

Предварительно коротко коснемся частного, неважного на практике вопроса техники вычислений. Выше были проведены вариантыные расчеты при разных числах Прандтля, и большие по объему результаты численного анализа были сохранены для дальнейшего использования благодаря небольшому программному фрагменту на рис. 2.37. Сначала формируется название файла, в котором будут храниться данные, посредством встроенных функций `concat` (объединение строк) и `num2str` (превращение числа в строку). Теперь в файловой системе легко распознать файл, хранящий данные по свободной конвекции при $Pr = 1$. Далее функция `WRITEPRN` запишет данные на диск. Последняя строка показывает, как прочитать с диска ранее записанный файл с помощью встроенной функции `READPRN`.

```
FileResult := concat("FreeConv_Pr=" , num2str(Pr) , ".prn")
FileResult = "FreeConv_Pr=1.prn"
WRITEPRN(FileResult) :=  $\begin{pmatrix} Pr \\ S \end{pmatrix}$ 
 $\begin{pmatrix} Pr\_File \\ S\_File \end{pmatrix} := READPRN (FileResult)$                        $\begin{pmatrix} Pr\_File \\ S\_File \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \{101,6\} \end{pmatrix}$ 
```

Рис. 2.37. Сохранение результатов и их использование в Mathcad

Описанным способом были собраны вместе результаты расчета полей скорости и температуры для разных жидкостей. Сопоставим теперь графически структуру пограничных слоев для жидкостей с разными числами Прандтля (рис. 2.38).

При $Pr = 1$ толщины теплового и динамического слоев совпадают, так же как для вынужденного течения.

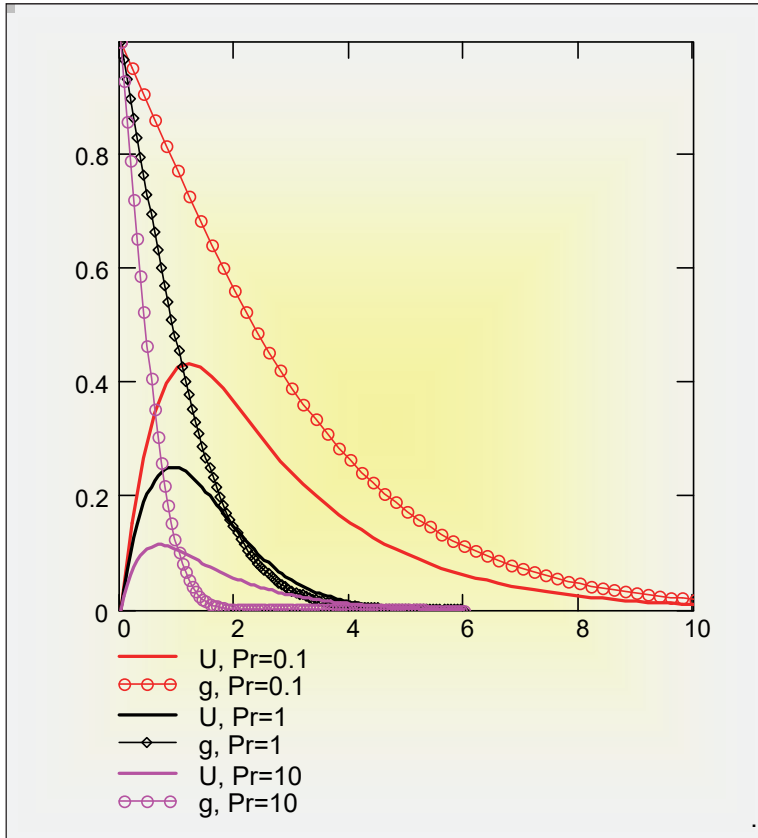


Рис. 2.38. Распределения скорости и температуры для жидких металлов, газов и вязких органических теплоносителей

При $Pr = 10$ ($Pr \gg 1$, вязкие низкотеплопроводные жидкости, такие как масла) толщина теплового слоя существенно меньше, чем динамического – тепловой слой глубоко погружен в гидродинамический. Архимедова сила, сосредоточенная в пределах теплового (нагретого) слоя, приводит в движение горячий пристенный слой. Холодная жидкость во внешней изотермической области «подхватывается» силой вязкого трения со стороны поднимающихся вверх горячих пристенных слоев. Чтобы сделать это обсуждение еще более наглядным, покажем картину течения при еще большем значении числа Прандтля, $Pr = 100$ (рис. 2.39). Вид-

но, что все изменение температуры практически закончилось вблизи стенки в слое, где скорость только еще достигает максимального значения.

При $Pr = 0,1$ ($Pr \ll 1$, маловязкие высокотеплопроводные жидкости, такие как жидкие металлы) толщины теплового и гидродинамического слоев практически совпадают, т.е. ситуация остается такой же как и для газов при $Pr = 1$. Движение возникает там, где действуют Архимедовы силы, и не распространяется на внешнюю (холодную) область, поскольку вязкие силы относительно малы. Эта картина резко отличается от структуры пограничных слоев в жидких металлах при *вынужденном* течении, когда гидродинамический слой становится очень тонким по сравнению с тепловым.

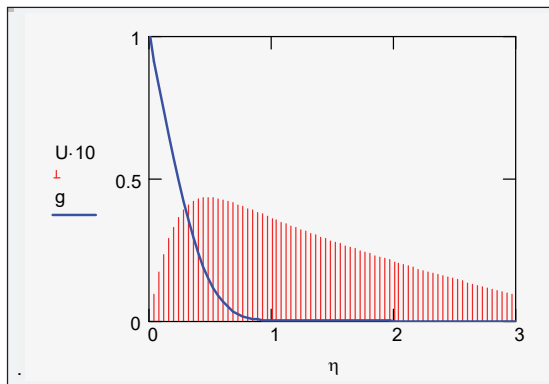


Рис. 2.39. Свободная конвекция в жидкости с большим числом Прандтля, $Pr = 100$

Свободная конвекция на проницаемой стенке

Если через пористую стенку вдувается или отсасывается газ, или на поверхности происходит испарение или конденсация, то поперечная составляющая скорости на самой стенке уже не будет равна нулю. Соответственно, значение безразмерной функции тока $f(0)$ (или f_w в другом обозначении) будет ненулевым. Автомодельная задача для изотермической стенки получается в случае специального распределения вдува или отсоса по закону $x^{-1/4}$. Значения параметра вдува на стенке будет отрицательным при вдуве, $f(0) < 0$, и положительным при отсосе, $f(0) > 0$.

Таким образом, необходимо решить систему уравнений свободно-конвективного пограничного слоя (2.63) при краевых условиях:

$$\begin{aligned}
 f_0(0) &= f_w \\
 f_1(0) &= 0 & f_1(\infty) &= 0 \\
 f_2(0) &= ??? \\
 f_3(0) &= 1 & f_3(\infty) &= 0, \\
 f_4(0) &= ???
 \end{aligned}$$

где f_w – ненулевое значение параметра проницаемости.

Результаты решения двухточечной краевой задачи при $Pr = 1$ и различных значениях параметра вдува представлены в таблице (рис. 2.40).

Задаваемые значения параметра вдува $f(0)$ размещены в столбце 5 и изменяются от нуля (непроницаемая стенка) до -1 . Видно, что градиент температуры на стенке уменьшается практически до нуля.

Это значит, что тепловой поток и коэффициент теплоотдачи становятся нулевыми. Уменьшение трения на стенке (величина $f''(0)$, столбец 3) также значительно, но только примерно в два раза, а не на порядки.

Pmtrs :=				
	2	3	4	
0	"g'(0)"	"f'(0)"	"f(0)"	"f(0)"
1	-0.002	0.3275	0	-1
2	-0.0118	0.3946	0	-0.8
3	-0.0465	0.474	0	-0.6
4	-0.1341	0.5536	0	-0.4
5	-0.3022	0.6153	0	-0.2
6	-0.567	0.642	0	0

Рис. 2.40. Градиенты температуры $g'(0)$ и скорости $f''(0)$ на стенке при различных значениях параметра вдува $f(0)$

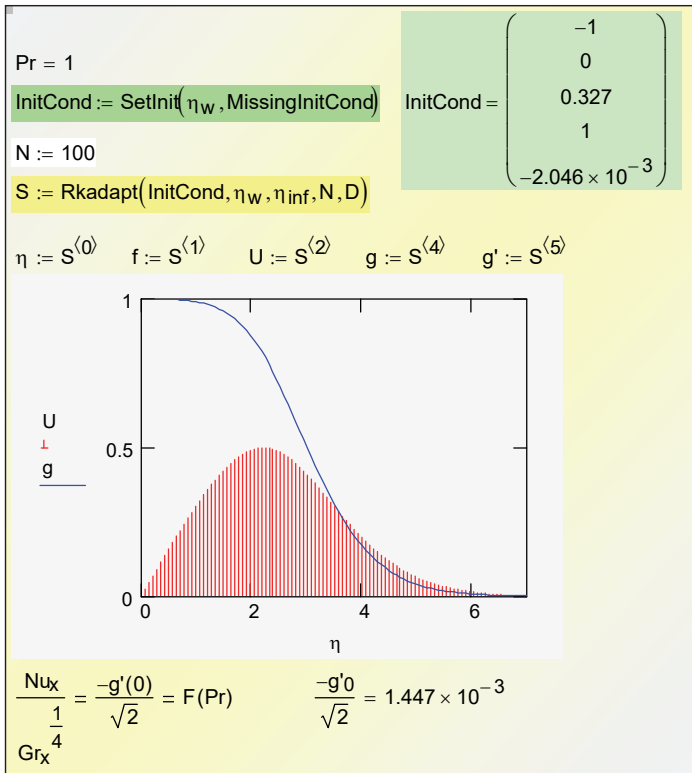


Рис. 2.41. Интегрирование уравнений свободно-конвективного пограничного слоя при большом значении параметра вдува: $f(0) = -1$

Процедура решения двухточечной краевой задачи не отличается от примененной выше (рис. 2.33, 2.34). На втором этапе (т.е. при интегрировании с доопределенными начальными данными) получается распределение скорости и температуры (рис. 2.41). На графике отчетливо видно, что при сильном вдуве *градиент температуры* на стенке обращается в ноль, т.е. *коэффициент теплоотдачи становится нулевым* (см. также числовые данные в нижней части рисунка).

Расчеты для случая отсоса можно провести аналогично посредством ранее приведенных Mathcad-программ.

Решение задач со вдувом и отсосом создает основы управления пограничным слоем, т.е. целенаправленных внешних воз-

действий с целью уменьшить или увеличить интенсивность теплообмена, защитить поверхность от высокотемпературных или агрессивных сред и т.п.

В заключение приведем ссылку на анимацию развивающегося процесса свободной конвекции после включения цилиндрического нагревателя (численное решение двухмерной задачи) [51].

Заключение

Идея разделить поток маловязкой жидкости (более строго, поток при больших числах Re) на две области – внешнее идеальное течение и вязкий пограничный слой – принадлежит Л.Прандтлю. В прикладной математике эта идея положила начало *асимптотическому методу особых возмущений*, а в прикладном аспекте – сделала возможными инженерные расчеты обтекания различных профилей, например, крыльев в авиации, и объяснила причину авиационных катастроф, связанных с превышением допустимого угла атаки, срывом потока и резким падением подъемной силы.

Применению прандтлевской теории пограничного слоя в теории теплообмена посвящена данная глава. Полезно еще раз просмотреть картины деформации гидродинамических и температурных полей под действием градиента давления и поперечного потока (вдува/отсоса) на рис. 2.27–2.31. Иллюстрируемая этими картинами возможность *управлять* трением и теплообменом открывает перспективу для поиска новых конструкторских решений и технологий в энергетике и теплотехнике.

Данная глава насыщена расчетами в инженерных математических пакетах Mathcad и Matlab. Это объективное отражение сложности теплообмена как научной и инженерной дисциплины, связанной с многообразным и изменчивым миром течений жидкостей и газов; овладение техникой вычислений принадлежит к профессиональным требованиям для специалистов в этой области. С другой стороны, вычисления остаются наглядными и подконтрольными пользователю, поскольку мы остаемся в рамках одномерных дифференциальных моделей с хорошо разработанным математическим обеспечением. Обращение к встроенному

интегратору для системы ОДУ (например, «Odesolve»), постановка краевых условий, визуализация результатов – это необходимый профессиональный минимум.

В последующих главах 3 и 4 рассматривается *интегральный метод* пограничного слоя. Посредством операции усреднения по толщине пограничного слоя, задача в частных производных (см. (2.6), (2.7)) опять сводится к интегрированию *обыкновенных* дифференциальных уравнений (ОДУ), но уже и за пределами сравнительно узкого круга автомодельных ламинарных течений. Интегральным методом рассмотрены модельные задачи о локальной теплопередаче при поперечном обтекании трубы в высокотемпературном теплообменнике, о горении частицы углерода в газовом потоке, о защите от высокотемпературных потоков.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения включает математическое описание процесса конвективного теплообмена в приближении пограничного слоя?
2. Представьте качественный анализ характеристик гидродинамического пограничного слоя.
3. Представьте качественный анализ характеристик теплового пограничного слоя.
4. Опишите преобразования подобия в уравнениях пограничного слоя. Какие переменные являются автомодельными?
5. Представьте решение уравнений пограничного слоя, уравнений Фолкнера-Скэн.
6. Как повлияет массообмена на характеристики гидродинамического и теплового пограничных слоев?
7. Каковы цели управления пограничным слоем?

Глава 3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

3.1. Локальная теплопередача при поперечном обтекании трубы

Когда высокотемпературный поток газа обтекает трубы пароперегревателя тепловой электрической станции или охлаждаемые лопатки газовых турбин, наиболее опасные температурные условия возникают в точках экстремума локального коэффициента теплоотдачи. Возможно, это будет передняя критическая точка потока (точка разветвления, точка торможения (рис. 3.1)), или локальная область в кормовой части поперечно обтекаемой трубы, где интенсивность теплоотдачи становится высокой при больших числах Рейнольдса благодаря вихреобразованию.

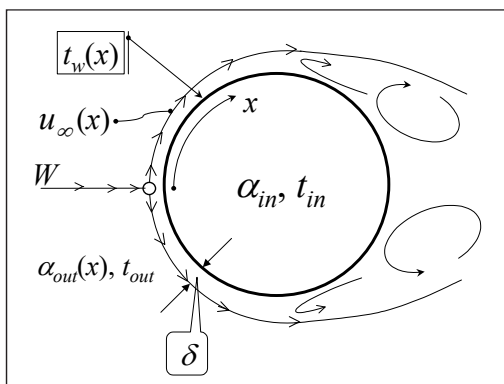


Рис. 3.1. Схема теплопередачи через стенку поперечно обтекаемой трубы

Как изменяется картина обтекания и теплоотдачи при увеличении скорости внешнего потока, можно увидеть, запустив видеоклип [51], отдельный кадр которого представлен на рис. 3.2.

Стрелками показаны векторы скорости, линиями – линии тока, цветом – температура (на видеоклипе труба горячая, а жидкость холодная).

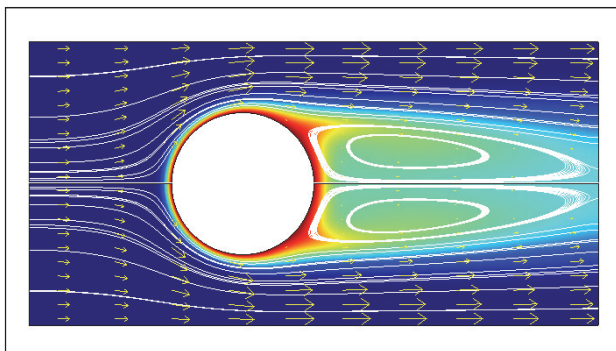


Рис. 3.2. Теплообмен и гидродинамика при поперечном обтекании цилиндра (малые числа Рейнольдса)

Анализ локальной теплопередачи является трудной проблемой, поскольку течение происходит в поле переменного давления, тепловые граничные условия на стенке могут отличаться от простых формулировок с постоянной температурой или постоянной плотностью теплового потока и т.п.

В инженерной расчетной практике для решения таких специальных задач – со сложными граничными условиями, внешними воздействиями (ускорением или замедлением потока, вдувом или отсосом через проницаемую стенку (гл. 4 и гл. 9)) – может быть эффективно применен метод *интегральных соотношений* пограничного слоя.

Математический аппарат интегрального метода – это интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Характерной чертой реальных инженерных задач такого рода является сложное представление *правых частей* дифференциальных уравнений. В рассмотренной далее задаче – это алгоритм, включающий решение нелинейных алгебраических уравнений, процедуры оптимизации и т.п. (п. 3.7).

3.2. Интегральное уравнение теплового пограничного слоя

Понятие пограничного слоя специально обсуждается в гл.2. При обтекании поверхностей потоками с большими числами Рейнольдса изменения скорости, температуры, концентрации сосредото-

точиваются в тонком – пограничном – слое вблизи стенки. Эти поперечные (по координате y) вариации будут очень резкими по сравнению с продольными (вдоль x) изменениями. В рассматриваемой здесь задаче тепловой пограничный слой формируется на внешней поверхности поперечно обтекаемой трубы, как показано на рис. 3.1.

Рассмотрим основные положения *интегрального метода* на примере теплового пограничного слоя.

Интегральное уравнение теплового пограничного слоя представляет собой формулировку закона сохранения энергии для специального контрольного объема, охватывающего всю толщину пограничного слоя и дифференциально малого в продольном направлении.

Вывод уравнения энергии основывается на модельном представлении теплового пограничного слоя (рис. 3.3.). Обтекаемая стенка показана как проницаемая, чтобы сделать постановку задачи достаточно общей. Например, пригодной также для анализа защиты поверхности от высокотемпературного потока посредством вдува (гл.4).

В левой части рисунка показано *действительное* распределение скорости и температуры в пограничном слое, а в правой – *модельное*, эквивалентное по теплосодержанию представление. Для определенности принимают, что вдоль поверхности движется горячая жидкость, отдающая теплоту холодной стенке.

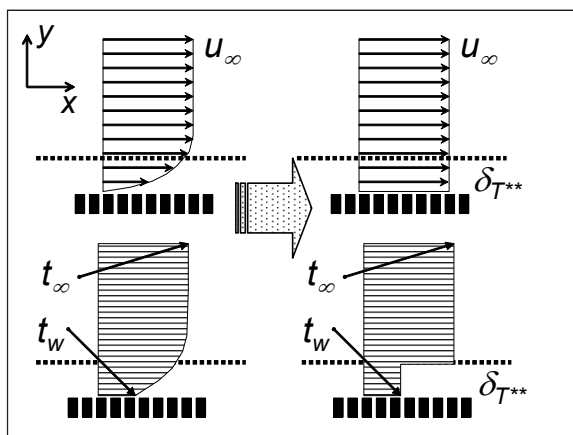


Рис. 3.3. Модельное представление теплового пограничного слоя

Считают, что в слое толщиной $\delta_{T^{**}}$ жидкость полностью остывает до температуры холодной стенки t_w ; одновременно принимают, что скорость жидкости остается равной скорости внешнего потока u_∞ вплоть до стенки. Тогда расход жидкости, полностью «потерявшей» избыточную по отношению к холодной стенке энтальпию, вычисляется как $(\rho u_\infty \delta_{T^{**}})$. Величина $\delta_{T^{**}}$ служит мерой толщины теплового пограничного слоя и называется *толщиной потери энтальпии*. Ее определение задается уравнением:

$$\int_0^{\infty} c_p (t_\infty - t(y)) \rho u(y) dy \equiv (\rho u_\infty \delta_{T^{**}}) c_p (t_\infty - t_w),$$

в левой части которого – точное выражение потери энтальпии потоком жидкости в пределах теплового пограничного слоя, а в правой – модельное представление этой величины. Таким образом, согласно определению

$$\delta_{T^{**}} = \frac{\int_0^{\infty} \rho c_p u(y) (t_\infty - t(y)) dy}{\rho u_\infty c_p (t_\infty - t_w)}. \quad (3.1)$$

(Заметим, что обозначение $\delta_{T^{xx}}$, встречающееся далее в текстах вычислительных программ, эквивалентно $\delta_{T^{**}}$).

После этих предварительных замечаний можно записать интегральное уравнение теплового пограничного слоя как тепловой баланс:

$$\frac{d}{dx} [\rho u_\infty \delta_{T^{**}} c_p (t_\infty - t_w)] = -q_w + j_w c_p (t_\infty - t_w), \quad (3.2)$$

согласно которому увеличение потери энтальпии (левая часть уравнения) при движении жидкости вдоль холодной стенки происходит вследствие:

- теплоотвода к стенке (первое слагаемое справа) и
- затрат на подогрев вдуваемого теплоносителя от t_w до t_∞ (второе слагаемое справа).

Такая формулировка закона сохранения справедлива для относительно медленных течений, когда можно пренебречь вкладом кинетической энергии в общий баланс, точно так же как и тепловой диссипации («разогревом») за счет вязкого трения).

Обозначения в правой части интегрального уравнения расшифровываются следующим образом:

- $(-q_w)$ – кондуктивный (обусловленный теплопроводностью) тепловой поток к стенке, пропорциональный градиенту температуры вблизи стенки (мнемонический индекс «w» (англ. wall – стенка):

$$q_w = -\lambda_{\text{fluid}} \left. \frac{\partial t_{\text{fluid}}}{\partial y} \right|_{y=0};$$

- j_w – плотность потока массы на проницаемой границе при вдуве через перфорированную стенку или при массопереносе на поверхности раздела.

Уравнение теплового пограничного слоя (3.2) содержит *две неизвестные величины*. Если в качестве граничного условия на стенке задается температура поверхности, то искомыми величинами являются толщина потери энthalпии $\delta_{T^{**}}$ и плотность теплового потока на стенке q_w . Если задана величина q_w , то отыскиваются $\delta_{T^{**}}$ и t_w . Необходимое дополнительное соотношение между двумя неизвестными величинами задается *законом теплообмена* (далее (3.4)).

При интегрировании уравнения (3.2) вдоль обтекаемой поверхности (вдоль x) должно быть поставлено начальное условие (условие (3.14)).

Необходимо сделать следующее замечание по поводу математической структуры уравнения (3.2). Строго говоря, оно – интегро-дифференциальное, поскольку стоящая под знаком дифференцирования величина $\delta_{T^{**}}$ является интегралом от *неизвестных* априори распределений скорости и температуры. Эффективность метода состоит в том, что удается установить простые алгебраические соотношения между интегральной характеристикой $\delta_{T^{**}}$ и плотностью теплового потока на стенке (соотношение (3.13)). Благодаря этому в рамках интегрального метода с уравнением (3.2) работают как с ОДУ первого порядка.

Вывод уравнения теплового пограничного слоя может быть более формальным и строгим, как это показано ниже.

Примем в качестве исходного соотношения уравнение энергии Том 1\гл.2 (2.9), записанное для стационарного потока однокомпонентной среды без внутренних источников:

$$0 = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) - \operatorname{div}(\rho v h) .$$

В двумерной постановке, с учетом обозначений (u, v) для продольной и поперечной проекций скорости:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) - \frac{\partial(\rho u h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v h)}{\partial y} .$$

Для пограничного слоя:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \ll \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q \approx q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} .$$

Центральным пунктом вывода является интегрирование по поперечной координате:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial(\rho u (h - h_{\infty}))}{\partial x} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial(\rho v (h - h_{\infty}))}{\partial y} dy = - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} q_y \right) dy .$$

Чтобы несобственные интегралы были сходящимися, для энтальпии h в качестве точки отсчета принята величина h_{∞} в потоке на удалении от стенки, так что $(h - h_{\infty})$ обращается в ноль на бесконечности. При преобразовании первого интеграла применяется правило дифференцирования по параметру (по x в нашем случае), второй и третий интегралы вычисляются непосредственно, как показано ниже:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial(\rho u (h - h_{\infty}))}{\partial x} dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial(\rho v (h - h_{\infty}))}{\partial y} dy &= - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial y} q_y \right) dy; \\ \Downarrow \\ \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u (h - h_{\infty}) dy + \int_{h=h_w}^{h=h_{\infty}} d(\rho v (h - h_{\infty})) &= - \int_{q_y=q_w}^{q_y=0} d(q_y). \end{aligned}$$

После интегрирования и перегруппировки получим:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\int_0^{\infty} \rho u (h_{\infty} - h) dy}_{\text{«Потеря энтальпии»}} = -q_w + \rho v_w (h_{\infty} - h_w) .$$

Физическое содержание этого уравнения пояснено в примечании к (3.2).

Далее вводится понятие толщины потери энтальпии $\delta_{T^{**}}$:

$$\int_0^{\infty} \rho u (h_{\infty} - h) dy \equiv \rho u_{\infty} \delta_{T^{**}} c_p (t_{\infty} - t_w)$$

и записывается интегральное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{d}{dx} [\rho u_{\infty} \delta_{T^{**}} c_p (t_{\infty} - t_w)] = -q_w + \rho v_w (h_{\infty} - h_w). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.3) и (3.2) идентичны, поскольку $\rho v_w \equiv j_w$, $\Delta h = c_p \Delta t$.

Интегральный метод можно рассматривать как способ приближенного интегрирования уравнений в *частных* производных посредством их редукции к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям.

3.3. Стандартный закон теплообмена

Стандартным законом теплообмена называют соотношение

$$St_0 = St_0(Re_{T^{**}}, Pr), \quad (3.4)$$

связывающее *локальное* число Рейнольдса, построенное по толщине потери энтальпии $\delta_{T^{**}}$ (3.1):

$$Re_{T^{**}} = \frac{u_{\infty} \delta_{T^{**}}}{\nu} \quad (3.5)$$

и *локальное* значение безразмерного комплекса, определяющего интенсивность переноса на поверхности раздела:

$$St_0 \equiv \frac{q_w / (t_w - t_{\infty})}{\rho u_{\infty} c_p}. \quad (3.6)$$

Индекс «0» означает, что соотношение (3.4) установлено (теоретически и/или экспериментально) для классической задачи конвективного теплообмена при *стандартных* граничных условиях, а именно, для задачи обтекания *безградиентным* внешним потоком *непроницаемой* пластины с заданными *постоянными* значениями температуры на ее поверхности.

Число Стантона (определение (3.6)) интерпретируется следующим образом. В числителе записано отношение потока переносимой величины к движущей силе переноса, т.е. *проводимость* (коэффициент теплоотдачи $\alpha \equiv q/\Delta t$). В знаменателе – масштаб для этой величины, пропорциональный массовой скорости ρu_{∞} .

Статус соотношения (3.4) как закона (конкретные аппроксимации (3.7), (3.8)) определяется тем, что устанавливается связь между *локальной* интенсивностью переноса (числом Стантона) и *локальным* числом Рейнольдса (3.5). Благодаря этому, соотношение (3.4) приобретает свойство *универсальности*, в отличие от обычных критериальных расчетных формул, специализированных для различных частных задач.

Стандартный закон теплообмена аппроксимируется следующими степенными формулами:

для ламинарного режима $Re_{**} < Re_{**cr} \approx 400$:

$$St_0 = \left(\frac{0,22}{Re_{T**}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{4/3}} \right]; \quad (3.7)$$

для турбулентного режима $Re_{**} > Re_{**cr} \approx 400$:

$$St_0 = \left(\frac{0,0128}{Re_{T**}^{0,25}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{0,75}} \right]. \quad (3.8)$$

Отметим, что закон теплообмена *консервативен* по отношению к фактору градиента давления, и поэтому мы непосредственно применим формулировки (3.7), (3.8) к изображенному на рис. 3.1 потоку с переменной скоростью и давлением.

Вывод закона теплообмена для ламинарного потока см. в гл.2. Влияние на тепломассообмен *поперечного потока массы* на проницаемой поверхности рассматривается далее в гл.9.

3.4. Математическое описание задачи о поперечном обтекании трубы

Горячий теплоноситель (газообразные продукты сгорания, в нашем примере с пароперегревателем) обтекает в поперечном направлении трубу с «холодным» теплоносителем (паром) внутри (рис. 3.1). Происходит теплопередача через стенку трубы.

Необходимо найти распределения по окружности трубы:

- коэффициента теплоотдачи на внешней стороне $\alpha_{out}(x)$,
- температуры стенки трубы $t_w(x)$ и
- плотности теплового потока $q(x)$.

Координата x отсчитывается от передней критической точки (точки торможения, или точки разветвления) вдоль окружности трубы.

Коэффициент теплоотдачи α_{in} и температура теплоносителя t_{in} на внутренней стороне заданы, так же как температура t_{out} и скорость набегающего потока W внешнего теплоносителя. Заметим, что температура внешнего теплоносителя t_{out} будет играть роль t_{∞} в уравнении пограничного слоя, а индекс « ∞ » мы будем вынуждены заменить на « inf », чтобы удовлетворить требованиям записи переменных в вычислительных программах.

Математическое описание задачи включает.

- Уравнение теплопередачи:

$$q(x) = \frac{(t_{out} - t_{in})}{\frac{1}{\alpha_{out}(x)} + \frac{1}{\alpha_{in}}}, \quad (3.9)$$

в котором малое термическое сопротивление стенки включено во второе слагаемое ($1 / \alpha_{in}$), задающее эффективное термическое сопротивление на внутренней стороне.

- Уравнение теплоотдачи на внешней стороне:

$$q(x) = \frac{(t_{out} - t_w(x))}{\frac{1}{\alpha_{out}(x)}}. \quad (3.10)$$

- Уравнение теплового пограничного слоя на внешней поверхности трубы (3.2), (3.3):

$$\frac{d}{dx} [\rho u_{inf}(x) \delta_{Txx}(x) c_p (t_{out} - t_w(x))] = q(x), \quad (3.11)$$

где $\delta_{Txx}(x)$ – толщина потери энтальпии (то же что δ_{T**}).

- Распределение скорости внешнего потока по окружности трубы в окрестности передней критической точки:

$$u_{inf}(x) = 2W \sin\left(\frac{x}{R}\right); \quad \frac{x}{R} < \frac{\pi}{4}. \quad (3.12)$$

- Стандартный закон теплообмена (3.4), связывающий величины:

$$St \equiv \frac{\alpha_{out}(x)}{\rho u_{inf}(x) c_p}; \quad Re_{Txx} \equiv \frac{u_{inf}(x) \delta_{Txx}(x)}{\nu}; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{a}, \quad (3.13)$$

где St есть число Стантона, $Re_{T_{xx}}$ – число Рейнольдса по толщине потери энтальпии $\delta_{T_{xx}}$ как линейному масштабу, Pr – число Прандтля, отношение кинематической вязкости к теплопроводности. Для *ламинарного* потока локальный коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален локальной толщине $\delta_{T_{xx}}$ теплового пограничного слоя (3.7).

• Граничные условия в критической точке (условия симметрии):

$$\left. \frac{d}{dx} \delta_{T_{xx}} \right|_{x=0} = 0; \quad \left. \frac{d}{dx} \theta_w \right|_{x=0} = 0. \quad (3.14)$$

В соответствии с уравнением (3.9), поток теплоты под действием разности температур (разности потенциалов) направляется от горячего теплоносителя снаружи трубы к холодному теплоносителю внутри трубы, проходя через термические сопротивления $1/\alpha_{out}$ и $1/\alpha_{in}$. Это описание напоминает простую задачу из электротехники, а соотношение (3.9) – формулировку закона Ома для последовательной цепи. Проблема состоит в том, что внешнее термическое сопротивление неизвестно. Оно является сложной функцией геометрии системы, скорости потока, физических свойств теплоносителя. Математическое моделирование сопротивления $1/\alpha_{out}$ (или проводимости, т.е. коэффициента теплоотдачи α_{out}) – центральное место рассматриваемой теории.

Практически важная цель расчета – определение плотности теплового потока в зависимости от скорости внешнего теплоносителя, радиуса трубы и т.д. Обычно конструкторы стремятся получить большие значения теплового потока, с тем чтобы уменьшить габариты и массу громоздких теплообменных устройств. Не менее важна и задача расчета температуры поверхности трубы, поскольку нельзя превысить допустимое значение, зависящее от термостойкости материала, давления в трубе и т.д.

Как будет ясно из дальнейшего, задача сводится к численному интегрированию уравнения теплового пограничного слоя (3.11), записанного как *нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка*.

По физическому содержанию это уравнение представляет собой тепловой баланс для потока жидкости вблизи стенки.

Напомним, что величина в квадратных скобках в левой части называется потерей энтальпии (теплосодержания), поскольку поток жидкости $\rho u_{in} \delta T_{xx}$ охлаждается от температуры *горячего* газа t_{out} до более низкой температуры стенки t_w . Производная в левой части указывает, что потеря энтальпии возрастает при движении газа вдоль холодной стенки благодаря теплоотводу $q(x)$ к стенке. Чтобы лучше уяснить физический смысл задачи, полезно вернуться к п. 3.2.

3.5. Распределение скорости внешнего потока по окружности трубы

Как видно из уравнений (3.11) и (3.13), для решения задачи понадобится распределение скорости внешнего потока по обводу цилиндра. Это распределение с удовлетворительной точностью можно получить из решения классической задачи об идеальном (невязком, безотрывном) обтекании цилиндра. Комплекснозначная функция, определяющая вектор комплексной сопряженной скорости, записывается как

$$w(z) = 1 - \frac{1}{z^2}, \quad (3.15)$$

где $z = x + iy$, i – мнимая единица, x, y – координаты.

Зададим квадратную сетку и вычислим продольную и поперечную составляющие вектора скорости для области вне круга единичного радиуса с помощью функции `if` (рис. 3.4):

$w(z) := 1 - \frac{1}{z^2}$		
$n := 10$	$i := 0..n$	$j := 0..n$
$x_i := \left(i - \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{4}{n}$	$y_j := \left(j - \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{4}{n}$	$z_{i,j} := x_i + i \cdot y_j$
$U_{i,j} := \text{if}(z_{i,j} \geq 1, \text{Re}(w(z_{i,j})), 0)$		
$V_{i,j} := \text{if}(z_{i,j} \geq 1, -\text{Im}(w(z_{i,j})), 0)$		

Рис. 3.4. Вычисление векторного поля скорости

Для графического представления векторного поля скорости в Mathcad следует вызвать последовательно пункты меню Insert, Graph, VectorFieldPlot и вставить вместо плейшолдера обозначения вычисленных массивов (U,V) , задающих проекции скорости. Результат показан на рис. 3.5.

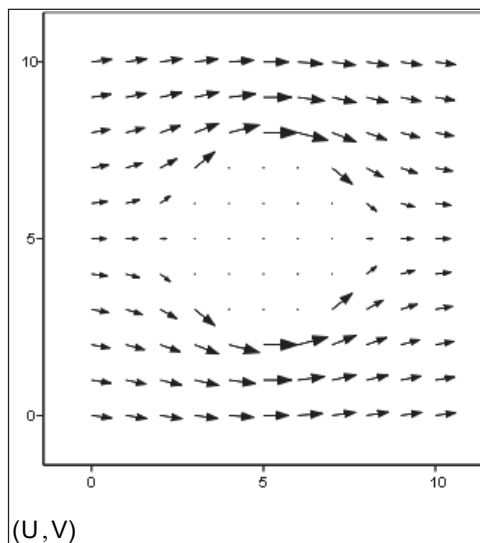


Рис. 3.5. Векторное поле скорости при обтекании цилиндра

Реальное течение в кормовой части сильно отличается от этой картины вследствие отрыва пограничного слоя примерно в среднем сечении цилиндра (рис. 3.1, 3.2). Однако в лобовой (наветренной) части идеальное течение хорошо представляет реальный поток. Подчеркнем, что речь идет о течениях *за пределами* тонкого пограничного слоя вблизи поверхности цилиндра.

Удовлетворительную аппроксимацию для действительно наблюдаемого распределения скорости вдоль обтекаемой поверхности (на внешней границе пограничного слоя) при не слишком больших значениях числа Рейнольдса дает пользовательская функция, представленная на рис. 3.6. Эта функция используется далее при интегрировании уравнения (3.11). Синусоидальная зависимость для идеального течения получается из (3.15), если провести вычисления для точек на поверхности цилиндра.

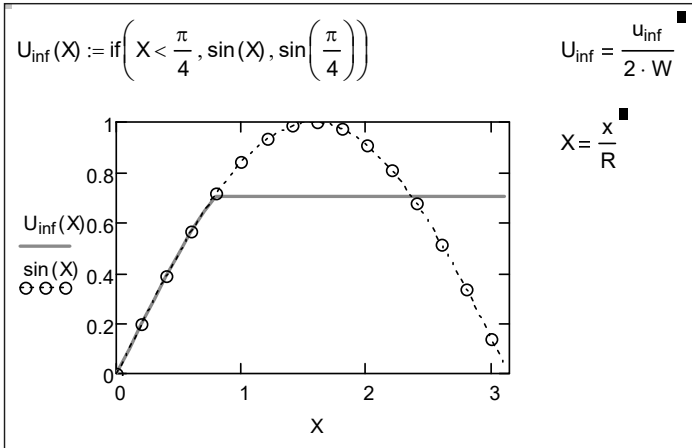


Рис. 3.6. Распределение скорости внешнего потока по окружности трубы

Анализ для критической точки

Непосредственно для критической точки ($x = 0$) простые, но довольно громоздкие (если их проводить вручную) аналитические преобразования приводят к следующим расчетным формулам:

$$\begin{aligned}
 St_{w_0} &\equiv \frac{\alpha_{out}(0)}{\rho W c_p} = \frac{0,939}{Pr^{2/3}} \frac{1}{Re_{DW}^{1/2}}; & Re_{DW} &\equiv \frac{WD}{\nu}; \\
 \frac{\delta_{T^{**}}(0)}{R} &= \frac{1}{2} St_{w_0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

Это один из важных результатов теории пограничного слоя. По формуле (3.16) можно рассчитать теплоотдачу в окрестности критической точки любого «затупленного» цилиндрического профиля, если под R понимать радиус кривизны поверхности в критической точке.

Необходимые выкладки при выводе (3.16) – дифференцирование, различные подстановки и тождественные преобразования для упрощения результатов – выполнены символьным процессором Mathcad’а. Опишем кратко технику этих символьных вычислений.

Идея *первого этапа* анализа состоит в том, чтобы записать дифференциальное уравнение (3.11) непосредственно для критической точки $x=0$ и получить соотношение между значениями толщины пограничного слоя и коэффициентом теплоотдачи в этой точке. Последовательность аналитических преобразований уравнения (3.11) показана на следующем Mathcad-фрагменте рис. 3.7.

$$u_{\text{inf}}(x) \equiv 2 \cdot W \cdot \sin\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\frac{d}{dx} \delta_{\text{Txx}}(x) \cdot \theta_{\text{w}}(x) \cdot u_{\text{inf}}(x) - \frac{q(x)}{\rho \cdot c_p}$$

substitute, $\theta_{\text{w}}(x) = \theta_{\text{w}}(0) + a \cdot x^2$ substitute, $\delta_{\text{Txx}}(x) = \delta_{\text{Txx}}(0) + b \cdot x^2$ substitute, $x = 0$ substitute, $q(0) = \alpha_{\text{out}}(0) \cdot \theta_{\text{w}}(0)$ factor solve, $\alpha_{\text{out}}(0)$	\rightarrow
--	---------------

$$2 \cdot \delta_{\text{Txx}}(0) \cdot W \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R}$$

$\alpha_{\text{out}}(0) = 2 \cdot \delta_{\text{Txx}}(0) \cdot W \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R}$ $\alpha_{\text{out}}(0) = \frac{0.22 \cdot c_p \cdot \rho \cdot v}{\delta_{\text{Txx}}(0)} \cdot \text{Pr}^{-\frac{4}{3}}$	$\left. \begin{array}{l} \text{solve, } \left(\begin{array}{l} \alpha_{\text{out}}(0) \\ \delta_{\text{Txx}}(0) \end{array} \right) \\ \text{simplify} \end{array} \right\} \rightarrow$
--	---

$$\left[\begin{array}{cc} .663 \cdot \frac{(W \cdot v \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} & \frac{.331}{W} \cdot \frac{(W \cdot v \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \\ -.663 \cdot \frac{(W \cdot v \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \cdot \rho \cdot \frac{c_p}{R} & \frac{-.331}{W} \cdot \frac{(W \cdot v \cdot R)^{\frac{1}{2}}}{\text{Pr}^{\frac{2}{3}}} \end{array} \right]$$

Рис. 3.7. Вывод формулы для теплоотдачи в критической точке

▪ Первые два оператора substitute выполняют подстановку предполагаемых двучленных разложений для температуры и толщины в непосредственной окрестности критической точки (при $x \approx 0$). Такой вид разложений следует из граничных условий (3.14), согласно которым первые производные в критической точке обращаются в ноль.

▪ Третий оператор предписывает произвести вычисления в критической точке.

▪ Четвертый оператор делает замену по уравнению Ньютона–Рихмана.

▪ Оператор factor делает очевидной возможность сокращения на величину $\Theta_w(0)$.

▪ Оператор solve решает уравнение относительно коэффициента теплоотдачи $\alpha_{out}(0)$; результат показан в нижней строчке первого блока.

На *втором этапе* (нижний блок на рис. 3.7) совместно с только что полученным соотношением для $\alpha_{out}(0)$ рассматривается формула (3.13) стандартного закона теплообмена. Полученная система уравнений относительно неизвестных $\alpha_{out}(0)$ и $\delta_{txx}(0)$ решается символьным процессором Mathcad посредством оператора solve. Результат решения выведен как матрица из четырех корней системы. Физический смысл имеют только два положительных корня, которые и представлены в окончательном виде формулами (3.16).

Соотношения (3.16) позволяют рассчитать значения коэффициента теплоотдачи и толщины теплового пограничного слоя непосредственно в критической точке, исходя из заданных величин скорости набегающего потока, радиуса трубы и свойств теплоносителя.

Числовые примеры приведены на рис. 3.8. Формула для температуры стенки t_w была получена почленным делением уравнений теплоотдачи (3.10) и теплопередачи (3.9).

Теплофизические свойства (плотность, теплоемкость, вязкость, число Прандтля) выбраны из справочных таблиц для продуктов сгорания при 1000^0C . Можно уточнить значения физических параметров в дополнительной итерационной процедуре, выбирая их по средней температуре пограничного слоя, а затем повторая расчет коэффициента теплоотдачи и температуры стенки.

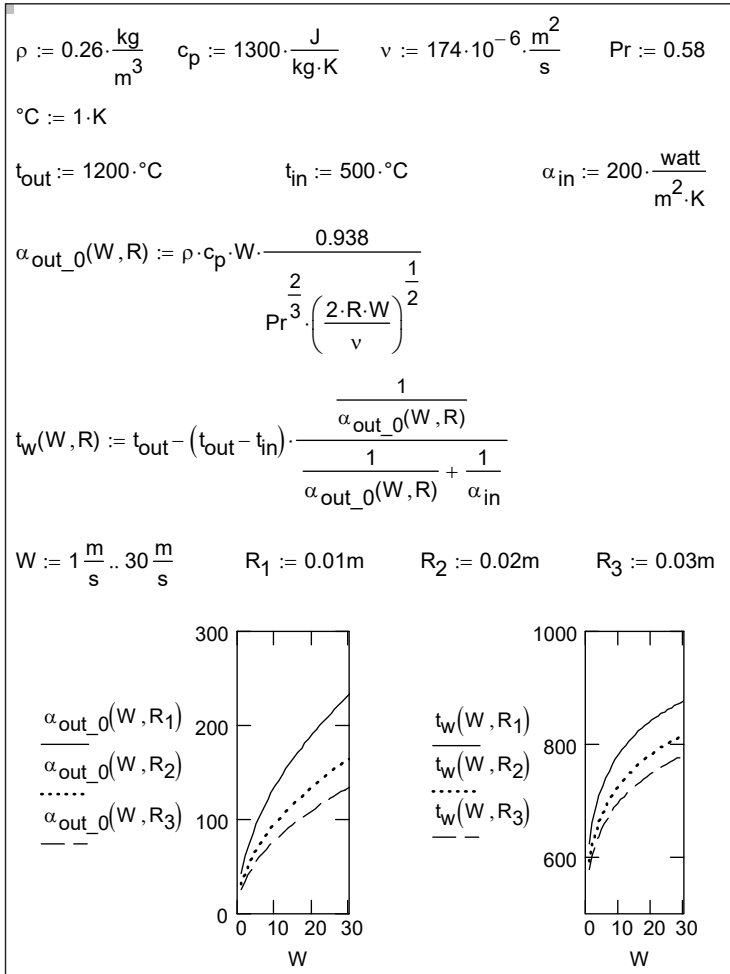


Рис. 3.8. Коэффициент теплоотдачи и температура стенки в критической точке при различных значениях скорости набегающего потока w , м/с и радиуса трубы R , м

Графики дают наглядную и весьма полезную информацию для проектировщика. Например, хорошо видно, что увеличение скорости обтекания может привести к недопустимому повышению температуры трубы в критической точке. Влияние геометрического параметра – радиуса трубы также отражено на диаграммах.

Теплопередача в передней критической точке

Поскольку коэффициент теплоотдачи $\alpha_{\text{out}_0} = \alpha_{\text{out}}(0)$ в критической точке цилиндра стал известен (3.16), можно рассчитать плотность теплового потока и температуру стенки, используя уравнения (3.9), (3.10):

$$q_0 = \frac{(t_{\text{out}} - t_{\text{in}})}{\frac{1}{\alpha_{\text{out}_0}} + \frac{1}{\alpha_{\text{in}}}} \equiv \alpha_{\text{out}_0} (t_{\text{out}} - t_{\text{in}}) \frac{1}{1 + R_\alpha}; \quad R_\alpha \equiv \frac{\alpha_{\text{out}_0}}{\alpha_{\text{in}}}; \quad (3.17)$$

$$q_0 = \alpha_{\text{out}_0} (t_{\text{out}} - t_{w0}).$$

Величина R_α , равная отношению характерных значений коэффициентов теплоотдачи с наружной и внутренней стороны трубы, является числовым параметром задачи. Величины с нулевым индексным обозначением используются далее как масштабы для приведения математического описания к безразмерному виду.

3.6. Безразмерная формулировка

Целью дальнейших вычислений являются распределения тепловых характеристик по окружности трубы. Простые операции масштабирования переменных приводят к безразмерной формулировке, включающей:

• дифференциальное уравнение (ДУ) для безразмерной величины потери энтальпии H пограничного слоя (уравнение (3.11) в размерном виде) с нулевым начальным условием:

$$\frac{d}{d\left(\frac{x}{R}\right)} \left[\frac{2}{\text{St}_{w0} \text{Re}_{DW}} \frac{u_{\text{inf}}(x) \delta_{\text{Txx}}(x) (t_{\text{out}} - t_w(x))}{\nu (t_{\text{out}} - t_{w0})} \right] = \frac{q(x)}{q_0} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dX} H(X) = Q(X, H); \quad H(0) = 0;$$

$$H \equiv \frac{2}{\text{St}_{w0} \text{Re}_{DW}} \text{Re}_{T^{**}} \cdot dT_{\text{out}}; \quad Q \equiv \frac{q(x)}{q_0}; \quad X \equiv \frac{x}{R}; \quad (3.18)$$

$$\text{Re}_{\text{Txx}}(X) \equiv \frac{u_{\text{inf}}(x) \delta_{\text{Txx}}(x)}{\nu}; \quad dT_{\text{out}} \equiv \frac{t_{\text{out}} - t_w(x)}{t_{\text{out}} - t_{w0}};$$

$$\text{St}_{w0} = \frac{0,938}{\text{Pr}^{2/3}} \frac{1}{\text{Re}_{DW}^{1/2}}; \quad \text{Re}_{DW} \equiv \frac{DW}{\nu}; \quad D = 2R$$

• и систему трех алгебраических уравнений (САУ) (3.19)–(3.22), устанавливающую в неявной, алгоритмической форме функциональную зависимость $Q(X, H)$ для правой части ДУ и состоящую из:

✓ выражения для (безразмерной) потери энтальпии через неизвестные (искомые) значения числа Рейнольдса и безразмерного температурного напора dT :

$$H(X) = \left(\frac{2}{St_{w0} Re_{DW}} \right) Re_{Txx}(X) \cdot dT_{out}(X); \quad (3.19)$$

✓ уравнения теплопередачи (уравнения (3.9) в размерном виде), включающего заданный числовой параметр R_α

$$Q(X) \equiv \frac{q(x)}{q_0} = \frac{(1 + R_\alpha)}{\frac{1}{Alfa_{out}(X)} + R_\alpha}, \quad (3.20)$$

где

$$Alfa_{out}(X) \equiv \frac{\alpha_{out}(x)}{\alpha_{out_0}}; \quad R_\alpha \equiv \frac{\alpha_{out_0}}{\alpha_{in}}; \quad (3.21)$$

✓ уравнения теплоотдачи (уравнения (3.10) в размерном виде) на внешней стороне:

$$Q(X) \equiv \frac{q(x)}{q_0} = dT_{out}(X) \cdot Alfa_{out}(X), \quad (3.22)$$

где

$$dT_{out}(X) \equiv \frac{(t_{out} - t_w(x))}{(t_{out} - t_{w0})}. \quad (3.23)$$

Поясним, что обозначение dT используется здесь для конечных значений безразмерного температурного напора.

Локальный коэффициент теплоотдачи $Alfa_{out}$ вычисляется по уравнениям (3.7), (3.8), (3.16). Очевидно, система (3.19)–(3.22) нелинейная.

Поясним назначение САУ (3.19)–(3.22). На каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения (3.18)

$$\frac{d}{dX} H(X) = Q(X, H); \quad H(0) = 0$$

становится известным новое значение энтальпии потока $H(X)$. Чтобы сделать следующий шаг, следует вычислить производную, т.е. правую часть ДУ–величину Q . Однако *не существует* явного выражения для Q . Вместо этого задана нелинейная САУ (3.19)–(3.22) для неизвестных $Q, dT_{out}, Re_{T^{**}}$, которую необходимо решить, располагая значениями X и H .

Безразмерные зависимые переменные определяются через соответствующие размерные величины следующими соотношениями.

▪ **Безразмерный температурный напор «внешний теплоноситель–стенка»:**

$$dT_{out}(X) \equiv \frac{(t_{out} - t_w(x))}{(t_{out} - t_{w0})}. \quad (3.24)$$

▪ **Безразмерная плотность теплового потока:**

$$Q(X) \equiv \frac{q(x)}{q_0};$$

$$q_0 = \alpha_{out_0} (t_{out} - t_{in}) \frac{1}{1 + R_a}; \quad (3.25)$$

$$\alpha_{out_0} = St_{w0} (\rho W c_p); \quad St_{w0} \equiv \frac{0,938}{Pr^{2/3}} \frac{1}{Re_{DW}^{1/2}}.$$

▪ **Безразмерная (относительная) локальная теплоотдача на внешней стороне трубы:**

$$Alfa_{out}(X) \equiv \frac{\alpha_{out}(x)}{\alpha_{out_0}} = \frac{St_0(Re_{T^{**}}(X))}{St_{w0}} 2U_{inf}(X);$$

$$U_{inf}(X) \equiv \frac{u_{inf}(x)}{2W};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} St_0 \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_{inf}(x)} = \left(\frac{0,22}{Re_{T^{**}}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{4/3}} \right]; \quad \leftarrow \text{laminar} \\ St_0 = \left(\frac{0,0128}{Re_{T^{**}}^{0,25}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{0,75}} \right]; \quad \leftarrow \text{turbulent} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

$$\alpha_{out_0} = St_{w0} (\rho W c_p); \quad St_{w0} \equiv \frac{0,938}{Pr^{2/3}} \frac{1}{Re_{DW}^{1/2}}.$$

Безразмерные заданные параметры и функции определены соотношениями.

➤ Функция, задающая распределение скорости внешнего потока по окружности трубы (программный блок на рис. 3.6):

$$U_{\text{inf}}(X) = \frac{u_{\text{inf}}(x)}{2W}. \quad (3.27)$$

- Критическое значение числа Рейнольдса Re^{**}_{cr} .
- Координата точки отрыва X_{sep} .
- Безразмерный параметр задачи, равный отношению характерных значений коэффициентов теплоотдачи с наружной и внутренней стороны трубы:

$$\frac{\alpha_{\text{out}}(0)}{\alpha_{\text{in}}} = R_{\alpha}. \quad (3.28)$$

➤ Число Рейнольдса внешнего потока Re_{WD} ; варьирование этого параметра при расчетах соответствует изменению скорости внешнего потока (при прочих неизменных условиях).

➤ Число Прандтля теплоносителя Pr .

Величина R_{α} задает отношение характерных значений коэффициентов теплоотдачи с наружной и внутренней стороны трубы. С ростом параметра R_{α} температура поверхности трубы приближается к температуре внешнего (горячего) теплоносителя и может превысить допустимый предел. При больших значениях R_{α} распределение $q(x)$ приближается к равномерному (см. (3.20)), при малых – равномерным становится распределение $t_w(x)$.

3.7. Функция для расчета локальной теплоотдачи

Программная реализация уравнений (3.26) представлена на рис. 3.9. Учтем, что течение с торможением за средним сечением трубы, т.е. в области встречного давления, является *неустойчивым*: здесь формируется профиль скорости с перегибом и инициируется переход к турбулентному режиму в пограничном слое, даже если «стандартное» критическое значение $Re^{**} \approx 400$ еще не достигнуто (оператор «if $X \geq X_{\text{sep}} \dots$ »). Координата точки отрыва (и соответственно перехода к турбулентному режиму) принята как для среднего сечения, $X_{\text{sep}} = \pi/2$.

За точкой отрыва существует зона переходного (смешанного) режима с коэффициентом перемежаемости γ , задающим относительный вклад турбулентности (γ) в интенсивность переноса (Mathcad-программа на рис. 3.9 и график на рис. 3.10).

```

Alfaout(ReTxx, X) :=
Stlam ← 0.22 · ReTxx-1 · Pr-1.333
Stturb ← 0.0128 · ReTxx-0.25 · Pr-0.75
if X ≥ Xsep
    "at separation point"
    Rexx_crit ← min(Rexx_cr, Rexx_sep)
    Rexx_min ←  $\left(\frac{0.22}{0.0128}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot Pr^{\frac{-7}{9}}$ 
    Rexx_cr ← max(Rexx_min, Rexx_sep)
     $\gamma \leftarrow \max\left(0, 1 - \exp\left(1 - \frac{Re_{Txx}}{Re_{xx\_cr}}\right)\right)$ 
    St ← Stturb ·  $\gamma$  + (1 -  $\gamma$ ) · Stlam
    St ·  $\frac{2 \cdot U_{inf}(X)}{St_{w0}}$ 
1 if X < 0.001
    
```

Рис. 3.9. Программный блок: уравнения (3.26) для теплоотдачи

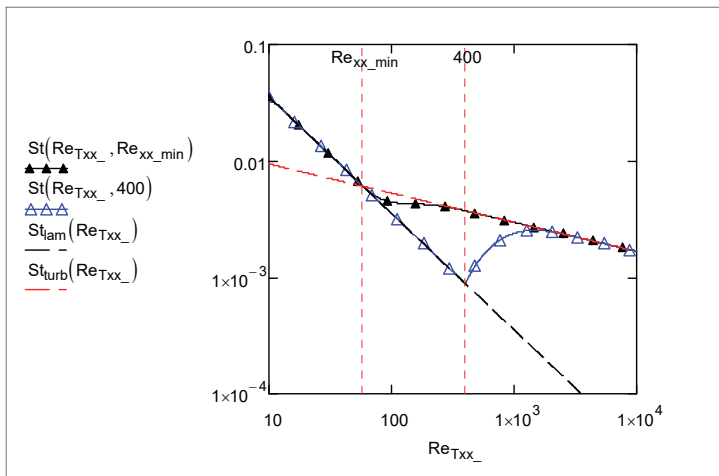


Рис. 3.10. Описание переходного режима теплоотдачи

Последний оператор программы на рис. 3.9 указывает в явной форме значение относительного коэффициента теплоотдачи в близкой окрестности критической точки $X = 0$, очевидно равное единице. Отметим, что ламинарно-турбулентный переход является гидродинамическим феноменом, поэтому при диагностике режима (оператор « if $X \geq X_{\text{sep}} \dots$ ») следовало бы оперировать с числом Рейнольдса, построенным по *толщине потери импульса*. Радикальным решением было бы параллельное интегрирование уравнений теплового и динамического пограничных слоев. Сейчас же мы просто зафиксируем ограничение модели: она приближенно применима к *газовым* теплоносителям, когда число Прандтля Pr близко к единице (см. заключительное обсуждение в п. 3.8).

Правая часть дифференциального уравнения в форме алгоритма оптимизации

Для численного интегрирования ДУ можно обратиться к какой-либо встроенной функции Mathcad, например, rkfixed, rkadapt, Odesolve. Однако предварительно необходимо разработать пользовательскую функцию $Q(X, H)$ для вычисления правой части ДУ (3.18) через текущее значение независимой переменной (координаты X) и искомой переменной (потери энтальпии H).

Соответствующий программный блок, записанный на встроенном языке программирования Mathcad, представлен на рис. 3.11. Решение нелинейной системы уравнений САУ (3.19)–(3.22), организуется как поиск минимума пользовательской функции F . Математическая задача оптимизации решается с помощью встроенной функции Minimize. (Это часто используемый в вычислительной математике эффективный прием – вместо исходной системы нелинейных уравнений – решают искусственно сформулированную тождественную задачу оптимизации).

Функция $F(Q, dT_{\text{out}}, Re_{T_{xx}}, X, H, R_a)$ сконструирована таким образом, что она

- *обращается в ноль*, если переменные $Q, dT_{\text{out}}, Re_{T_{xx}}$ при некоторых заданных значениях X, H, R_a удовлетворяют ранее полученной системе уравнений САУ ((3.19)–(3.22)),

• приобретает все большие положительные значения по мере удаления переменных Q , dT , Re_{Txx} от решения этой системы.

Далее мы создаем функцию $Mini()$ с полным списком параметров, которая обращается к встроенной функции $Minimize$:

$$Mini(Q, dT_{out}, Re_{Txx}, X, H, R_\alpha) := Minimize(F, Q, dT_{out}, Re_{Txx}).$$

В списке аргументов стандартной функции $Minimize$ содержатся целевая функция F и переменные Q , dT_{out} , Re_{Txx} .

$$F(Q, dT_{out}, Re_{Txx}, X, H, R_\alpha) := \left\{ \begin{array}{l} \text{"enthalpy loss:"} \\ eq1 \leftarrow H - \frac{2}{St_{W0} \cdot Re_{DW}} \cdot Re_{Txx} \cdot dT_{out} \\ \text{"outside heat transfer equation:"} \\ eq2 \leftarrow Q - dT_{out} \cdot Alfa_{out}(Re_{Txx}, X) \\ \text{"overall heat transfer equation:"} \\ eq3 \leftarrow Q - \frac{1 + R_\alpha}{\left(\frac{1}{Alfa_{out}(Re_{Txx}, X)} + R_\alpha \right)} \\ eq1^2 + eq2^2 + eq3^2 \end{array} \right.$$

$$Mini(Q, dT_{out}, Re_{Txx}, X, H, R_\alpha) := Minimize(F, Q, dT_{out}, Re_{Txx})$$

$$RH(X, H) := \left\{ \begin{array}{l} Q_0 \leftarrow 1 \\ dT_{out_0} \leftarrow 1 \\ Re_{Txx_0} \leftarrow \frac{X}{\left(\frac{2}{St_{W0} \cdot Re_{DW}} \cdot dT_{out_0} \right)} \\ Mini(Q_0, dT_{out_0}, Re_{Txx_0}, X, H, R_\alpha) \end{array} \right.$$

$$Q(X, H) := RH(X, H)_0 \quad \lll \text{right-hand member of boundary layer equation}$$

$$dT_{out}(X, H) := RH(X, H)_1 \quad Re_{Txx}(X, H) := RH(X, H)_2$$

Рис. 3.11. Программный блок для определения правой части дифференциального уравнения (3.18)

Функция RH задает *начальное приближение* величин Q , dT_{out} , Re_{Txx} и вызывает функцию $Mini()$, описанную выше. Возвращаемое значение RH есть вектор-функция со следующими компонентами: тепловой поток Q , температурный напор dT_{out} , число Рейнольдса Re_{Txx} . Последняя строка фрагмента программы на рис. 3.11 задает правую часть ДУ (3.18) как компоненту вектора RH с нулевым индексом (т.е. Q).

Численное интегрирование: функция Odesolve

Структура программы показана на рис. 3.12. В верхнем блоке заданы параметры и функции, которые редко изменяются при работе с программой. В скрытой области (Area) расположены функции, уже представленные выше на рис. 3.9, 3.11.

Численное решение ДУ посредством встроенного интегратора *Odesolve* производится дважды. Первое интегрирование производится с целью найти локальное число Рейнольдса в точке сепарации (отрыва) потока (примерно в среднем сечении профиля трубы). Второе интегрирование дает локальные распределения по полной окружности трубы с учетом возможного ламинарно-турбулентного перехода.

На последнем этапе, используя решение для потери энтальпии $H(X)$, строят распределения локального числа Рейнольдса, плотности теплового потока, коэффициента теплоотдачи на внешней стороне, температурного напора «внешний поток–стенка» (рис. 3.13). Подробности вычисления этих величин как функций от $X, H(X)$ можно посмотреть в текстах программ на рис. 3.9, 3.11.

Как видно из итогового графика (рис. 3.13), при умеренном значении числа Рейнольдса внешнего потока ($Re_{WD} = 5 \cdot 10^4$) наибольшая интенсивность теплоотдачи достигается на наветренной стороне обтекаемой поверхности, в критической точке $x = 0$. Здесь же минимальна разность температур «горячий внешний теплоноситель – стенка трубы», т.е. температура стенки t_w ближе всего к высокой температуре внешнего теплоносителя t_{out} . Следовательно, в точке $x = 0$ создаются наиболее опасные температурные условия для материала трубы. Проведем далее расчеты при больших числах Рейнольдса внешнего потока (при $Re_{WD} = 5 \cdot 10^5$). Результаты представлены на рис. 3.14.

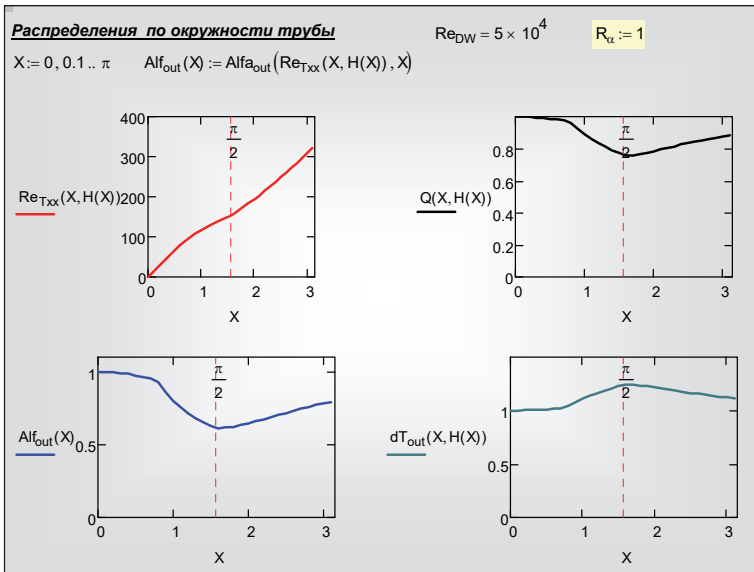


Рис. 3.13. Распределения локального числа Рейнольдса, коэффициента теплоотдачи, плотности теплового потока и температурного напора по окружности трубы ($Re_{WD} = 5 \cdot 10^4$)

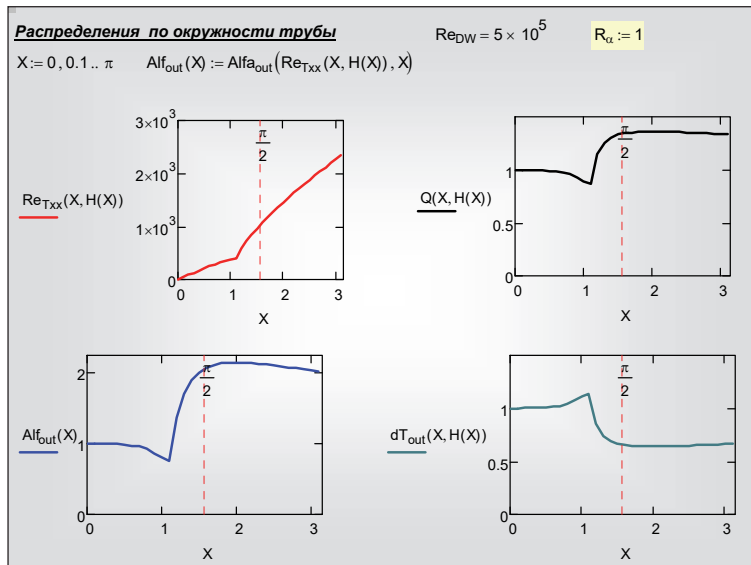


Рис. 3.14. Распределения локального числа Рейнольдса, коэффициента теплоотдачи, плотности теплового потока и температурного напора по окружности трубы ($Re_{WD} = 5 \cdot 10^5$)

Видно, что картина радикально изменилась. Ламинарно-турбулентный переход совершается теперь в передней части трубы, коэффициент теплоотдачи при турбулентном течении в пограничном слое сильно возрастает и достигает максимума при значении $X \approx 2$. Здесь же создаются наиболее опасные температурные условия.

3.8. Сопоставление с экспериментом

Мы имеем возможность сопоставить теоретическую модель процесса с собственными экспериментальными данными, полученными в учебной лаборатории теплопередачи кафедры теории теплотехники МЭИ.

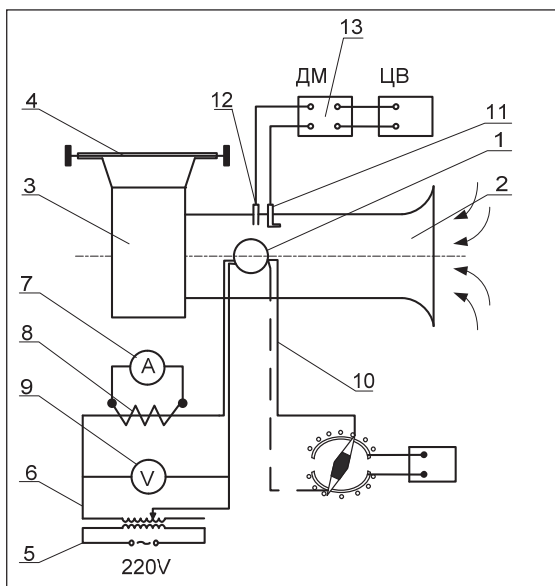


Рис. 3.15. Экспериментальная установка

Устройство экспериментальной установки, методика проведения и обработки опытных данных подробно описаны в лабораторной работе «Измерение теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра». Здесь мы ограничимся следующими краткими сведениями. Основной частью установки (рис. 3.15) является обогреваемая электрическим током цилиндрическая трубка 1, установленная в канале 2, через который вентилятором 3 прокачива-

ется воздух. Изменение расхода воздуха и, следовательно, скорости обтекания цилиндра осуществляется регулируемой диафрагмой 4. Опытная трубка включена в электрическую цепь и обогревается Джоулевым теплом. В электрическую цепь включены также регулятор напряжения 5 и силовой трансформатор 6, с помощью которых устанавливается определенное значение электрической мощности и теплового потока (вольтметр 9 и трансформатор тока 8 – амперметр 7), отдаваемого с поверхности трубки теплоносителю (воздуху). Показания термопар устанавливаются регулятором 10, трубка Пито 11 и отбор статического давления 12 позволяет оценивать потери давления и определять значение скорости в узком сечении с помощью дифманометра 13. Экспериментальные данные представлены тремя массивами на рис. 3.16.

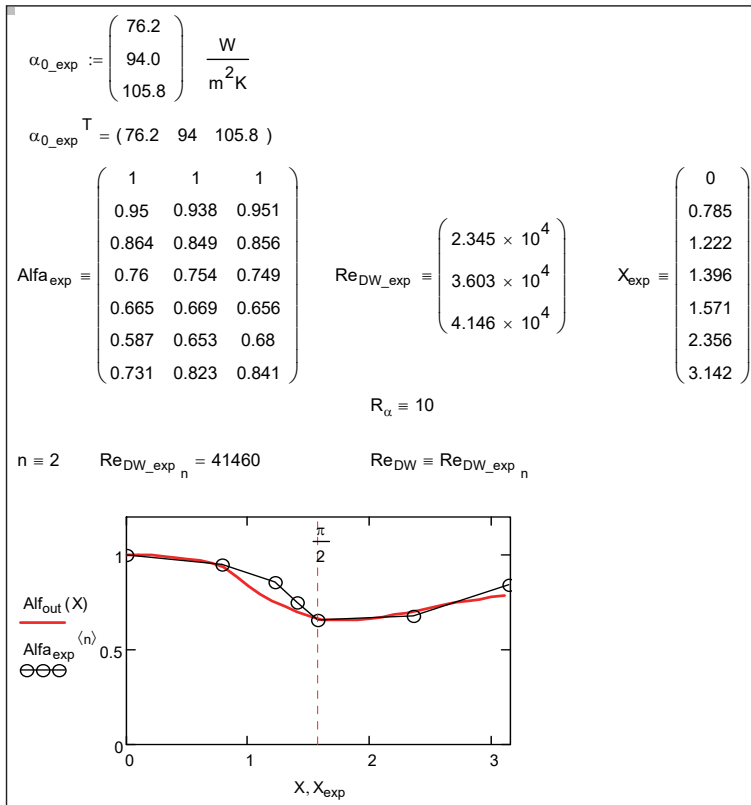


Рис. 3.16. Массивы экспериментальных данных. Сопоставление теории и эксперимента (exp) для режима $Re_{DW} = 41640$

Графически сопоставлены расчетные и экспериментальные результаты для распределения относительного коэффициента теплоотдачи $Alfa$ (определение (3.21)) при максимальной скорости потока в опытах. Можно констатировать удовлетворительное согласование теории и эксперимента. Следует обратить внимание на принятое при расчете большое значение числового параметра $R_\alpha, R_\alpha = 10$ (формулы (3.21), (3.28) и комментарии к ним), что обеспечивает условие постоянства плотности теплового потока по окружности трубы, как и в эксперименте.

На рисунке 3.17 демонстрируется хорошее согласие расчетных (уравнение (3.16)) и экспериментальных данных по теплоотдаче в передней критической точке.

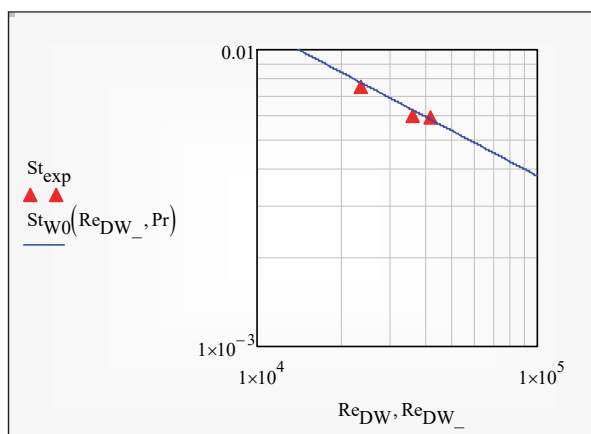


Рис. 3.17. Теплоотдача в передней критической точке потока:
теория (линия) и эксперимент (точки)

Серия распределений относительного коэффициента теплоотдачи по окружности трубы при различных значениях числа Рейнольдса внешнего потока (рис. 3.16) удовлетворительно воспроизводится компьютерной моделью.

Во-первых, следует отметить универсальность распределения в лобовой части трубы в рассматриваемом диапазоне умеренных чисел Рейнольдса, когда вплоть до точки отрыва сохраняется ламинарный режим течения. Некоторое расхождение во второй четверти полуокружности объясняется, по-видимому, принятым слишком грубым «ступенчатым» профилем скорости u_{inf} (рис. 3.6).

Во-вторых, можно констатировать удовлетворительное воспроизведение возрастающей зависимости в кормовой зоне. Слишком высоко расположенной кажется последняя экспериментальная точка на нижней кривой (при минимальной скорости обтекания, рис. 3.18).

Возможно, это расхождение объясняется устройством канала учебной экспериментальной установки (рис. 3.15).

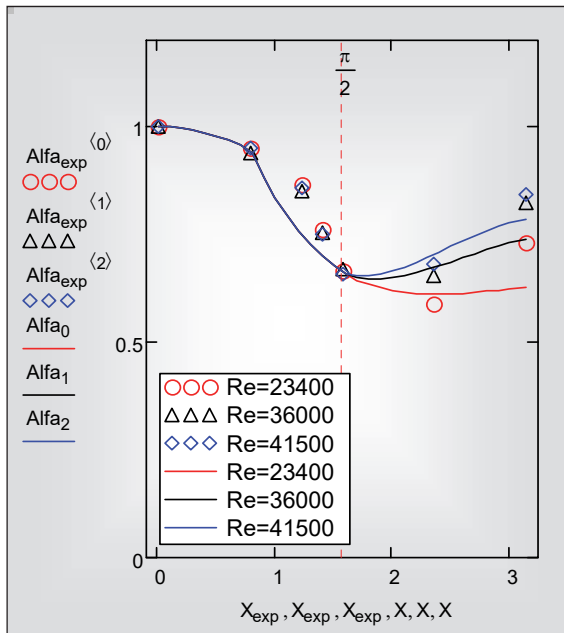


Рис. 3.18. Распределение относительного коэффициента теплоотдачи по окружности трубы при различных числах Рейнольдса $Re_{\text{об}}$: теория (кривые) и эксперимент (точки)

Заключение

Рассмотренная задача связана с проблемой надежности высокотемпературной поверхности нагрева, какой является пароперегреватель тепловой электростанции. Обычно ограничиваются расчетом *средней* температуры поверхности нагрева и сопоставляют ее с допустимой температурой для материала труб.

Такой расчет проводится по элементарным формулам теплопередачи:

$$q = \frac{(t_{\text{out}} - t_{\text{in}})}{\frac{1}{\alpha_{\text{out}}} + \frac{1}{\alpha_{\text{in}}}}; \quad q = \frac{(t_{\text{out}} - t_w)}{\frac{1}{\alpha_{\text{out}}}},$$

в которых все величины, в том числе и искомая температура стенки t_w , представляются постоянными, осредненными по окружности трубы значениями.

Если расчетный запас «прочности» по температуре выбран небольшим, то возможна опасная ситуация, когда средняя температура стенки будет ниже допустимой, а максимальная – превысит это значение. Следовательно, для реалистичной оценки надежности пароперегревателя необходимо рассчитывать *локальное* распределение температур.

Поэтому потребовалась разработка *дифференциальной* модели теплообменного устройства. Задача о развитии теплового пограничного слоя решалась *интегральным методом* (уравнения (3.11), (3.13)).

В вычислительном аспекте центральным пунктом модели было интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения (3.11). При наличии эффективных стандартных функций численного интегрирования каких-либо математических трудностей возникать не должно. Тем не менее, начинающий инженер-исследователь может оказаться в затруднении перед следующей коллизией:

- в *учебных примерах* справочных руководств правые части дифференциальных уравнений всегда представляются *простыми аналитическими выражениями*;

- в *реальных задачах*, возникающих в инженерной практике или научных исследованиях, правая часть дифференциальных уравнений часто вообще не может быть выражена каким-либо, пусть и сложным, аналитическим выражением, а является сложным алгоритмом, требующим сложной программной реализации.

В рассмотренной задаче правая часть дифференциального уравнения была представлена в форме *алгоритма оптимизации*.

Компьютерная модель может быть усовершенствована в нескольких направлениях. Радикальным улучшением было бы параллельное решение интегральных уравнений теплового пограничного слоя и *гидродинамического пограничного слоя*, что позволило бы уточнить оценки ламинарно-турбулентного перехода. Важно иметь в виду, что свойством консервативности относительно градиента давления обладает *закон теплоотдачи*, но не *закон гидродинамического сопротивления*. Заметим также, что мы не оптимизировали значения таких параметров или заданных функций, как координата точки сепарации потока X_{sep} или распределение скорости внешнего потока по окружности трубы $U_{inf}(X)$.

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите интегральное уравнение теплового пограничного слоя.
2. Что такое *толщина вытеснения* и *толщина потери энthalпии*?
3. Определите понятие *стандартного закона теплообмена*.
4. Опишите применение интегрального метода для расчета локальной теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра.
5. Опишите экспериментальное исследование теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра.
6. Как рассчитать коэффициент теплоотдачи при обтекании одиночной трубы?

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА: ГОРЕНИЕ, ЗАЩИТА ОТ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОТОКОВ

Существует круг практически важных задач массообмена, объединенных явлением *гетерогенного катализа*. Известным примером является каталитический дожигатель (нейтрализатор) вредных выбросов автомобильного двигателя. В таких устройствах химические реакции активно протекают на специальных *твердых поверхностях*, но практически не идут в *объеме* газового (или жидкостного) теплоносителя. Поэтому при проектировании стремятся получить развитую поверхность контакта (что, в частности, стимулирует разработку *микрочанальных устройств*).

К указанному кругу задач относится также горение *твердого* топлива, например, *угля* или *графита*. Давление паров твердых горючих веществ слишком мало, чтобы обеспечить их достаточную концентрацию в газовой фазе (как это бывает при испарении капель *жидкого* топлива), и реакция горения протекает непосредственно на поверхности.

Графит как материал, стойкий до температур $\sim 3000\text{K}$, используется для защиты элементов конструкции от высокотемпературных потоков, например, в ракетной технике. Покрытия из графита работают в режиме *абляции*, т.е. постепенного удаления внешних слоев вследствие испарения и/или горения. В ядерной энергетике графит служит замедлителем в некоторых типах реакторов, поэтому при разработке систем безопасности АЭС должны рассматриваться возможные аварийные ситуации с учетом горения графита.

Эффективным способом защиты *от воздействия высокотемпературных потоков* (в ракетной технике, различных высокотемпературных технологиях) является *вдувание* охлаждающего газа через обтекаемую поверхность. Свойство *проницаемости* обтекаемых поверхностей для вещества имеет место и в представленных выше процессах абляции и горения.

Ниже в качестве модельных задач рассмотрены две проблемы:

- массообмен при горении графита в окрестности критической точки поперечно обтекаемого профиля и
- теплообмен в турбулентном пограничном слое на продольно обтекаемой пластине со щелевым и распределенным вдувом.

Основным инструментом анализа будут интегральные уравнения пограничного слоя.

Процессы тепломассообмена с фазовыми превращениями на поверхностях раздела (испарение, конденсация), подробно рассмотрены в гл. 6–7.

4.1. Горение. Интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя

Понятие пограничного слоя обсуждалось в гл.2. Изменения скорости, температуры, концентрации сосредоточиваются в тонком – *пограничном* – слое вблизи стенки, если поверхности обтекаются потоками с большими числами Рейнольдса. Последующий анализ основывается на модельном представлении диффузионного пограничного слоя (рис. 4.1), аналогично тому, как это было сделано ранее для теплового пограничного слоя. Принципиальной особенностью массообмена по сравнению с обычным конвективным теплообменом на твердых поверхностях является *проницаемость* стенки для потоков массы.

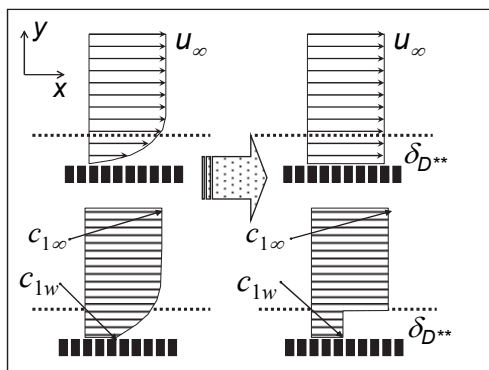


Рис. 4.1. Распределения скорости и концентрации в пограничном слое (слева) и модельное представление (справа)

В левой части рис. 4.1 представлено *действительное* распределение скорости и концентрации в пограничном слое. Для определенности принимают, что вдоль поверхности движется газовая смесь, обогащенная рассматриваемым компонентом «1» и теряющая этот компонент через проницаемую поверхность ($c_{1\infty} > c_{1w}$, индекс «w» означает параметры на стенке).

Эквивалентное представление (по содержанию массы компонента в потоке смеси) дано в правой части рисунка. Считают, что в слое толщиной $\delta_{D^{**}}$ поток смеси полностью теряет избыток концентрации ($c_{1\infty} - c_{1w}$) по отношению к стенке; одновременно принимают, что скорость смеси остается равной скорости внешнего потока u_∞ вплоть до стенки.

Мерой толщины *диффузионного* пограничного слоя является величина $\delta_{D^{**}}$, называемая толщиной *потери* концентрации:

$$\rho u_\infty \delta_{D^{**}} \underbrace{(c_{1\infty} - c_{1w})}_{\text{Потеря концентрации}} \equiv \int_0^\infty \rho u(y) (c_{1\infty} - c_1(y)) dy,$$

где под «потерей» концентрации понимается ее уменьшение по сравнению с исходным значением $c_{1\infty}$ в набегающем потоке. В левой части этого уравнения – модельное представление потери концентрации потоком смеси в пределах диффузионного пограничного слоя, а в правой – соответствующее точное выражение. Последнее может быть вычислено, если известны (из теоретического решения или из эксперимента) распределения концентрации и скорости по сечению пограничного слоя. Таким образом, согласно определению:

$$\delta_{D^{**}} \equiv \frac{\int_0^\infty \rho u(y) (c_{1\infty} - c_1(y)) dy}{\rho u_\infty (c_{1\infty} - c_{1w})}. \quad (4.1)$$

Толщина потери концентрации служит линейным масштабом при построении локального числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{D^{**}} = \frac{u_\infty \delta_{D^{**}}}{\nu}. \quad (4.2)$$

Интегральное уравнение (4.3) диффузионного пограничного слоя представляет собой формулировку закона сохранения массы рассматриваемого компонента смеси (индекс «1») для специального контрольного объема, охватывающего всю толщину $\delta_{D^{**}}$ пограничного слоя (рис. 4.1) и дифференциально малого в продольном направлении x :

$$\frac{d}{dx} \left[\underbrace{(\rho u_{\infty} \delta_{D^{**}}) \cdot (c_{1\infty} - c_{1w})}_{\substack{\text{Расход смеси} \\ \text{Потеря компонента «1»} \\ \text{на единицу массы} \\ \text{смеси}}} = \underbrace{-j_{1\text{diff } w}}_{\substack{\text{Диффузионный} \\ \text{поток компонента «1»} \\ \text{к стенке}}} + \underbrace{j_{\Sigma w} (c_{1\infty} - c_{1w})}_{\substack{\text{Обогащение вдуваемого потока} \\ \text{компонентом «1»} \\ \text{до уровня } C_{1\infty}}} \cdot \quad (4.3)$$

Потеря компонента «1» потоком смеси

Левая часть (4.3) описывает увеличение потери компонента «1» при движении потока смеси вдоль поверхности.

Правая часть уравнения сохранения (4.3) раскрывает причины такого увеличения *потери*, а именно:

– отвод ($-j_{1\text{diff } w}$) рассматриваемого компонента «1» через проницаемую поверхность стенки «w» посредством *диффузии*, т.е. *кондуктивного переноса* (первое слагаемое справа):

$$j_{1\text{diff } w} = -\rho D \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=0}; \quad (4.4)$$

– затраты на обогащение (от c_{1w} до $c_{1\infty}$) компонентом «1» вдуваемого потока $j_{\Sigma w}$; это второе слагаемое в правой части (4.3) можно интерпретировать как конвективный поток в поперечном направлении:

$$j_{\Sigma w} (c_{1\infty} - c_{1w}) \equiv \rho v_w (c_{1\infty} - c_{1w});$$

$$j_{\Sigma w} = \rho v_w.$$

Полезно иметь в виду, что величина $j_{\Sigma w}$ задает некоторое *конечное* (не нулевое) значение v_w *поперечной* скорости гидродинамического потока на проницаемой стенке.

Соотношение конвективного и диффузионного поперечных потоков массы компонента «1» на проницаемой поверхности называют *параметром проницаемости* b_{D1} :

$$b_{D1} \equiv \frac{j_{\Sigma w} (c_{1\infty} - c_{1w})}{(-j_{1\text{diff } w})} \equiv \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_{\infty}} \frac{1}{St_D}. \quad (4.5)$$

Диффузионное число Стантона St_D является мерой интенсивности процесса массообмена на стенке:

$$St_D \equiv \frac{\left(\frac{-j_{1diff w}}{c_{1\infty} - c_{1w}} \right)}{\rho u_\infty} \equiv \frac{\rho\beta}{\rho u_\infty}, \quad (4.6)$$

где β , м/с – коэффициент массоотдачи:

$$j_{1diff w} = -\rho D \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = \rho\beta (c_{1w} - c_{1\infty}). \quad (4.7)$$

В числителе (4.6) записано отношение потока переносимой величины к соответствующей движущей силе, т.е. проводимость ($\rho\beta$). В знаменателе – масштаб для этой величины, в качестве которого выступает продольный поток массы (ρu_∞), потенциально способный обеспечить высокую интенсивность переноса.

Уравнение диффузионного пограничного слоя (4.3) содержит две неизвестные величины. Если в качестве граничного условия на стенке задается концентрация, то искомыми величинами являются

- толщина потери концентрации $\delta_{D^{**}}$ и
- плотность диффузионного (кондуктивного) потока массы на поверхности ($j_{1diff w}$).

Необходимым дополнительным соотношением между неизвестными величинами является закон массообмена (см. далее).

При интегрировании уравнения (4.3) вдоль обтекаемой поверхности (вдоль x) должно быть поставлено начальное условие, например, задана нулевая толщина потери концентрации ($\delta_{D^{**}}(x=0) = 0$) на передней кромке проницаемой пластины.

Для справки приведем основные обозначения и определения для двухкомпонентных смесей:

- плотность i -го компонента:

$$\rho_i, \frac{\text{кг } i\text{-го комп.}}{\text{м}^3 \text{ смеси}};$$

- концентрация i -го компонента:

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho_{см}};$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_\Sigma; \quad c_1 + c_2 = 1;$$

- плотность потока массы компонента смеси:

$$\vec{j}_i = \rho \vec{w} c_i - \rho D \text{grad } c_i, \quad \frac{\text{кг } i\text{-го комп.}}{\text{м}^2 \text{ с}},$$

где D – коэффициент диффузии бинарной смеси; первое слагаемое в правой части – конвективная составляющая потока массы, второе слагаемое – диффузионная (кондуктивная) составляющая, обусловленная концентрационной диффузией; плотность массового потока и скорость смеси:

$$\vec{j}_\Sigma \equiv j = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \rho \vec{w}.$$

Если величина записана без индекса, то по умолчанию предполагается, что она относится к смеси в целом.

Стандартные законы

Соотношение между *локальным* числом Стантона St_D (локальной проводимостью, см. (4.6)) и числом Рейнольдса $Re_{D^{**}}$ (*локальной* толщиной пограничного слоя, см. (4.2)):

$$St_{D0} = f(Re_{D^{**}}, Pr_D), \quad (4.8)$$

установленное на основе теоретических и экспериментальных исследований массообмена при обтекании

- ✓ безградиентным внешним потоком;
- ✓ непроницаемой (т.е. при стремящемся к нулю поперечном потоке массы, $j_{\Sigma w} \rightarrow 0$) пластины;
- ✓ с постоянными значениями концентрации на ее поверхности, называют *стандартным* законом массообмена.

Благодаря *локальному* характеру, соотношение (4.8) приобретает свойство универсальности и может быть распространено (как хорошее приближение) на условия, *отличные* от тех, при которых оно было непосредственно получено. Например, на потоки с продольными градиентами давления или с переменной по поверхности концентрацией. Однако *влияние поперечного потока* массы должно быть учтено специальной корректировкой (см. далее соотношение (4.24) и аппроксимации на рис. 4.5, 4.6).

Ниже приведены степенные аппроксимации стандартного закона массообмена, пригодные для газов и неметаллических жидкостей:

– ламинарный режим течения в пограничном слое, $Re^{**} < Re^{**}_{cr} \approx 400$:

$$St_{D0} = \frac{0,22}{Re_{D^{**}} Pr_D^{4/3}}; \quad (4.9)$$

– турбулентный режим, $Re^{**} > Re^{**}_{cr} \approx 400$:

$$St_{D0} = \frac{0,0128}{Re_{D^{**}}^{1/4} Pr_D^{3/4}}. \quad (4.10)$$

Условие ламинарно–турбулентного перехода $Re^{**}_{cr} \approx 400$ записывается для числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса δ^{**} :

$$Re_{**} = \frac{u_{\infty} \delta^{**}}{\nu}$$

(ср. с формулой (4.2) для числа $Re_{D^{**}}$). Поэтому, вообще говоря, необходимо вести параллельный расчет диффузионного $\delta_{D^{**}}$ и гидродинамического δ^{**} пограничных слоев, чтобы контролировать режим течения. Здесь мы ограничимся ссылкой на приближенный характер прогнозирования перехода и на относительно близкие значения толщин пограничных слоев в случае газовых потоков. Критическое число Re^{**}_{cr} принято равным примерно 400, что соответствует «техническим», возмущенным потокам. Сильный вдув провоцирует ранний переход к турбулентности, напротив, при отсосе возможна ламинаризация потока.

Физика горения

В качестве модельной задачи рассмотрим обтекание затупленного графитового тела со скоростью w (рис. 4.2). Реальным прототипом может быть защита элемента конструкции от воздействия высокотемпературного набегающего потока посредством графитового покрытия.

Рассчитаем интенсивность выгорания углерода в окрестности критической точки (т.е. там, где набегающий поток разветвляется). Скорость обтекания u_∞ цилиндрического профиля переменна и задается в этой окрестности соотношением:

$$u_\infty(x) = 2w \sin\left(\frac{x}{R}\right) \quad (4.11)$$

(заметим, что поперечно обтекаемый цилиндр не обязательно круглый: R – это радиус кривизны поверхности вблизи критической точки).

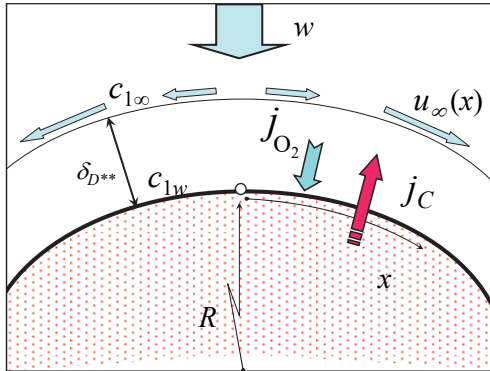
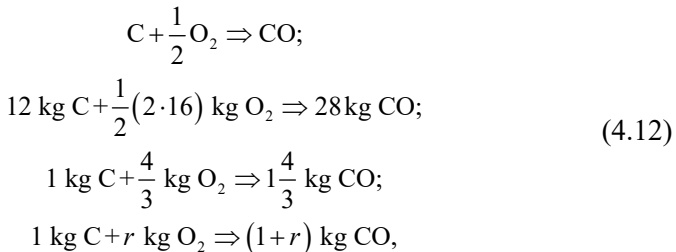


Рис. 4.2. Диффузионный пограничный слой в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра

При высокой температуре окисление углерода на твердой поверхности будет происходить с образованием оксида углерода (угарного газа):



где через r обозначена доля окислителя в реакции ($r = 4/3$). Таким образом, на 1 кг выгорающего углерода расходуется r кг кислорода.

Давление паров топлива (углерода) над графитом настолько мало, что концентрацией этого компонента в газовой фазе можно пренебречь даже при очень высоких температурах. Поэтому реакция окисления (горения) идет только на самой твердой поверхности. Содержание кислорода уменьшается в пределах диффузионного пограничного слоя по мере приближения к стенке из-за накопления продуктов сгорания.

В качестве актуального компонента газовой смеси рассматривается кислород, который идентифицируется в формулах либо индексом «1», либо своим химическим символом «O₂».

Поперечный поток массы кислорода, поддерживающий горение, состоит из конвективной и кондуктивной (диффузионной) составляющих:

$$j_{O_2} = j_{\Sigma} \cdot c_{O_2} + j_{O_2 \text{ diff}} \cdot \quad (4.13)$$

На твердой поверхности подводимый кислород соединяется с углеродом и покидает поверхность в обратном направлении в связанном виде. Поэтому единственным переносимым через поверхность *веществом* будет углерод (рис. 4.2), и массовый поток газовой смеси окажется просто равным скорости выгорания углерода j_C :

$$j_{\Sigma} = j_C \cdot \quad (4.14)$$

Связь между количествами кислорода и углерода, вступающими в реакцию, уже установлена (4.12) и следует только учесть противоположное направление потоков кислорода и углерода:

$$j_{O_2} = -r \cdot j_C \cdot \quad (4.15)$$

Существует два предельных режима горения на твердой поверхности. Если скорость самой реакции высока, а подвод кислорода через диффузионный пограничный слой затруднен, то скорость выгорания углерода будет определяться массообменом в пограничном слое. Именно этот режим, называемый обобщенно «массообменом с каталитическими реакциями на стенке», рассматривается в дальнейшем. Другой, неактуальный для нас сейчас режим, лимитируется относительно небольшой скоростью самой химической реакцией на стенке, в то время как интенсивность массообмена весьма высока.

В пределе высокой скорости реакции, концентрация кислорода непосредственно у стенки стремится к нулю

$$c_{O_2, w} \rightarrow 0. \quad (4.16)$$

Любое повышение концентрации кислорода немедленно компенсируется убылью последнего в быстротекающей реакции на стенке, в то время как подвод кислорода контролируется относительно «медленным» процессом диффузии через газовый пограничный слой.

Записывая (4.13) для условий непосредственно на стенке (индекс «w») и используя (4.16), получают:

$$\begin{aligned} j_{O_2} &= j_{\Sigma} \cdot c_{O_2} + j_{O_2, \text{diff}} \Rightarrow \\ j_{O_2, w} &= j_{\Sigma w} \cdot \underbrace{c_{O_2, w}}_0 + j_{O_2, \text{diff } w} \Rightarrow \\ j_{O_2, w} &= j_{O_2, \text{diff } w}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

т.е. поток кислорода непосредственно на стенке рассчитывается как диффузионный (кондуктивный) поток, определяемый *градиентом* концентрации кислорода на стенке. Скорость диффузии кислорода вблизи стенки определяет скорость выгорания графита:

$$\begin{aligned} j_{O_2, w} = -r \cdot j_C; \quad j_{O_2, w} &= j_{O_2, \text{diff } w} \Rightarrow \\ j_{O_2, \text{diff } w} &= -r \cdot j_C. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выпишем условия сохранения массы по обеим сторонам поверхности раздела «графит (graphite)–газовая смесь (Σ)»:

$$\begin{aligned} j_{\Sigma w} &\equiv j_C; \\ j_{\Sigma w} = \rho_{\text{graphite}} v_{\text{graphite}} &= \rho_{\Sigma} v_{\Sigma w}; \\ \rho_{\text{graphite}} &\gg \rho_{\Sigma}; \\ v_{\text{graphite}} &\ll v_{\Sigma w}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Величина поперечной скорости v_{graphite} определяет, например, с какой скоростью (м/с) уменьшается толщина защитного графитового покрытия вследствие выгорания (абляция защитного покрытия). Поперечная скорость в газовом потоке $v_{\Sigma} \gg v_{\text{graphite}}$ показывает, с какой скоростью (м/с) удаляются газовые продукты сгорания от стенки. Скорость такого «вдува» в пограничный слой может быть значительной при интенсивном горении.

Важным результатом этого предварительного анализа является возможность непосредственно вычислить параметр проницаемости b_{D1} через заданные в условиях задачи величины (концентрацию кислорода в набегающем газовом потоке и долю r окислителя в реакции, (4.5), (4.18):

$$b_{D1} \equiv \frac{j_{\Sigma}}{\rho u_{\infty}} \frac{1}{St_D} = \frac{j_{\Sigma}}{\rho u_{\infty}} \frac{\rho u_{\infty} (c_{O_2\infty} - c_{O_2w})}{(-j_{O_2 \text{ diff } w})} = \frac{c_{O_2\infty} - c_{O_2w}}{r} \approx \frac{c_{O_2\infty}}{r}. \quad (4.20)$$

4.2. Интегрирование уравнения диффузионного пограничного слоя

Целью расчета является определение скорости выгорания j_C , если заданы:

- ✓ концентрация кислорода $c_{1\infty}$ в набегающем потоке газа,
- ✓ скорость набегающего потока w ,
- ✓ радиус поверхности R .

Учитывая результаты предварительного анализа (4.18), (4.20) и используя уравнение массоотдачи (4.7), получим:

$$\left. \begin{aligned} j_{O_2 \text{ diff } w} = -r j_C \\ j_{1 \text{ diff } w} = \rho\beta(c_{1w} - c_{1\infty}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow j_C = \rho\beta \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0; \Rightarrow \quad (4.21)$$

$$j_C = \rho\beta b_{D1}; \quad b_{D1} \approx \frac{c_{O_2\infty}}{r},$$

(в левых частях двух исходных уравнений фигурирует одна и та же величина, поскольку индекс компонента смеси «1» соответствует кислороду «O₂»). Однако коэффициент массоотдачи β в (4.21) остается пока неизвестным.

План решения задачи таков. Исходными соотношениями являются уравнение диффузионного пограничного слоя (4.3) и закон массообмена (4.9). Интегрируя дифференциальное уравнение (4.3) по продольной координате x (рис. 4.2), найдем распределение толщины диффузионного пограничного слоя δ_{D**} (или его безразмерного представления Re_{D**} (4.2)) и коэффициента массоотдачи (в безразмерном представлении, St_D (4.6)). Введем также необходимые корректировки на влияние поперечного потока массы.

В критической точке ($x = 0$) искомые распределения имеют гладкий экстремум, благодаря симметрии и гладкости обтекаемого профиля (рис. 4.2). Поэтому в *близкой окрестности* критической точки правая часть дифференциального уравнения (4.3) остается примерно постоянной величиной, и приближенное интегрирование осуществляется просто:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho u_\infty \delta_{D^{**}}(c_{1\infty} - c_{1w})) &= \underbrace{-j_{1diff\ w} + j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w})}_{\sim const} \\ \underbrace{[\rho u_\infty \delta_{D^{**}}(c_{1\infty} - c_{1w})]_{x=0}}_{\text{Начальное условие}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (4.22)$$

$$\rho u_\infty \delta_{D^{**}}(c_{1\infty} - c_{1w}) \approx (-j_{1diff\ w} + j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w}))x.$$

Поясним, что нулевое начальное условие (второе уравнение в (4.22)) получается благодаря нулевому значению скорости u_∞ в критической точке $x = 0$, (4.11).

Переходя к безразмерному представлению (4.22), получим после простых преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{u_\infty \delta_{D^{**}}}{\nu} &= \left(\frac{-j_{1diff\ w}}{\rho u_\infty (c_{1\infty} - c_{1w})} + \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \right) \underbrace{\left(\frac{x u_\infty}{\nu} \right)}_{Re_x}; \\ Re_{D^{**}} &= \left(St_D + \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \right) Re_x \equiv St_{D0} \left(\frac{St_D}{\underbrace{\Psi_D}_{\Psi_D}} + \frac{j_{\Sigma w}}{\underbrace{\rho u_\infty}_{b_D}} \frac{1}{St_{D0}} \right) Re_x; \\ Re_{D^{**}} &= St_{D0} (\Psi_D + b_D) Re_x. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Фактор Ψ учитывает отклонение от стандартного закона массообмена (4.8)–(4.10) из-за ненулевого поперечного потока массы на стенке:

$$\Psi_D(b_{D1}) \equiv \left(\frac{St_D}{St_{D0}} \right)_{Re_{D^{**}}} \quad (4.24)$$

Числа Стантона в правой части (4.24) берутся при одинаковых значениях числа Рейнольдса $Re_{D^{**}}$, т.е. при одинаковых зна-

чениях толщин пограничного слоя, соответственно, для задачи с ненулевым поперечным потоком (числитель) и для стандартной задачи с непроницаемой поверхностью (знаменатель).

Модифицированный параметр проницаемости b_D в (4.23) связан с ранее введенным параметром b_{D1} (4.5) соотношением, непосредственно следующим из определений этих величин:

$$\frac{b_D}{b_{D1}} = \Psi_D. \quad (4.25)$$

Функцию $\Psi(b)$ получают при решении *полных* уравнений пограничного слоя в частных производных (гл. 2) или из экспериментальных данных. В рамках интегрального метода решения задач пограничного слоя эта функция полагается известной, заданной аппроксимациями, которые приведены далее в текстах Mathcad-программ (рис. 4.4–4.6). Дополнительные сведения о применении интегрального метода можно найти в гл. 9, посвященной теплообмену при конденсации и испарении.

Полагая развивающееся течение в окрестности критической точки ламинарным, привлечем для дальнейших вычислений стандартный закон массообмена (4.9):

$$\begin{aligned} St_{D0} &= \frac{0,22}{Re_{D^{**}} Pr_D^{4/3}}; \\ Re_{D^{**}} &= \frac{\sqrt{0,22}}{Pr_D^{2/3}} \sqrt{\Psi_D + b_D} \sqrt{Re_x}; \\ St_D &\equiv \frac{-j_{diff\ w}}{\rho u_\infty (c_{1\infty} - c_{1w})} \equiv \frac{\beta}{u_\infty} = \frac{\sqrt{0,22}}{\sqrt{Re_x} Pr_D^{2/3}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

После подстановки выражения (4.11) для распределения скорости $u_\infty(x)$ получим:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{0,94}{w} \frac{\sin(x/R)}{Re_d^{1/2} Pr_D^{2/3}} \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}}; \\ Re_d &= \frac{wd}{\nu}; \quad d = 2R. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Определив коэффициент массоотдачи β , воспользуемся теперь соотношениями (4.21), чтобы завершить решение задачи и рассчитать скорость выгорания графита:

$$j_C = \rho\beta b_{D1};$$

$$b_{D1} = \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0.$$

Очевидные подстановки и преобразования (4.25), (4.27) дают:

$$\frac{j_C}{\rho w} = \frac{\beta}{w} b_{D1} = \left[\frac{0,94}{\text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}_D^{2/3}} \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}} \right] b_{D1} \quad (4.28)$$

$$b_D = \Psi_D b_{D1}$$

и окончательно:

$$\frac{j_C}{\rho w} = \underbrace{\left\{ \frac{0,94}{\text{Re}_d^{1/2} \text{Pr}_D^{2/3}} \right\}}_1 \underbrace{\left\{ \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \right\}}_2 \underbrace{\left\{ \sqrt{\frac{\Psi_D(b_{D1})}{1 + b_{D1}}} \right\}}_3 b_{D1}; \quad (4.29)$$

$$b_{D1} = \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0; \quad r = \frac{4}{3};$$

$$c_{1\infty} \equiv c_{O_2\infty}; \quad c_{1w} \equiv c_{O_2w}.$$

Напомним, что индекс «1» при обозначении концентрации идентифицирует кислород как компонент газовой смеси.

Результаты

Расчетная формула (4.29) имеет факторизованную структуру.

Первый множитель является гидродинамическим фактором, т.е. определяет влияние скорости и режима течения. Видно, что скорость выгорания графита в критической точке возрастает пропорционально корню квадратному из скорости набегающего газового потока: $j_C \sim w^{0.5}$. Заметим, что в рамках аналогии между процессами тепло- и массообмена, после замены $\text{Pr}_D \rightarrow \text{Pr}$ первый фактор определит также теплоотдачу в окрестности критической точки (гл. 3).

Второй множитель дает зависимость от продольной координаты (вблизи критической точки, рис. 4.2, 4.3). В пределах четверти окружности, где еще имеет смысл допущение «окрестность критической точки», локальная скорость горения изменяется незначительно (рис. 4.3).

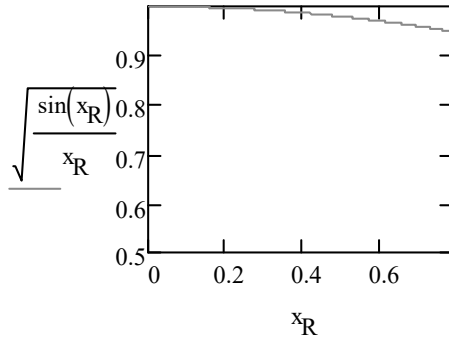


Рис. 4.3. Изменение скорости горения вдоль профиля поверхности

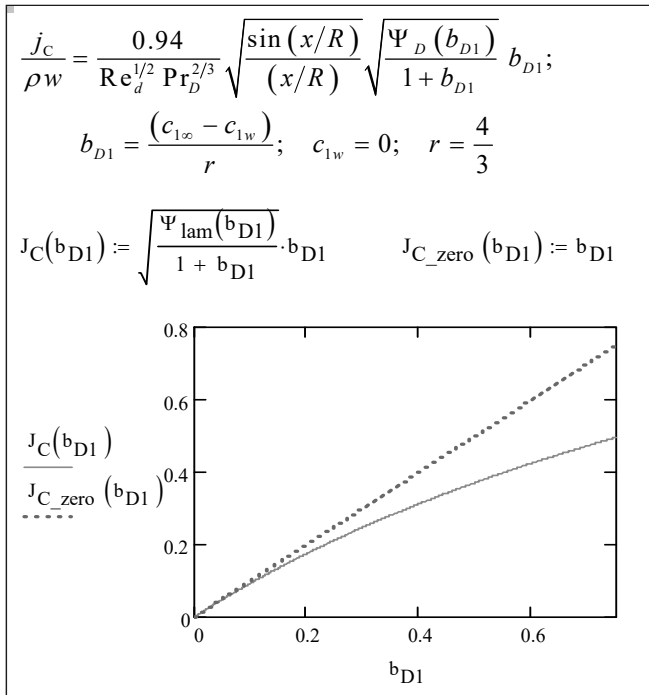


Рис. 4.4. Зависимость скорости горения от параметра проницаемости b_{D1} (или концентрации кислорода)

Третий фактор определяет влияние *поперечного потока* массы (проницаемости стенки) на массоотдачу в пограничном слое (рис. 4.4). Если параметр проницаемости b_{D1} (4.20) стремится к нулю, например, при уменьшении концентрации кислорода в набегающем потоке, то этот фактор становится близким к единице. Сопоставление с полным решением (4.29) показывает, что ошибка от пренебрежения эффектом поперечного потока становится значительной при больших скоростях горения (при больших концентрациях кислорода в набегающем потоке газовой смеси).

Зависимость корректирующего фактора Ψ (4.24) от параметра проницаемости в двух модификациях (b_D и b_{D1}) представлена на рис. 4.5, рис. 4.6. Положительные значения параметра проницаемости соответствуют вдуву, как при горении или испарении, отрицательные – отсосу, как при конденсации.

Количественные оценки скорости выгорания (4.19) в критической точке обтекаемого профиля приведены на рис. 4.7. Как видно, характерное значение этой величины составляет по порядку 0,1 мм/с. Этот результат важен, например, при конструировании защиты, поскольку позволяет оценить необходимую толщину покрытия при заданном времени воздействия высокотемпературного потока.

Непосредственный доступ к Mathcad-документу с вычислениями, представленными на рис. 4.3–4.7 можно получить по ссылке [51].

За пределами проведенного анализа остается вопрос о температуре стенки. Можно наметить следующий план решения этой проблемы.

Поскольку скорость горения уже определена, то фактически задана плотность теплового потока на стенке как произведение скорости выгорания j_c на удельную теплоту сгорания графита.

Далее необходимо решить задачу теплообмена при заданном параметре проницаемости и заданном тепловом потоке, что можно сделать, оперируя с интегральным уравнением теплового пограничного слоя и законом теплообмена, аналогично уже решенной диффузионной задаче. В реальной постановке, заметную роль может играть также теплообмен излучением.

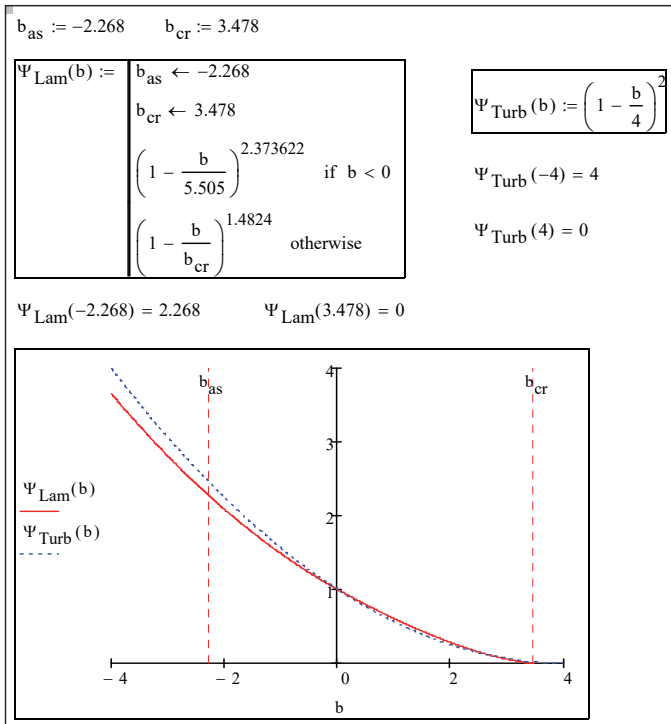


Рис. 4.5. Корректирующий фактор $\Psi(b)$ при вдуве ($b > 0$) и отсосе ($b < 0$)

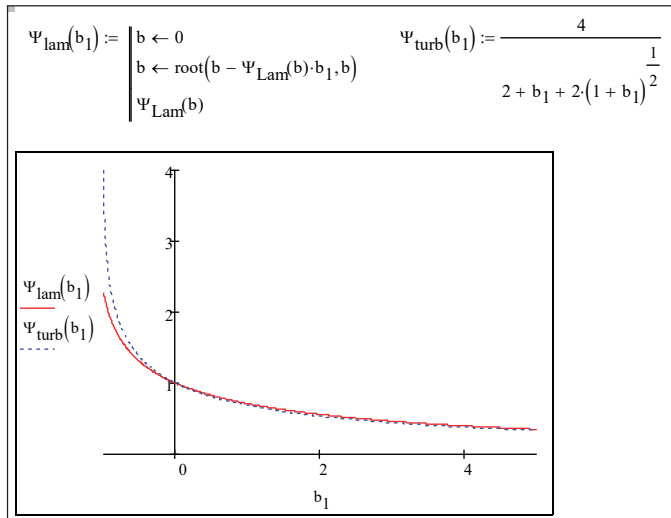


Рис. 4.6. Корректирующий фактор $\Psi(b_1)$ при вдуве ($b_1 > 0$) и отсосе ($b_1 < 0$)

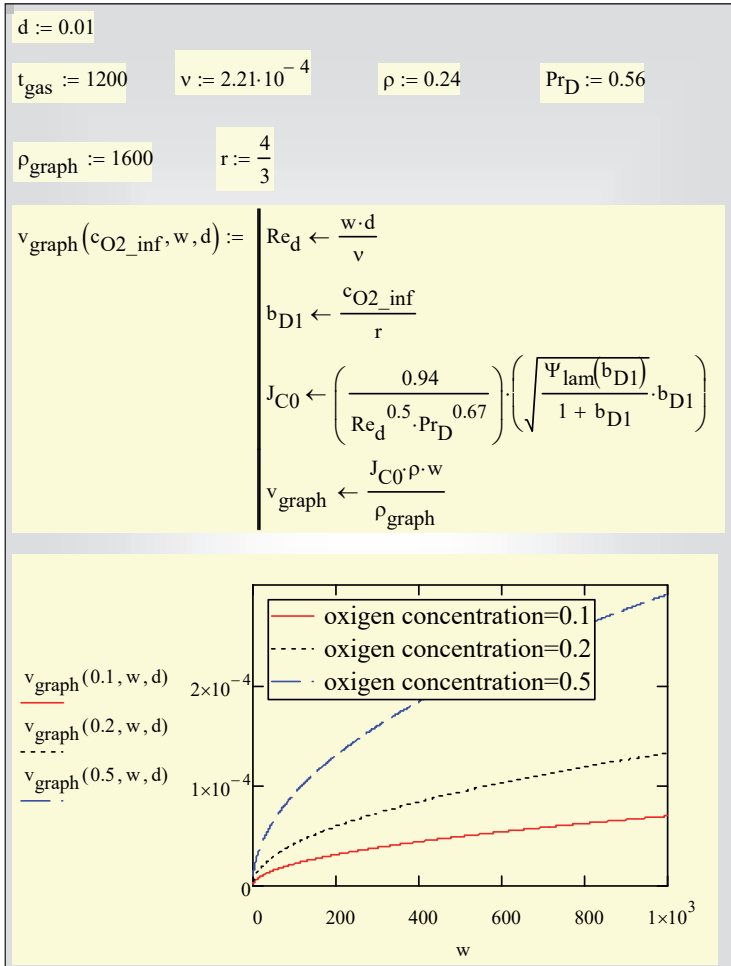


Рис. 4.7.Скорость выгорания в зависимости от концентрации кислорода и скорости набегающего потока

Дополнительные сложности связаны с существенной зависимостью теплофизических свойств газа от температуры и состава.

Отметим, что аналогичным был бы анализ горения частиц угля в камере сгорания энергетической установки, с соответствующей заменой модели обтекания – сферы вместо цилиндра.

4.3. Защита поверхности от воздействия высокотемпературного потока

Постановка задачи

На практике часто возникает проблема защиты поверхностей от воздействия высокотемпературных потоков. В качестве примеров можно назвать камеры сгорания, сопловые аппараты и лопатки газовых турбин, своды металлургических печей и т.п. Посредством вдува можно существенно уменьшить интенсивность теплообмена с высокотемпературным потоком и понизить температуру стенки до допустимых значений. Конструктивно вдув осуществляется через специальные щели или каналы, или сама твердая поверхность выполняется из пористого металла.

Схематически рассматриваемая задача представлена на рис. 4.8.

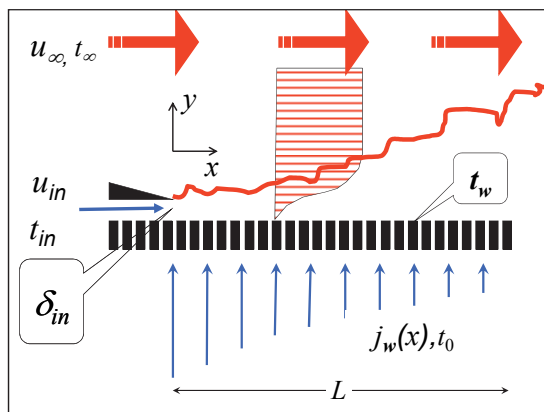


Рис. 4.8. Защита посредством вдува

Пористая пластина длиной L обтекается со скоростью u_{∞} продольным высокотемпературным (t_{∞}) потоком газа. Охлаждающий газ с температурой t_0 вдувается через поверхность. *Требуется подобрать такое распределение вдува $j_w(x)$, чтобы температура поверхности поддерживалась на заданном постоянном уровне t_w .*

Для защиты передней кромки, где интенсивность теплообмена с высокотемпературным потоком особенно велика, предусмотрен специальный щелевой вдув с указанными на схеме параметрами: толщиной щели δ_{in} , средней по сечению щели скоростью u_{in} и температурой t_{in} вдуваемого через щель потока.

Продольная координата x и протяженность поверхности L по ходу высокотемпературного потока газа отсчитывается от устройства щелевого вдува на передней кромке пластины, как показано на рис. 4.8.

В учебной задаче теплофизические свойства газа полагаются постоянными, взятыми по средней температуре в пограничном слое.

Модельные представления

Сформулируем модельные представления, которые позволят перейти далее к математической постановке задачи.

Поток на выходе из щелевого канала должен трансформироваться в погранслоевое течение (рис. 4.8). Мы не будем детально рассматривать сложную картину этого перехода и ограничимся балансовым соотношением, согласно которому пограничный слой наследует «потерю энтальпии» щелевого потока:

$$\begin{aligned} \rho c_p u_{in} \delta_{in} (t_{\infty} - t_{in}) &= \rho c_p u_{\infty} \delta_{T^{**}} (t_{\infty} - t_w) \Rightarrow \\ \delta_{T^{**}} \Big|_{x=0} &\equiv \delta_{T^{**0}} \approx \delta_{in} \frac{u_{in} t_{\infty} - t_{in}}{u_{\infty} t_{\infty} - t_w}; \\ \text{Re}_{T^{**0}} &= \frac{u_{\infty} \delta_{T^{**0}}}{\nu}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Таким образом, параметры щелевого вдува t_{in} , u_{in} , δ_{in} определяют начальную толщину (потери энтальпии) теплового пограничного слоя $\delta_{T^{**0}}$ и начальное значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{T^{**0}}$. При вдуве переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области относительно малых значений числа Рейнольдса, и мы примем, что пограничный слой будет турбулентным с самого начала.

Поскольку температура стенки t_w при включенном охлаждении меньше температуры набегающего потока газа t_{∞} , $t_w < t_{\infty}$, возникает тепловой поток от высокотемпературного газа к стенке ($-q_w$). Этот переданный стенке тепловой поток ($-q_w$) расходуется

на подогрев проходящего через пористую структуру вдуваемого теплоносителя $j(x)$ от начальной температуры t_0 до температуры поверхности t_w (рис. 4.8):

$$-q_w = j_w c_p (t_w - t_0). \quad (4.31)$$

Напомним, что величина t_w предопределена проектным заданием.

После простых тождественных преобразований получим из (4.31) следующее соотношение между безразмерным *температурным параметром* Θ и параметром проницаемости b_T :

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(\frac{-q_w}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)} \right)}_{St} &= \frac{j_w c_p (t_w - t_0)}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)} \Rightarrow \\ St &= \frac{j_w}{\rho u_\infty} \underbrace{\left(\frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w} \right)}_{\Theta} \Rightarrow \\ \underbrace{\left(\frac{St}{St_0} \right)}_{\Psi_T} &= \underbrace{\left(\frac{j_w}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_0} \right)}_{b_T} \underbrace{\left(\frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w} \right)}_{\Theta} \Rightarrow \\ \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w} &\equiv \Theta = \frac{\Psi_T (b_T)}{b_T}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Величина Θ , как и температура поверхности t_w , определяется проектным заданием. Этот безразмерный параметр задает отношение между избыточной температурой поверхности по отношению к вдуваемому газу ($t_w - t_0$) и разностью температур высокотемпературного потока и поверхности ($t_\infty - t_w$). Если вдув отключен, то $t_w \rightarrow t_\infty$ и $\Theta \rightarrow \infty$. При предельно большом вдуве $t_w \rightarrow t_0$ и $\Theta \rightarrow 0$. Мы будем полагать далее величину Θ варьируемым проектным параметром и иногда называть безразмерной избыточной температурой стенки.

Математическое описание

Соотношение (4.32) определяет главную идею решения задачи. Поскольку величина Θ является заданным параметром, для обеспечения заданной температуры поверхности t_w необходимо

поддерживать некоторое постоянное вдоль поверхности значение параметра проницаемости b_T , определяемое решением алгебраического уравнения (4.32):

$$\left\{ \Theta = \frac{\Psi_T(b_T)}{b_T} \right\} \Rightarrow b_T(\Theta). \quad (4.33)$$

Математическое описание задачи включает.

♦ Интегральное уравнение теплового пограничного слоя, записанное с учетом проницаемости стенки (гл.2):

$$\frac{d}{dx} \underbrace{(\rho c_p u_\infty \delta_{T^{**}}(t_\infty - t_w))}_{\text{Потеря энтальпии}} = \underbrace{-q_w}_{\text{Теплоотвод к стенке}} + \underbrace{j_w c_p (t_\infty - t_w)}_{\text{Затраты на подогрев вдуваемого теплоносителя}}, \quad (4.34)$$

которое, благодаря постоянству температурного напора ($t_\infty - t_w$) вдоль x , легко преобразуется, посредством простых тождественных преобразований, к удобному для решения безразмерному виду:

$$\frac{d}{d\left(\frac{x}{L}\right)} \underbrace{\left(\frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}\right)}_{\text{Re}_{T^{**}}} = \underbrace{\frac{u_\infty L}{\nu}}_{\text{Re}_L} \left(\underbrace{\left(\frac{-q_w}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)}\right)}_{\text{St}} + \underbrace{\left(\frac{j_w}{\rho u_\infty} \frac{1}{b_T}\right)}_{\text{St}_0} \right) \text{St}_0$$

$$\Psi \equiv \left(\frac{\text{St}}{\text{St}_0}\right)_{\text{Re}_{T^{**}}}$$

$$\Downarrow \Downarrow \Downarrow \quad (4.35)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dX}(\text{Re}_{T^{**}}) = \text{Re}_L \cdot \text{St}_0 (\text{Re}_{T^{**}}, \text{Pr}) \cdot (\Psi_T(b_T) + b_T) \\ \text{Re}_{T^{**}}|_{X=0} = \text{Re}_{T^{**}0} \\ X \equiv \frac{x}{L}; \quad \text{Re}_L \equiv \frac{u_\infty L}{\nu}; \quad b_T = \text{const.} \end{cases}$$

Зависимой переменной в (4.35) является число Рейнольдса, подсчитанное по локальной толщине потери энтальпии как определяющему размеру:

$$\text{Re}_{T^{**}} = \frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}.$$

Начальное, при $X = 0$, значение числа Рейнольдса $\text{Re}_{T^{**}}$ задается условием (4.30).

♦ Закон теплообмена, скорректированный с учетом проницаемости стенки:

$$St = St_0(Re_{T^{**}}, Pr) \cdot \Psi_T(b_T), \quad (4.36)$$

где число Стантона с индексом «0» задается стандартной формулировкой (4.9), (4.10), а фактор проницаемости Ψ вычисляется по формулам на рис. 4.5 как функция параметра проницаемости.

Детальный план решения будет таким.

Вычислить температурный параметр Θ (4.32), используя заданные значения температур потока горячего газа t_∞ и дувяемого охлаждающего газа t_0 , а также допустимой температуры стенки t_w :

$$\Theta = \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w}. \quad (4.37)$$

Вычислить параметр проницаемости b_T , решая алгебраическое уравнение (4.33) (см. далее вычисления на рис. 4.9):

$$\left\{ \Theta = \frac{\Psi_T(b_T)}{b_T} \right\} \Rightarrow b_T(\Theta). \quad (4.38)$$

Проинтегрировать уравнение теплового пограничного слоя (4.35).

Представить решение в виде распределений по длине ($X \equiv x/L$) обтекаемой поверхности:

$$Re_{T^{**}} = Re_{T^{**}}(X); \quad St_0 = St_0(Re_{T^{**}}(X), Pr), \quad (4.39)$$

используя (4.9), (4.10).

Рассчитать необходимое распределение вдува:

$$\left(b_T \equiv \frac{j_w}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_0} \right) \Rightarrow \quad (4.40)$$

$$\frac{j_w}{\rho u_\infty} = b_T(\Theta) \cdot St_0(Re_{T^{**}}(X), Pr).$$

Интегрирование уравнения теплового пограничного слоя

Дифференциальное уравнение (4.35) в рассматриваемом учебном примере – это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому можно получить аналитическое решение в форме интеграла. Однако для более сложных реальных задач в инженерной

практике чаще приходится применять численные методы. Поэтому заключительный этап мы проведем в пакете Mathcad, сопровождая *численные решения* наглядными графиками результатов (рис. 4.9, 4.10). Доступ к вычислительной программе можно получить по ссылке [51].

На рисунке 4.9 представлены пользовательские функции для расчета теплоотдачи St_0 , корректирующего фактора Ψ , параметра проницаемости $b(\Theta)$. Эти функции определяют правую часть дифференциального уравнения (4.35).

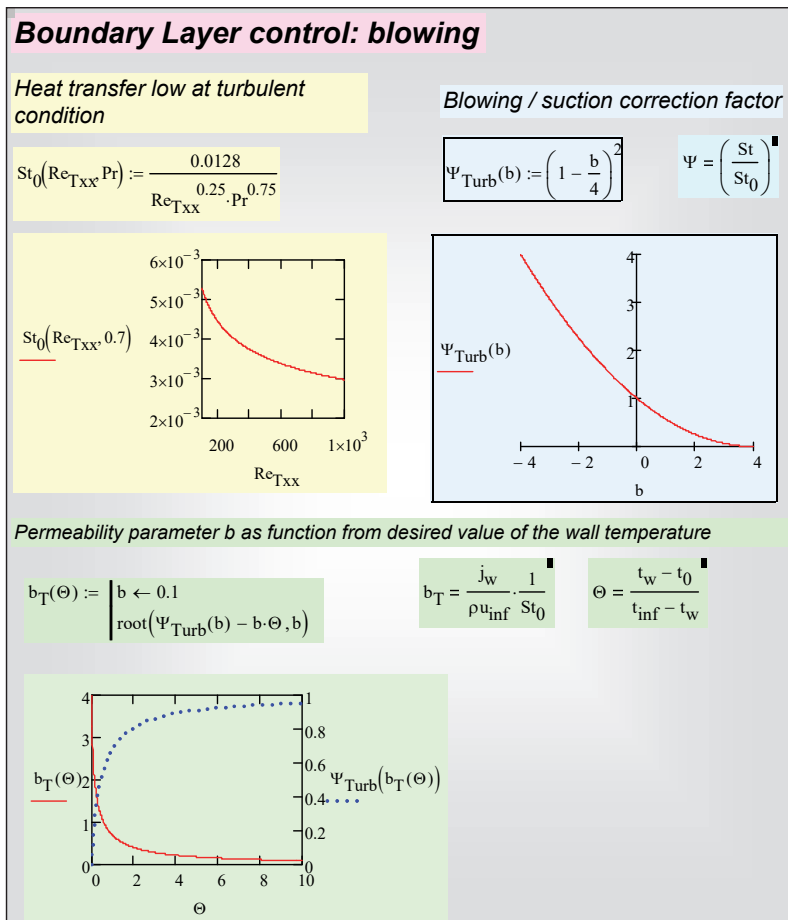


Рис. 4.9. Вычисление параметра проницаемости b_T как функции заданного температурного параметра Θ

Температурный параметр Θ варьируется при последующих расчетах. Нулевое значение Θ соответствует максимальной защите с интенсивным вдувом, когда температура стенки сравнивается в пределе с температурой вдуваемого охлаждающего газа. При этом параметр проницаемости b достигает максимального значения, а корректор Ψ обращается в ноль. Большие значения параметра Θ соответствуют отсутствию вдува; температура поверхности при этом сравнивается с температурой высокотемпературного потока газа. Это обсуждение иллюстрируется нижним графиком на рис. 4.9.

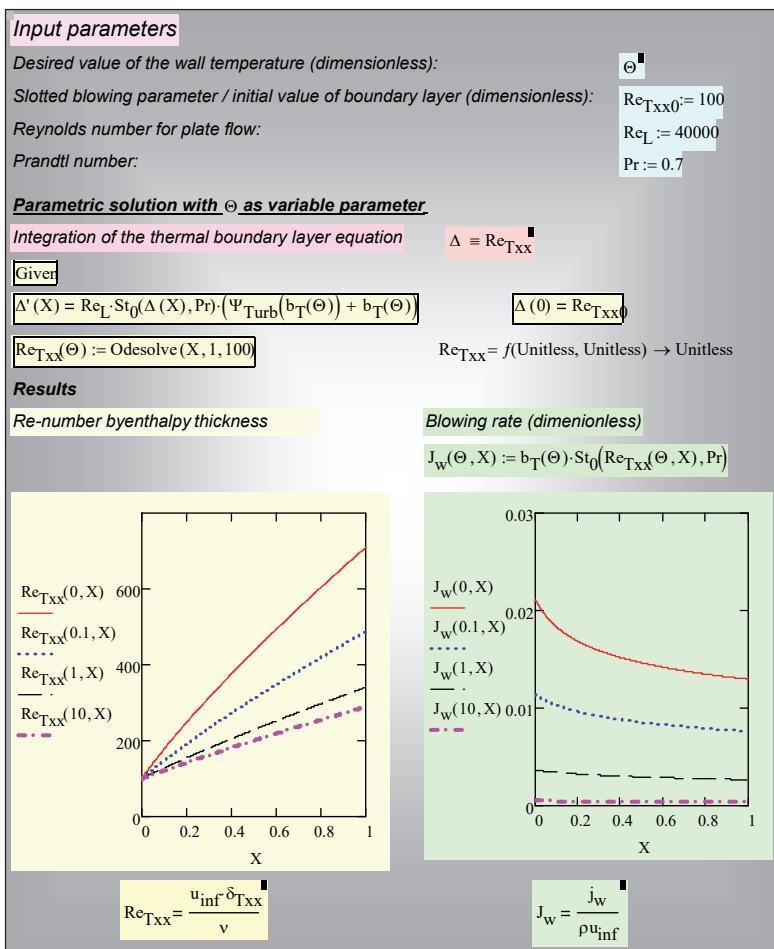


Рис. 4.10. Численное интегрирование уравнения теплового пограничного слоя методом Odesolve и расчет вдува при других значениях параметра Θ

Основные вычисления представлены на рис. 4.10. *Безразмерные* входные параметры задачи выписаны в верхней части рисунка. Напомним, что они рассчитываются по формулам (4.30), (4.32) через непосредственно заданные размерные параметры, показанные на рис. 4.8 (такие как скорость u_∞ и температура t_∞ высокотемпературного потока газа, температура защищаемой поверхности t_w и т.п.)

Далее в программном блоке Mathcad «Given – Odesolve» записаны дифференциальное уравнение (4.35) и начальное условие к нему. Численное решение как функция $Re_{T^{**}}(\Theta, X)$ получается при обращении к встроенному интегратору Odesolve. (Мы используем здесь предоставляемую Mathcad’ом возможность получить решение с варьируемым параметром Θ ; диагностика:

$$Re_{T^{**}} = f(\text{Unitless}, \text{Unitless}) \rightarrow \text{Unitless}$$

подтверждает, что результат интегрирования действительно есть функция двух переменных: параметра и независимой переменной X).

Диаграмма $Re_{T^{**}}(\Theta, X)$ представляет, в безразмерной форме, изменение толщины $\delta_{T^{**}}$ пограничного слоя по длине пластины x с учетом вдува:

$$Re_{T^{**}} \equiv \frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}; \quad X \equiv \frac{x}{L}.$$

Результаты

Главный результат, т.е. величина и распределение вдува, обеспечивающего заданный температурный режим Θ , где

$$\Theta \equiv \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w},$$

представлен на правом графике на рис. 4.10.

Например, при значении параметра $\Theta = 1$ безразмерная величина вдува

$$J_w(\Theta, X) \equiv \frac{j_w(x)}{\rho u_\infty}$$

составит в среднем $\approx 0,003$. При скорости набегающего потока 300 м/с *поперечная* скорость на стенке будет ≈ 1 м/с.

Выбранное для примера значение температурного параметра $\Theta = 1$ соответствует температуре поверхности t_w посередине между высокой температурой потока t_∞ и низкой температурой вдуваемого теплоносителя t_0 .

Напомним, что целью расчета было определение того, каким должен быть вдув, чтобы обеспечить заданное значение температуры стенки t_w .

Графики на рис. 4.9 показывают, что если бы мы поставили задачу еще уменьшить температуру стенки (уменьшить Θ), то потребовалось бы увеличить параметр проницаемости b_T . Согласно нижнему графику на рис. 4.9, при таком усилении вдува Ψ -фактор уменьшается, стремясь к нулю, и, следовательно, уменьшается коэффициент теплоотдачи, что для *целей защиты* поверхности является положительным эффектом.

Как и для задачи горения, анализ может быть уточнен и вычислительная программа усовершенствована, если учесть теплообмен излучением и переменность свойств теплоносителя.

4.4. Защита вдувом при обтекании сферы

В прикладном аспекте, эта задача ассоциируется прежде всего с проблемой защиты спускаемых космических аппаратов при входе в плотные слои атмосферы.

Схема процесса представлена на рис. 4.11.

Начало координат помещено в критической точке. Скорость обтекания берется, как и ранее, из задачи об идеальном обтекании профиля, в данном случае, сферы радиуса R :

$$u_\infty(x) = \frac{3}{2} w \sin\left(\frac{x}{R}\right); \quad \frac{x}{R} \equiv X. \quad (4.41)$$

Безразмерная координата измеряется в масштабе радиуса R сферы и определяет угол (x/R) , отсчитываемый от критической точки.

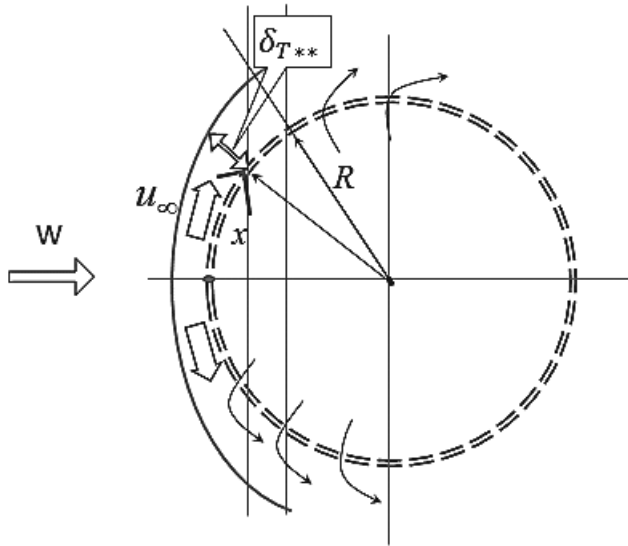


Рис. 4.11. Плоская проекция пронизаемой сферы в высокотемпературном потоке

Записанное ниже *интегральное уравнение теплового пограничного слоя* (4.42) для сферы снабжено примечаниями, поясняющими специфику геометрии этой задачи:

$$\underbrace{d(\rho c_p \cdot u_\infty(X) \cdot \overbrace{[\delta_{T^{**}} \cdot 2\pi(R \cdot \sin(X))]}^{\text{Сечение погранслоя}})}_{\text{Потеря энтальпии потоком теплоносителя}} \Delta t_{\infty W} =$$

$$\left(\underbrace{-q_w}_{\text{Теплоотвод к стенке}} + \underbrace{j_w c_p \cdot \Delta t_{\infty W}}_{\text{Затраты на подогрев вдуваемого теплоносителя}} \right) \cdot \underbrace{[(R \cdot dX) \cdot 2\pi(R \cdot \sin(X))]}_{\text{Кольцевой элемент поверхности теплоотдачи на сфере}}; \quad (4.42)$$

$$\Delta t_{\infty W} \equiv (t_\infty - t_w).$$

После очевидных сокращений получают:

$$\underbrace{d\{u_\infty(X) \cdot [\delta_{T^{**}} \cdot \sin(X)] \Delta t_{\infty W}\}}_{H(X)} =$$

$$= \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty W} \right) \cdot [R \cdot \sin(X)] \cdot dX. \quad (4.43)$$

Величину под знаком дифференциала в левой части (4.43), являющуюся мерой потока энтальпии в погранслое, удобно обозначить как новую зависимую переменную $H(X)$. Известно начальное условие, $H(0) = 0$, поскольку в критической точке скорость u_∞ и сечение потока стремятся к нулю. Интегрирование получившегося ОДУ первого порядка с нулевым начальным условием дает:

$$\begin{aligned}
 H(X) &\equiv u_\infty(X) \cdot [\delta_{T^{**}} \cdot \sin(X)] \Delta t_{\infty w} ; \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \frac{d}{dX} \{H(X)\} &= \\
 &= \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty w} \right) \cdot [R \cdot \sin(X)] ; \\
 H(0) &= 0
 \end{aligned} \right. \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

⇓ интегрирование:

$$H(X) = R \int_0^X \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty w} \right) \cdot \sin(X) \cdot dX.$$

Ясно, что воспользоваться этим формальным решением непосредственно для расчетов нельзя, поскольку недостает связи между тепловым потоком ($-q_w$) и температурным напором ($\Delta t_{\infty w}$). Однако из (4.44) можно получить простое асимптотическое соотношение для близкой окрестности критической точки, благодаря симметрии и гладкости обтекаемого профиля и распределений ($q_w, j_w, \Delta t_{\infty w}$):

$$\left. \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty w} \right)_{X \rightarrow 0} \approx \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty w} \right)_{X=0} + O(X^2); \right\} \Rightarrow \quad (4.45)$$

$$H(X)_{X \rightarrow 0} \approx R \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty w} \right)_{X=0} \int_0^X \sin(X) \cdot dX.$$

Далее следуют простые подстановки и вычисления:

$$\begin{aligned}
 u_{\infty}(X) &= \frac{3}{2} W \cdot \sin(X); \\
 \frac{3}{2} W \cdot \sin(X) \cdot [\delta_{T^{**}} \cdot \sin(X)] \Delta t_{\infty W} \Big|_{X \rightarrow 0} &\approx \\
 &\approx R \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty W} \right)_{X=0} (1 - \cos(X)) \Big|_{X \rightarrow 0} \Rightarrow \\
 \delta_{T^{**}} \Delta t_{\infty W} \Big|_{X \rightarrow 0} &\approx \frac{2}{3} \frac{R}{W} \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty W} \right)_{X=0} \frac{(1 - \cos(X))}{\sin^2(X)} \Big|_{X \rightarrow 0} \quad (4.46) \\
 \frac{(1 - \cos(X))}{\sin^2(X)} \Big|_{X \rightarrow 0} &\approx \frac{1}{2} - \frac{X^2}{24} \\
 \delta_{T^{**}} \Delta t_{\infty W} \Big|_{X \rightarrow 0} &\approx \frac{2}{3} \frac{R}{W} \left(\frac{-q_w}{\rho c_p} + \frac{j_w}{\rho} \cdot \Delta t_{\infty W} \right)_{X=0} \frac{1}{2} \\
 3 \frac{\delta_{T^{**}}}{R} &= \frac{-q_w / \Delta t_{\infty W}}{\rho c_p W} + \frac{j_w}{\rho W}; \quad X = 0,
 \end{aligned}$$

итогом которых является последнее соотношение в (4.46), переписанное ниже с очевидной подстановкой:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (-q_w) / \Delta t_{\infty W}; \\
 3 \frac{\delta_{T^{**}}}{R} &= \frac{\alpha}{\rho c_p W} + \frac{j_w}{\rho W}; \quad X = 0 \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

и дающее искомую связь в критической точке между:

- ✓ толщиной пограничного слоя,
- ✓ коэффициентом теплоотдачи и
- ✓ плотностью поперечного потока массы.

Этот результат получен при анализе интегрального уравнения пограничного слоя, с использованием «идеального» распределения скорости основного потока по окружности сферы и «гладких» условий симметрии в критической точке. Предполагается, что распределение скорости *внешнего потока* не меняется

заметно *при включении вдува или отсоса*, если толщина пограничного слоя остается малой по сравнению с радиусом. Радикальные нарушения идеального обтекания могут наблюдаться с «подветренной стороны», где происходит отрыв потока с образованием вихревого течения.

Соотношение (4.47) не содержит в явной форме ограничений на режим течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный). В окрестности критической точки характерная продольная (по окружности профиля) скорость u_∞ и число Рейнольдса стремятся к нулю, поэтому разумным является предположение о ламинарном течении в близкой окрестности критической точки. Вопрос о переходе к турбулентному режиму следует решать по стандартной процедуре, ведя расчет по окружности сферы и контролируя локальное число Рейнольдса. Как известно, при вдуве профиль скорости имеет перегиб, что является причиной гидродинамической неустойчивости потока. Поэтому возможен ранний переход к турбулентному режиму течения уже вблизи критической точки.

Возвращаясь к основному результату (4.47), заметим, что необходима дополнительная информация для нахождения коэффициента теплоотдачи в критической точке, поскольку неизвестна также толщина пограничного слоя. Эта информация дается законом теплоотдачи (для ламинарного режима) с коррекцией Ψ на поперечный поток массы (параметр проницаемости b):

$$\begin{aligned} \text{St}(\text{Re}_{T^{**}}, \text{Pr}, b) &= \text{St}_0(\text{Re}_{T^{**}}, \text{Pr}) \cdot \Psi(b); \\ \text{St}_0 &= \frac{0,22}{\text{Re}_{T^{**}} \text{Pr}^{4/3}}; \\ b &\equiv \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{\text{St}_0}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Совместное решение (4.47), (4.48) проведено в пакете Mathcad (см. далее).

Предварительно необходимо переписать соотношения (4.48) в терминах асимптотической формулы (4.47) для критической точки:

$$St_0 = \frac{0,22}{Re_{T^{**}} Pr^{4/3}}; \Rightarrow \frac{\alpha}{\rho c_p u_{\infty} W} = \frac{0,22}{\frac{\delta_{T^{**}} u_{\infty} WR}{\nu R} Pr^{4/3}}; \Rightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{\alpha}{\rho c_p W} \right)}_{St_{w0}} = \frac{0,22}{\underbrace{\left(\frac{\delta_{T^{**}}}{R} \right)}_{\Delta} \underbrace{\left(\frac{WR}{\nu} \right)}_{Re}} Pr^{4/3}; \quad (4.49)$$

$$b \equiv \frac{j}{\rho u_{\infty} St_0} \Rightarrow b \equiv \frac{j}{\rho u_{\infty} W} \frac{1}{\frac{\alpha}{\rho c_p u_{\infty} W}} \Rightarrow b \equiv \underbrace{\left(\frac{j}{\rho W} \right)}_J \underbrace{\left(\frac{1}{\rho c_p W} \right)}_{St_{w0}}$$

Комбинируя (4.47), (4.49), получают:

$$\begin{cases} 3\Delta = St_w + J; \\ St_w = St_{w0} \cdot \Psi(b); \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\left(St_{w0} = \frac{0,22}{\Delta \cdot Re \cdot Pr^{4/3}}; \quad b = J \frac{1}{St_{w0}} \right).$$

Первое из этих уравнений получено из интегрального уравнения пограничного слоя с учетом симметрии в окрестности критической точки, второе – это формулировка закона теплоотдачи с коррекцией на поперечный поток массы.

Для непроницаемой стенки ($J = 0$):

$$\left. \begin{cases} 3\Delta = St_w; \\ St_w = St_{w0}; \\ \left(St_{w0} = \frac{0,2205}{\Delta \cdot Re_{RW} \cdot Pr^{4/3}} \right) \end{cases} \right\} \Rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{0,2205/3}{Re_{RW} \cdot Pr^{4/3}}}$$

$$Nu_R \equiv St_w (Re_{RW} \cdot Pr) = \frac{0,2205}{\sqrt{\frac{0,2205/3}{Re_{RW} \cdot Pr^{4/3}} \cdot Re_{RW} \cdot Pr^{4/3}}} \cdot Re_{RW} \cdot Pr \Rightarrow \quad (4.51)$$

$$Nu_R = \sqrt{0,2205 \cdot 3} Re_{RW}^{1/2} \cdot Pr^{1/3} = 0,815 \cdot Re_{RW}^{1/2} \cdot Pr^{1/3};$$

$$Nu_D = 1,15 \cdot Re_{DW}^{1/2} \cdot Pr^{1/3}.$$

Решение системы (4.50) представлено на рис. 4.12–4.14. Функции, задающие закон теплоотдачи, показаны на рис. 4.12. График иллюстрирует влияние вдува (и отсоса) на интенсивность теплоотдачи. При значении параметра проницаемости $b \approx 4$ теплообмен между потоком газа и поверхностью сферы практически блокируется.

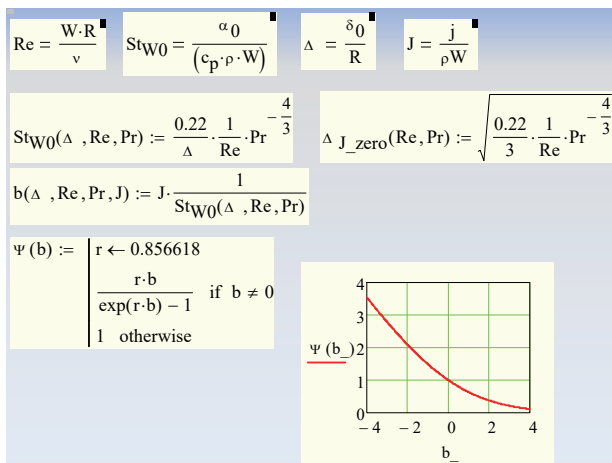


Рис. 4.12. Закон теплоотдачи на проницаемой поверхности

Решение нелинейной системы (4.50) показано на рис. 4.13. Функция Dlt находит толщину теплового пограничного слоя в критической точке сферы. График иллюстрирует рост толщины погранслоя по мере увеличения вдува, при различных значениях числа Рейнольдса набегающего потока.

Результирующий эффект блокирования теплоотдачи при вдуве демонстрируется на рис. 4.14. При массовой скорости вдува, составляющей несколько процентов от массовой скорости набегающего потока газа, интенсивность теплоотдачи снижается практически до нуля. Замечание о влиянии ускорения потока. Несмотря на увеличение скорости внешнего потока (примерно по закону $u_\infty \sim x$) в непосредственной окрестности критической точки, давление в потоке будет оставаться примерно постоянным:

$$p + \frac{\rho u_\infty^2}{2} = \text{const}; \quad \frac{\partial}{\partial x} p = -\rho u_\infty \left(\frac{\partial}{\partial x} u_\infty \right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

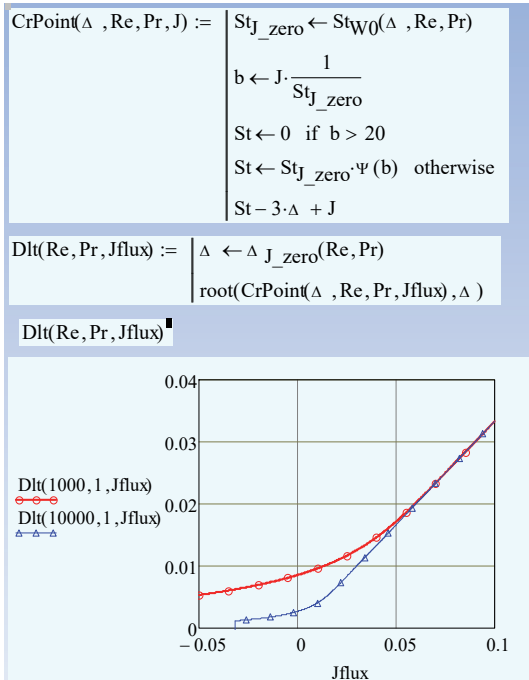


Рис. 4.13. Вычисление толщины пограничного слоя в критической точке

$$\text{St}_b(\text{Re}, \text{Pr}, J) := \begin{cases} \Delta \leftarrow \text{Dlt}(\text{Re}, \text{Pr}, J) \\ \text{St}_{j_zero} \leftarrow \text{St}_{W0}(\Delta, \text{Re}, \text{Pr}) \\ b \leftarrow J \cdot \frac{1}{\text{St}_{j_zero}} \\ \left(\frac{\text{St}_{j_zero} \cdot \Psi(b)}{b} \right) \end{cases}$$

$$\text{St}_b(\text{Re}, \text{Pr}, J)_0 = \text{St}_W$$

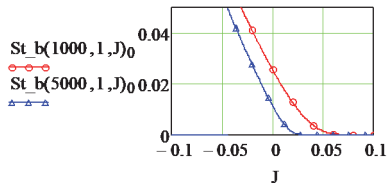


Рис. 4.14. Расчет теплоотдачи в зависимости от параметра вдува

Действительно, в уравнении Бернулли для внешнего потока скорость стремится к нулю в точке торможения, а ее производная остается постоянной величиной (скорость стремится к нулю по линейному закону, см. (4.41)). Следовательно, производная от давления будет нулевой величиной, а само давление – постоянным в близкой окрестности критической точки. Другими словами, течение будет безградиентным в этой окрестности, и единственным управляющим фактором остается скорость вдува/отсоса (в случае проницаемой стенки). Существует некоторая неопределенность при анализе течения в окрестности критической точки.

Напомним, что мы исходим из разумных предположений о существовании пограничного слоя некоторой конечной толщины в критической точке и о гладких условиях симметрии.

Численное интегрирование

В предыдущем параграфе рассчитана теплоотдача в критической точке сферы при наличии вдува. Продолжим анализ проблемы и рассмотрим далее задачу о *распределении локальной теплоотдачи* по поверхности сферы с равномерно распределенными вдувом и температурным напором. Начальные условия в критической точке уже определены, и в результате интегрирования уравнения (4.44) будут получены распределения плотности теплового потока, толщины пограничного слоя и локального коэффициента теплоотдачи. Безразмерное представление уравнения (4.44) сформируем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 H(X) &\equiv \frac{H(X)}{W \cdot R \cdot \Delta t_{\infty w0}} \equiv \underbrace{\left(\frac{u_{\infty}(X)}{W} \right)}_{\frac{3}{2} \sin(X)} \underbrace{\left(\frac{\delta_{T^{**}}}{R} \right)}_{\Delta} \underbrace{\left(\frac{\Delta t_{\infty w}}{\Delta t_{\infty w0}} \right)}_{\Theta=1} \sin(X) \equiv \\
 &\equiv \frac{3}{2} \cdot \sin^2(X) \cdot \Delta \cdot \Theta;
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\text{St}_w \equiv \frac{-q_w / \Delta t_{\infty w}}{\rho c_p W}; \quad J \equiv \frac{j_w}{\rho W}; \quad \Theta \equiv \frac{\Delta t_{\infty w}}{\Delta t_{\infty w0}};$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dX} \{H(X)\} = \frac{\Theta}{1} (\text{St}_w + J) \cdot \sin(X) \\ H(0) = 0. \end{cases}$$

Главной проблемой при интегрировании дифференциального уравнения (4.44) вдоль поверхности сферы является диагностика режима течения в пограничном слое, т.е. определение координаты возможного перехода от ламинарного течения в окрестности критической точки к турбулентному режиму. Мы используем для этой цели корреляцию (рис. 4.15) между: параметром проницаемости b , Ψ – коррекцией для числа Стантона и *Формпараметром* H – отношением толщины вытеснения к толщине потери импульса; критическим числом Рейнольдса.

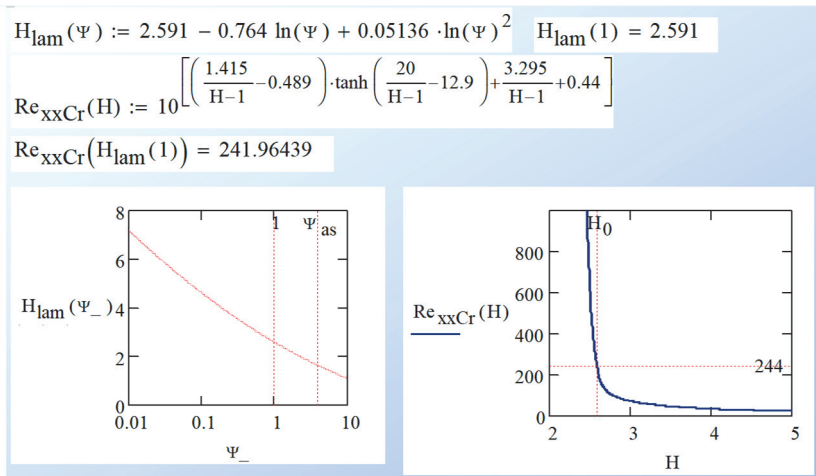


Рис. 4.15. Связь формпараметра H и Ψ -фактора. Зависимость критического числа Рейнольдса от формпараметра пограничного слоя

Корреляция $\Psi(b)$, необходимая также для расчета интенсивности переноса в зависимости от поперечного потока массы, представлена на рис. 4.16.

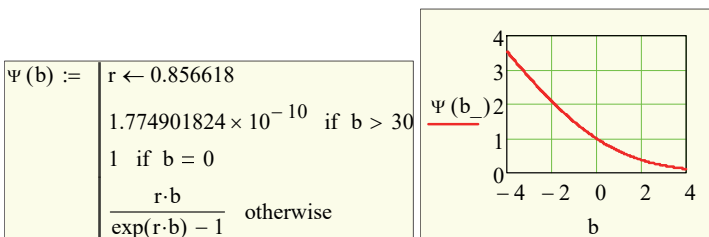


Рис. 4.16. Корреляция $\Psi(b)$

Расчет локальной теплоотдачи с учетом проницаемости стенки осуществляется программным блоком на рис. 4.17. Логическим центром является диагностика режима течения при наличии вдува.

Вычисления правой части (RHS) дифференциального уравнения (4.52) производятся программным блоком на рис. 4.18. Численное интегрирование уравнения пограничного слоя осуществляется методом Odesolve.

Основными варьируемыми параметрами при расчетах являются значения вдува J , отнесенного к массовой скорости набегающего потока газа, и число Re внешнего потока (подсчитанное по радиусу сферы). Поскольку непосредственным результатом интегрирования является поток энтальпии ($hFlux$), программный блок на рис. 4.19 вычисляет искомые распределения числа Стантона, параметра проницаемости и толщины пограничного слоя.

$$\begin{aligned}
 St_{W_Jzero_Lam}(X, \Delta, Re, Pr) &:= \frac{0.22}{\Delta \cdot Re} \cdot Pr^{-\frac{4}{3}} \\
 St_{W_Jzero_Turb}(X, \Delta, Re, Pr) &:= U_{inf}(X) \cdot \frac{0.0128}{(Re \cdot \Delta \cdot U_{inf}(X))^{0.25} \cdot Pr^{0.75}} \\
 St_{W_J}(X, \Delta, J, Re, Pr) &:= \begin{cases} Re_{t_{xx}} \leftarrow \Delta \cdot Re \cdot U_{inf}(X) \\ \text{"let regime Lam"} \\ St_{Lam} \leftarrow St_{W_Jzero_Lam}(X, \Delta, Re, Pr) \\ b \leftarrow \frac{J}{St_{Lam}} \\ \Psi_- \leftarrow \Psi(b) \\ Re_{xxCr_} \leftarrow Re_{xxCr}(H_{lam}(\Psi_-)) \\ \text{if } Re_{t_{xx}} \leq Re_{xxCr_} \\ \quad \text{"} \\ \quad St_W \leftarrow St_{Lam} \cdot \Psi_- \\ \text{otherwise} \\ \quad St_W \leftarrow St_{W_Jzero_Turb}(X, \Delta, Re, Pr) \\ \quad b \leftarrow \frac{J}{St_W} \\ \quad \Psi_- \leftarrow \Psi(b) \\ \quad St_W \leftarrow St_W \cdot \Psi_- \\ \quad (St_W) \\ \quad b \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 4.17. Расчет теплоотдачи в зависимости от параметра вдува.
Диагностика перехода

```

RHS(X, hFlux) :=
  if X < 10-3
  Δ ← Δ 0
  St ←  $\frac{0.22}{\Delta 0} \cdot \frac{1}{Re} \cdot Pr^{-\frac{4}{3}}$ 
  b ← J ·  $\frac{1}{St}$ 
  St ← St · ψ(b)
  otherwise
  ""
  Δ ←  $\frac{hFlux}{\frac{3}{2} \cdot \sin(X)^2 \cdot \theta}$ 
   $\begin{pmatrix} St \\ b \end{pmatrix} \leftarrow StW\_J(X, \Delta, J, Re, Pr)$ 
   $\theta \cdot (St + J) \cdot \sin(X)$ 
  J = 0.0001   Re = 200000
  Given
  hFlux(X) = RHS(X, hFlux(X))   hFlux(0) = 0
  hFlux := Odesolve(X, 2)

```

Рис. 4.18. Численное интегрирование уравнения пограничного слоя методом Odesolve и представление результатов как распределений числа Стантона, параметра проницаемости и толщины пограничного слоя

```

Results
Distr(X) :=
  if X < 10-3
  Δ ← Δ 0
  St ←  $\frac{0.22}{\Delta 0} \cdot \frac{1}{Re} \cdot Pr^{-\frac{4}{3}}$ 
  b ← J ·  $\frac{1}{St}$ 
  St ← St · ψ(b)
  otherwise
  ""
  Δ ←  $\frac{hFlux(X)}{\frac{3}{2} \cdot \sin(X)^2 \cdot \theta}$ 
   $\begin{pmatrix} St \\ b \end{pmatrix} \leftarrow StW\_J(X, \Delta, J, Re, Pr)$ 
   $\begin{pmatrix} St \\ b \\ \Delta \end{pmatrix}$ 
  St(X) := Distr(X) 0
  b(X) := Distr(X) 1
  Δ(X) := Distr(X) 2

```

Рис. 4.19. Расчет числа Стантона, параметра проницаемости и толщины пограничного слоя

Далее представлены три серии расчетов с увеличивающимся вдувом (рис. 4.20–4.22). Изменения характера обтекания связаны с ранним переходом к турбулентному режиму течения и отгнетением пограничного слоя.

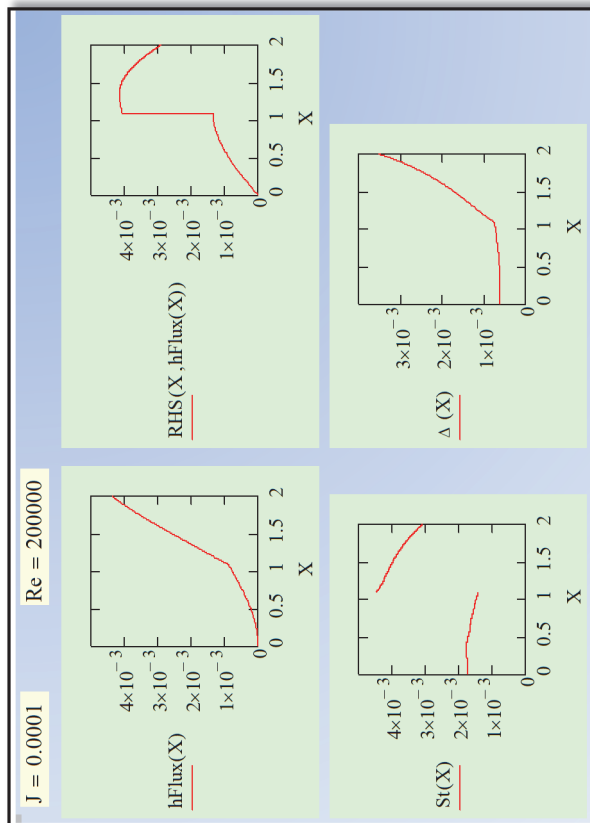


Рис. 4.20. Распределения числа Стантона, параметра пропиаемости и толщины пограничного слоя (минимальный вдув, переход при $X=1$)

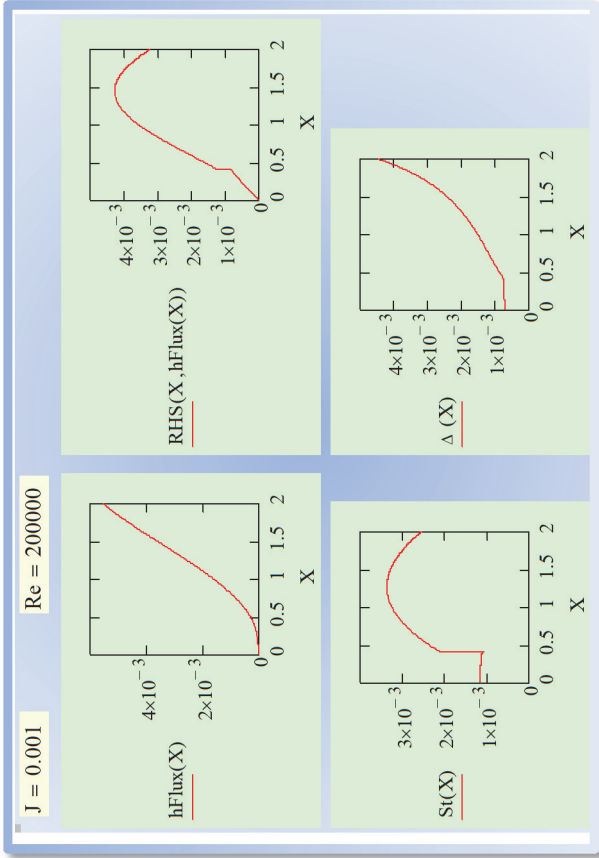


Рис. 4.21. Распределения числа Стантона, параметра проницаемости и толщины пограничного слоя (вдв $X=0,5$, переход при $X=0,5$, изменение характера обтекания)

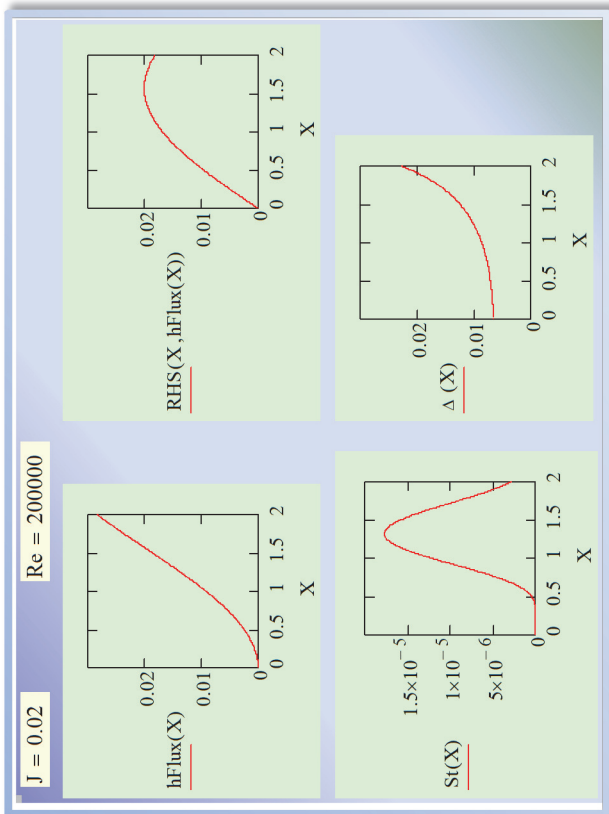


Рис. 4.22. Распределения числа Стантона, параметра проницаемости и толщины пограничного слоя (вдвух 2%, блокирование теплообмена)

Основной результат состоит в том, что относительно небольшой вдув, порядка нескольких процентов от массовой скорости набегающего потока, может практически полностью блокировать теплообмен между высокотемпературным потоком газа и проницаемой стенкой.

Ряд важных усовершенствований расчетной модели может быть осуществлен достаточно просто.

Во-первых, целесообразно проводить параллельный расчет гидродинамического и теплового пограничного слоя, что позволит более точно описать ламинарно–турбулентный переход.

Во-вторых, следует учесть сильную переменность свойств газа в пограничном слое. Соответствующие рекомендации имеются в специальной литературе.

В-третьих, в расширенной постановке задачи теплообмена должен быть учтен радиационный теплообмен, существенный при высоком уровне температур в реальных ситуациях защиты.

Дополнительные модификации программы могут учесть переменность вдува и температурного напора (или теплового потока) по поверхности обтекаемого тела

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя.

2. Что такое *толщина потери концентрации* и *параметр проницаемости*?

3. Запишите закон Фика. Что такое *плотность диффузионного потока* массы и *коэффициент массоотдачи*?

4. Сформулируйте понятие *стандартного закона массообмена*.

5. Опишите применение интегрального метода для расчета параметров вдува при защите поверхности от воздействия высокотемпературного потока.

Раздел 2. ДВУХФАЗНЫЙ ТЕПЛОМАССОБМЕН

Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОГИДРОДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

5.1. Фазовые равновесия

Испарение и конденсация, плавление твердых тел и отвердевание расплавов – процессы теплообмена, отличительной чертой которых является выделение (или поглощение) скрытой теплоты фазового перехода на поверхности раздела. Теплота отводится от поверхности или подводится к ней через контактирующие фазы. Расчет интенсивности этих процессов и составляет предмет тепломассообмена при фазовых превращениях.

Поверхность раздела фаз – это поверхность разрыва, на которой скачком меняются свойства вещества, такие как плотность, теплопроводность, вязкость. Два свойства непосредственно связаны с фазовой границей: это теплота фазового превращения r (разность энтальпий на линии насыщения, Дж/кг) и коэффициент поверхностного натяжения σ (избыточная поверхностная энергия, Дж/м²).

Приведем краткие сведения из термодинамического анализа равновесия фаз. Начнем с демонстрации того, как основные соотношения термодинамики приспособливаются к специальному случаю – системам с *переменной массой*, когда жидкость и пар *обмениваются массой* при испарении и конденсации. Выражение *первого закона* термодинамики для *единичной массы* записывается как обычно,

$$du = dQ - p \cdot dv, \quad (5.1)$$

и означает, что изменение энергии фиксированной массы происходит вследствие подвода теплоты и совершения внешней работы. Сделаем подстановку согласно второму закону термодинамики $dQ = T \cdot ds$, где s – удельная энтропия, и умножим уравнение (5.1) для единичной массы на произвольное значение массы m :

$$m du = T \cdot m ds - p \cdot m dv. \quad (5.2)$$

Дальнейшие преобразования имеют целью учесть *переменность* массы.

Выпишем тождества, следующие из правила дифференцирования произведения и очевидных равенств $mu = U$, $ms = S$, $mv = V$:

$$\begin{aligned} m du &= d(mu) - u dm = dU - u dm; \\ m ds &= d(ms) - s dm = dS - s dm; \\ m dv &= d(mv) - v dm = dV - v dm. \end{aligned} \quad (5.3)$$

После подстановки (5.3) в (5.2) и перегруппировки получим:

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV + (u - Ts + pv) dm, \quad (5.4)$$

где

$$u - Ts + pv = \mu(p, T) - \quad (5.5)$$

химический потенциал, или потенциал Гиббса в расчете на единицу массы:

$$\begin{aligned} G &= U + pV - TS; \\ \frac{G(p, T, m)}{m} &= \mu(p, T) = \left(\frac{U}{m}\right) + p\left(\frac{V}{m}\right) - T\left(\frac{S}{m}\right) = u + pv - Ts. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Термодинамический потенциал Гиббса, как мы увидим далее, играет главную роль при анализе фазовых равновесий.

Уравнение (5.4), переписанное в виде

$$TdS = dU + p dV - \mu \cdot dm, \quad (5.7)$$

называется уравнением Гиббса для систем с переменной массой.

Для полного дифференциала потенциала Гиббса dG , как следует из (5.6) и (5.7), имеем:

$$\begin{aligned} dG &= dU + p dV + V dp - T dS - S dT = \\ &= dU + p dV + V dp - dU - p dV + \mu dm - S dT = V dp - S dT + \mu dm; \\ dG &= \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T, m} dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p, m} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)_{p, T} dm, \end{aligned} \quad (5.8)$$

откуда:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T, m} = V; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p, m} = -S; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)_{p, T} = \mu. \quad (5.9)$$

Учитывая, что $G = \mu m$, получим из (5.9)

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = v; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p = -s;$$

$$d\mu(p, T) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p dT = v dp + (-s) dT. \quad (5.10)$$

Соотношения (5.10) важны для последующих вычислений: они позволяют выразить изменения химического потенциала через непосредственно измеряемые величины, такие как давление, температура, удельный объем.

Условия равновесия, строго выводимые в термодинамике, кроме почти очевидных требований одинаковости давления и температуры в фазах, например, в жидкости (l) и паре (v), включают также равенство химических потенциалов:

$$p_l = p_v; \quad T_l = T_v; \quad \mu_l = \mu_v. \quad (5.11)$$

5.2. Уравнение кривой насыщения

Из условия равновесия фаз выводится уравнение для кривой насыщения «жидкость–пар» (уравнение Клапейрона–Клаузиуса). Действительно, равенство химических потенциалов выражает в неявной форме связь давления и температуры, которую и называют кривой насыщения:

$$\mu_l(p, T) = \mu_v(p, T) \Rightarrow p = p(T). \quad (5.12)$$

Равенство химических потенциалов на кривой насыщения означает, что и их дифференциалы (приращения вдоль кривой насыщения) должны быть равны. С учетом (5.10) получим:

$$d\mu_l = d\mu_v \Rightarrow v_l dp + (-s_l) dT = v_v dp + (-s_v) dT, \quad (5.13)$$

или

$$(s_v - s_l) dT = (v_v - v_l) dp \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{s_v - s_l}{v_v - v_l}. \quad (5.14)$$

Изменение энтропии при фазовом переходе связано с подводом теплоты фазового перехода r :

$$\Delta s = \frac{r}{T}. \quad (5.15)$$

Следовательно:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v_v - v_l)}. \quad (5.16)$$

Это точное термодинамическое соотношение для кривой насыщения. В нашем курсе мы записываем его в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{dP_s}{dT_s} = \frac{r}{T_s} \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_l - \rho_v}. \quad (5.17)$$

Для давлений, далеких от критического, справедливо $\rho_l \gg \rho_v$, поэтому

$$\frac{dP_s}{dT_s} \approx \frac{r \rho_v}{T_s}. \quad (5.18)$$

Чтобы перейти к явному выражению $p_s(T_s)$, интегрируют дифференциальное уравнение (5.17) или (5.18). При этом необходимо знать, как изменяются вдоль кривой насыщения теплота парообразования и плотности фаз. Для невысоких давлений можно записать

$$r \approx \text{const}; \quad \rho_v = \frac{p_s}{RT_s} \Rightarrow \frac{dp_s}{dT_s} \approx \left(\frac{r}{R}\right) \frac{p_s}{T_s^2}. \quad (5.19)$$

Интегрируя (5.19) с начальным условием $p_{s0}(T_{s0})$, получают

$$\ln \frac{p_s}{p_{s0}} \approx \frac{r}{R} \left(\frac{1}{T_{s0}} - \frac{1}{T_s} \right), \quad (5.20)$$

или

$$p_s = c \cdot e^{-\frac{r}{RT_s}}; \quad c = p_{s0} \cdot e^{\frac{r}{RT_{s0}}}. \quad (5.21)$$

В расчетной практике уравнение вида (5.20) применяется для кусочной аппроксимации кривой насыщения, обычно заданной в табличной форме (например, в таблицах водяного пара).

5.3. Поверхностное натяжение и фазовое равновесие

Рассмотрим теперь равновесие фаз, разделенных *искривленной* поверхностью. Примерами служат сферическая капля жидкости в объеме пара или сферический пузырек пара в объеме жидкости. В

качестве исходного положения запишем уравнение Лапласа как условие механического равновесия:

$$\Delta p_{\sigma} = p_2 - p_1 = \frac{2\sigma}{R}. \quad (5.22)$$

Будем считать, что центр кривизны находится в фазе 2, и поэтому давление в фазе 2 больше давления в фазе 1 на величину *лапласовского* давления $\Delta p_{\sigma} > 0$. Температура T в системе постоянна; соответствующее давление на кривой насыщения (для *плоской* поверхности раздела) обозначим как p_0 .

Из качественного анализа проблемы ясно, что давление насыщенного пара над искривленной поверхностью жидкости должно измениться по сравнению с p_0 – увеличиться для выпуклой и уменьшиться для вогнутой поверхности. Это изменение обозначим через Δp_s .

Измененное по сравнению с плоской поверхностью раздела состояние будет характеризоваться новыми давлениями в фазах:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Delta p_1; & p_2 &= p_0 + \Delta p_2; \\ p_2 - p_1 &= \Delta p_{\sigma} = \Delta p_2 - \Delta p_1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Условие равенства химических потенциалов (5.11) теперь запишется следующим образом:

$$\mu_1(p_0 + \Delta p_1, T) = \mu_2(p_0 + \Delta p_2, T). \quad (5.24)$$

Полагая температуру фиксированной, а изменения давления небольшими по сравнению с исходным значением p_0 , получим связь между этими изменениями, используя (5.10) как разложение:

$$\begin{aligned} \mu_1(p_0, T) + v_1 \cdot \Delta p_1 &\approx \mu_2(p_0, T) + v_2 \cdot \Delta p_2 \Rightarrow \\ v_1 \cdot \Delta p_1 &\approx v_2 \cdot \Delta p_2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Химические потенциалы в левой и правой части сокращаются: они равны в силу условия равновесия над плоской поверхностью раздела фаз. Знак приближенного равенства применяется потому, что мы считаем удельные объемы примерно постоянными при малых, но конечных изменениях давления. Для несжимаемой жидкости это очень хорошее приближение. Для газовой фазы (пара) ошибка может быть заметной, если изменения давления вели-

ки; в случае идеального газа вычисления можно уточнить, применяя уравнение состояния идеального газа и интегрируя приращение потенциала вдоль изотермы T .

Напомним, что нашей целью является расчет изменения давления в насыщенном паре Δp_s . Если фаза 2 – жидкость, т.е. это капля жидкости в объеме пара, то

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Delta p_s; & p_2 &= p_0 + \Delta p_s + \Delta p_\sigma; \\ \Delta p_1 &= \Delta p_s; & \Delta p_2 &= \Delta p_s + \Delta p_\sigma \end{aligned} \quad (5.26)$$

Смотрите рис. 5.1.

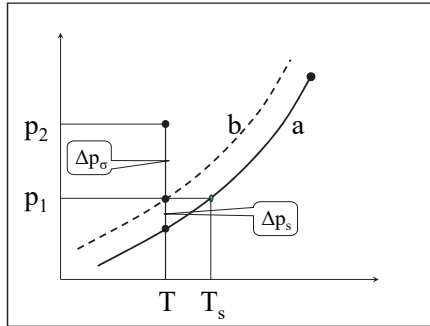


Рис. 5.1. Равновесие «капля – пар»:

- a – кривая насыщения над плоской поверхностью раздела;
- b – кривая насыщения над выпуклой поверхностью раздела

После подстановки (5.26) в (5.25) и замены числовых индексов на мнемонические получим:

$$\Delta p_s = \frac{v_l}{v_v - v_l} \cdot \Delta p_\sigma \Rightarrow \Delta p_s = \frac{\frac{1}{\rho_l}}{\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}} \cdot \Delta p_\sigma \Rightarrow \quad (5.27)$$

$$\Delta p_s = \frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \cdot \Delta p_\sigma.$$

Итак, для капель жидкости $\Delta p_s > 0$ (Δp_σ положительно по соглашению). Следовательно, давление пара над каплями больше чем над плоской поверхностью раздела. Именно поэтому становится постепенно видимым туман: мельчайшие капли испаряются, а крупные растут за их счет.

На рисунке 5.1 показано, что состояние пара (p_1, T) является переохлажденным на величину $T_s - T$.

Если фаза 2 – пар, т.е. это пузырек пара в объеме жидкости, то

$$\begin{aligned} p_2 &= p_0 + \Delta p_s; & p_1 &= p_2 - \Delta p_\sigma = p_0 + \Delta p_s - \Delta p_\sigma; \\ \Delta p_2 &= \Delta p_s; & \Delta p_1 &= \Delta p_s - \Delta p_\sigma \end{aligned} \quad (5.28)$$

Смотрите рис. 5.2.

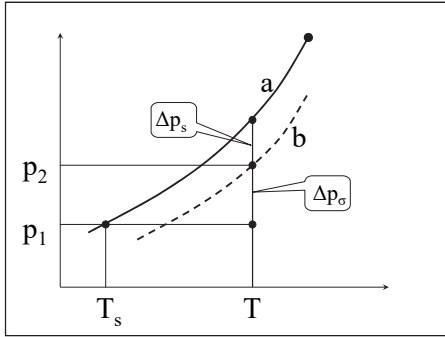


Рис. 5.2. Равновесие «пузырек пара – жидкость»:

а – кривая насыщения над плоской поверхностью раздела;

б – кривая насыщения над выпуклой поверхностью раздела

После подстановки (5.28) в (5.25) и замены числовых индексов на мнемонические получим:

$$\begin{aligned} v_l \cdot (\Delta p_s - \Delta p_\sigma) &\approx v_v \cdot \Delta p_s \Rightarrow \\ \Delta p_s &= -\frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \Delta p_\sigma. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Итак, для вогнутой поверхности пузырьков пара $\Delta p_s < 0$, т.е. давление пара над вогнутой поверхностью жидкости меньше чем над плоской поверхностью раздела.

На рисунке 5.2 показано, что состояние жидкости (p_1, T) является перегретым на величину $T - T_s$.

Формулы (5.27), (5.29) показывают, что изменение давления насыщенных паров над искривленной поверхностью мало по сравнению с лапласовским давлением, пока плотность пара мала по сравнению с плотностью жидкости, т.е. при не слишком высоких давлениях.

5.4. Поверхностное натяжение и образование зародышей новой фазы. Критический радиус

Энергетический барьер. Критический радиус зародыша новой фазы

Вычислим изменение потенциала Гиббса при образовании в большом объеме исходной фазы (1) сферического зародыша (ядра) новой фазы (2) радиусом R :

$$G = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + 4\pi R^2 \sigma; \quad G_0 = \mu_1 (m_1 + m_2); \quad (5.30)$$

$$\Delta G = G - G_0 = -(\mu_1 - \mu_2) m_2 + 4\pi R^2 \sigma,$$

где m_1 и m_2 – массы исходной (1) и новой (2) фаз; $\mu_1(p_1, T)$, $\mu_2(p_1, T)$ – химические потенциалы объемных фаз, т.е. без учета поверхностных эффектов; $4\pi R^2 \sigma$ – избыточная поверхностная энергия, связанная с образованием поверхности раздела фаз при возникновении зародыша новой фазы. Подчеркнем, что поверхностное натяжение σ , Дж/м², интерпретируется как избыточная (по сравнению с объемной фазой) поверхностная энергия, отнесенная к единице поверхности раздела.

Равновесие в системе при

$$m_1 + m_2 = \text{const}, \quad p = \text{const}, \quad T = \text{const}$$

реализуется посредством обмена веществом между фазами $m_1 \leftrightarrow m_2$ при условии, что вариация G (или ΔG) будет нулевой в окрестности равновесной точки.

Учитывая

$$m_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{v_2}, \quad (5.31)$$

получим ΔG как функцию радиуса ядра:

$$\Delta G = G - G_0 = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{v_2} \frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 \sigma. \quad (5.32)$$

Условие равновесия можно представить теперь как

$$\left. \frac{\partial(\Delta G)}{\partial R} \right|_{p, T = \text{const}} = 0, \quad (5.33)$$

что дает выражение для критического (равновесного) радиуса:

$$-\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{v_2} 4\pi R_{cr}^2 + 8\pi R_{cr} \sigma = 0 \Rightarrow R_{cr} = \frac{2\sigma v_2}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (5.34)$$

Ясно, что должно выполняться условие $\mu_1(p, T) > \mu_2(p, T)$. Это неравенство определяет явление *пересыщения* исходной фазы.

Уравнение (5.32) для потенциала переписывается с учетом (5.34) следующим образом:

$$\Delta G = -\frac{2\sigma}{R_{cr}} \frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 \sigma = 4\pi \sigma R_{cr}^2 \left(-\frac{2}{3} \frac{R^3}{R_{cr}^3} + \frac{R^2}{R_{cr}^2} \right). \quad (5.35)$$

Зависимость $\Delta G(R)$ имеет максимум при $R = R_{cr}$. В области малых R , $R < R_{cr}$, преобладает второе (положительное) слагаемое в скобках, а при больших R , $R > R_{cr}$ – первое, отрицательное слагаемое (рис. 5.3).

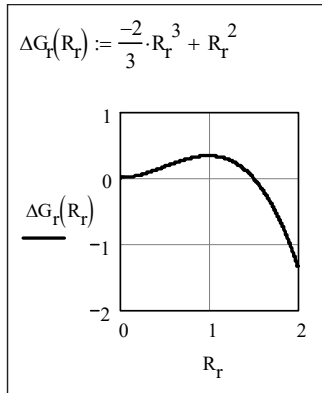


Рис. 5.3. Энергетический барьер при образовании новой фазы (безразмерное представление)

Максимальное значение ΔG ,

$$\Delta G_{\max} = \frac{4}{3} \pi \sigma R_{cr}^2, \quad (5.36)$$

представляет собой работу, которая должна быть затрачена на образование равновесного зародыша R_{cr} , или потенциальный барьер, который должен быть преодолен при флуктуационном процессе возникновения зародышей новой фазы.

Состояние системы «исходная фаза + зародыш R_{cr} » является *неустойчивым* равновесием (*метастабильным* состоянием). Устойчивым было бы состояние с минимумом ΔG , а не с максимумом, как на рис. 5.3. Поскольку существует вероятность преодолеть потенциальный барьер, то с некоторой частотой будут возникать образования (ядра) новой фазы с размерами $R > R_{cr}$. Их дальнейший рост будет уже связан с энергетически выгодным *уменьшением* потенциала Гиббса (кривая справа от максимума на рис. 5.3). По такому сценарию начинается фазовый переход в объеме исходной метастабильной фазы.

Частота нуклеации. Центры конденсации и парообразования

Вероятность преодоления энергетического барьера оценивается Больцмановским экспоненциальным множителем:

$$\exp\left(-\frac{\Delta G_{\max}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{4\pi\sigma R_{cr}^2}{3kT}\right), \quad (5.37)$$

где kT – энергия теплового движения, k – постоянная Больцмана. Частота нуклеации J , $(\text{м}^3\text{с})^{-1}$, т.е. частота (1/с) образования зародышей новой фазы в единице объема (м^3), определяется уравнением Фольмера (M. Volmer):

$$J = N_1 \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi t}} \exp\left(-\frac{4\pi\sigma R_{cr}^2}{3kT}\right), \quad (5.38)$$

где N_1 – число молекул исходной фазы в единице объема, t – масса одной молекулы.

Применение этой формулы к кипению воды при атмосферном давлении дало парадоксальный результат. Оказалось, что для тех умеренных перегревов, которые имеют место на практике (примерно 10°C) и при которых мы наблюдаем развитое кипение, формула дает ничтожно малые значения скорости нуклеации, такие, что никакого образования пузырьков пара мы не должны были бы наблюдать. Другими словами, теория нуклеации Фольмера находится в противоречии с опытом.

Разрешение этого парадокса было найдено в том, что в действительности образование новой фазы происходит на различных включениях, загрязнениях, пылинках, коллоидных частицах, микронеровностях поверхности и т.п. – на готовых *центрах конденсации или парообразования*.

Например, при кипении на «приработанных» поверхностях центрами служат микроуглубления с размерами, не меньшими критического радиуса R_{cr} (5.34).

Значительные перегревы наблюдаются только для тщательно очищенных сред, и в таких условиях получается удовлетворительное согласование с теорией гомогенной нуклеации Фольмера (5.38). Для воды при атмосферном давлении и при температуре перегретой жидкости 302°C получается частота нуклеации $10^6 (\text{м}^3\text{с})^{-1}$, а при температуре 304°C – $10^{12} (\text{м}^3\text{с})^{-1}$. Таким образом, в очень узком интервале температур частота достигает значений, соответствующих практически мгновенному вскипанию. Эти значения, $302^\circ\text{C} \div 304^\circ\text{C}$, принимают за предельную возможную температуру перегрева жидкости.

Формулы для критического радиуса

Ранее была получена следующая формула (5.34) для критического радиуса:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma v_2}{\mu_1(p, T) - \mu_2(p, T)}. \quad (5.39)$$

Разность химических потенциалов в знаменателе должна быть положительной, $\mu_1(p, T) - \mu_2(p, T) > 0$, что означает условие пересыщения исходной фазы.

Мы намереемся записать эту формулу через непосредственно задаваемые величины, например, переохлаждение (или перегрев).

Положительная разность химических потенциалов обеспечивается, если система находится в пересыщенном состоянии и точка (p, T) расположена слева (или справа) от кривой насыщения (рис. 5.4).

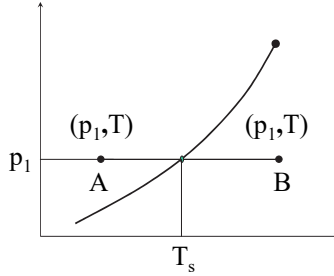


Рис. 5.4. Капля жидкости в переохлажденном паре (А) и пузырек пара в перегретой жидкости (В)

Смещаясь от кривой насыщения по изобаре $p_1 = \text{const}$ на величину $\Delta T = T - T_s$ и используя (5.10) как разложение (с некоторой допустимой погрешностью), получим:

$$\begin{aligned}
 & \mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_2, T) = \\
 & = \mu_1(p_1, T_s + \Delta T) - \mu_2(p_1, T_s + \Delta T) = \\
 & \left[\mu_1(p_1, T_s) - \mu_2(p_1, T_s) \right] - s_1(\Delta T) + s_2(\Delta T) = \\
 & = (s_2 - s_1) \Delta T.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Разность химических потенциалов в квадратных скобках равна нулю – в силу условия фазового равновесия для плоской поверхности раздела. Величины s_1 и s_2 – это значения удельной энтропии исходной и новой фаз на линии насыщения. Изменение энтропии при фазовом переходе связано с подводом теплоты фазового перехода r при постоянном давлении:

$$\begin{aligned}
 T ds &= dh - v dp \xrightarrow{p, T = \text{const}} T \Delta s = \Delta h; \\
 \Delta s &= \frac{\Delta h}{T} = \frac{r}{T}.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Следует иметь в виду согласование по знаку величин ΔT и Δs . Если считать r всегда положительной величиной, то и под ΔT нужно понимать $\Delta T = |T - T_s|$

Таким образом, разность химических потенциалов в (5.40) выражается через переохлаждение $\Delta T = T_s - T$ или перегрев $\Delta T = T - T_s$ исходной фазы:

$$\mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_1, T) \approx \frac{r \cdot \Delta T}{T_s}. \tag{5.42}$$

Подстановка (5.42) в (5.39) приводит к окончательному результату для критического размера зародыша новой фазы:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_2\Delta T}. \quad (5.43)$$

Запишем эту формулу для двух важных случаев – конденсации и кипения.

Если 1 – переохлажденный пар, 2 – жидкость, то получаем критический размер зародышевой капли при переохлаждении $\Delta T = T_s - T$:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_l\Delta T}. \quad (5.44)$$

Если 1 – перегретая жидкость, 2 – пар, то получаем критический радиус зародышевого пузырька при перегреве $\Delta T = T - T_s$:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_v\Delta T}. \quad (5.45)$$

Формулы (5.44), (5.45) отличаются значениями плотности новой фазы в делителе: для капли это плотность жидкости, а для пузырька – плотность пара. Поэтому критический радиус пузырька будет много большим, чем критический радиус капли при одинаковых пересыщениях (рис. 5.5).

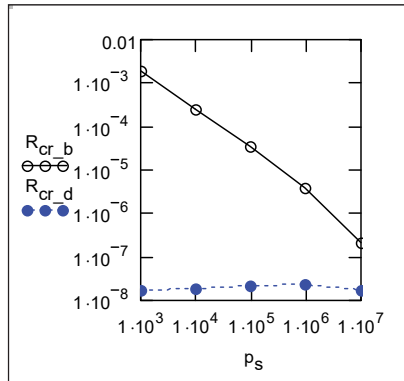


Рис. 5.5. Критический радиус пузырька пара ($R_{cr,b}$, м) и капли жидкости ($R_{cr,d}$, м) в зависимости от давления p_s , Па (вода, $\Delta T = 1\text{К}$)

При сопоставлении критического радиуса с молекулярными размерами (ангстремы, 10^{-10} м), видно, что ядро новой фазы может быть скоплением относительно небольшого числа молекул. Для столь малых объектов рассмотренная теория является весьма приближенной.

5.5. Газокинетическое (фазовое) сопротивление

Равенство температур в контактирующих фазах является одним из условий термодинамического равновесия. Это равновесие имеет динамический характер. Основываясь на газокинетических представлениях, мы полагаем, что количество испаряющихся молекул жидкости равно количеству конденсирующихся молекул пара, и поэтому никакого результирующего испарения или никакой результирующей конденсации на поверхности раздела не происходит.

Необходимо нарушить это динамическое равновесие, чтобы осуществить, например, конденсацию отработавшего пара, поступающего из турбины в конденсатор энергетической установки. Почти очевидным решением является понижение каким-либо способом температуры жидкости до $T_l < T_s$. Тогда скорость испарения снизится и возникнет результирующий конденсирующийся поток вещества. Эта идея реализуется в теории конденсации Герца–Кнудсена (H. Hertz, M. Knudsen).

Вычислим отдельно потоки конденсирующегося j_c , кг/(м²с) и испаряющегося j_v , кг/(м²с) вещества.

Пусть w_T – скорость теплового движения молекул, определяемая температурой газа. Вероятность движения молекул в заданном направлении – к поверхности раздела – составляет 1/6 (всех возможностей шесть: три координатных направления и в каждом из них два противоположных возможных направления). Тогда поток конденсирующихся молекул составит:

$$j_{cond} = \beta \frac{1}{6} (\rho_v \cdot w_T(T_s)), \quad (5.46)$$

где β – коэффициент конденсации, т.е. доля действительно конденсирующихся молекул (остальные молекулы отражаются). Плотность газа выразим из уравнения состояния идеального газа:

$$\rho_v = \frac{p_s(T_s)}{RT_s}, \quad (5.47)$$

где R – индивидуальная газовая постоянная. Явную формулу для скорости теплового движения w_T получим из выражения для энергии молекул как шариков массой m :

$$\frac{mw_T^2}{2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow w_T = \sqrt{3RT}, \quad (5.48)$$

где k – постоянная Больцмана ($k = mR$).

Подставляя (5.48) и (5.47) в (5.46), получаем:

$$j_{\text{cond}} = \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{12RT_s}}. \quad (5.49)$$

Более полные вычисления, с учетом максвелловского распределения, приводят к такому же по структуре результату с измененной константой:

$$j_{\text{cond}} = \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}}. \quad (5.50)$$

Зависимость плотности молекулярного потока массы j_{cond} от давления пара показана на рис. 5.6.

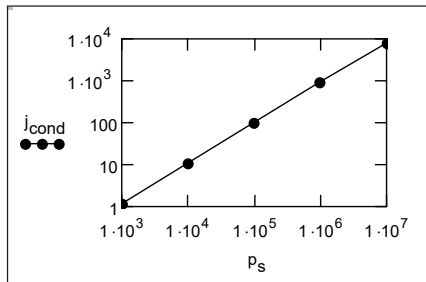


Рис. 5.6. Плотность молекулярного потока массы, j_{cond} , кг/(м²с), в зависимости от давления p_s , Па

Для подсчета скорости испарения применяется следующий остроумный прием. Рассмотрим *равновесие* при пониженной температуре T_i . Поток поступающих молекул определится той же фор-

мулой (5.50), но записанной при температуре $T_l < T_s$. В точности такой же поток покидает переохлажденную до T_l поверхность в силу равновесия. Поэтому:

$$j_{\text{evap}} = \beta \frac{p_s(T_l)}{\sqrt{2\pi RT_l}}. \quad (5.51)$$

Результирующий поток есть разность (5.50) и (5.51):

$$j = j_{\text{cond}} - j_{\text{evap}} = \beta \left(\frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} - \frac{p_s(T_l)}{\sqrt{2\pi RT_l}} \right). \quad (5.52)$$

Упростим результат, полагая разность температур $\Delta T = (T_s - T_l)$ малой величиной. Изменение давления насыщения найдем с помощью (5.18). Соответствующие разложения дадут:

$$\begin{aligned} j = j_{\text{cond}} - j_{\text{evap}} &= \beta \left(\frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} - \frac{p_s(T_s - \Delta T)}{\sqrt{2\pi R[T_s - \Delta T]}} \right) \Rightarrow \\ j &\approx \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} \left(\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta T}{T_s}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Для практических приложений полезно записать результаты в форме так называемого *фазового*, или *газокинетического* термического сопротивления R_ϕ :

$$\begin{aligned} q = jr &\approx \beta r \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} \left(\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta T}{T_s}; \\ R_\phi &= \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{\beta} \frac{T_s \sqrt{2\pi RT_s}}{r \cdot p_s(T_s)} \frac{1}{\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Представление о числовых значениях фазового сопротивления для водяного пара при разных давлениях дает график на рис. 5.7 (при $\beta = 1$).

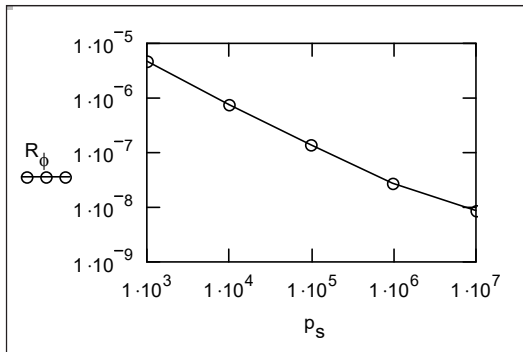


Рис. 5.7. Газокинетическое (фазовое) сопротивление R_ϕ , $\text{м}^2\text{К/Вт}$ в зависимости от давления p_s , Па

Например, при атмосферном давлении для водяного пара $R_\phi = 1,35 \cdot 10^{-7} (\text{Вт}/\text{м}^2\text{К})^{-1}$. Это значение следует сопоставить с другими актуальными термическими сопротивлениями. Если при конденсации водяного пара образуется пленка воды толщиной $\delta = 0,01$ мм, то ее термическое сопротивление составит $\delta/\lambda_f = 0,01 \cdot 10^{-3}/0,7 = 1,43 \cdot 10^{-5} (\text{Вт}/\text{м}^2\text{К})^{-1}$, что на два порядка выше, чем фазовое сопротивление. При таких условиях эффектом фазового сопротивления можно пренебречь, как в примере: $R_\phi \ll \delta/\lambda_f$. Другими словами, можно считать выполняющимся с хорошей точностью условие термодинамического равновесия, согласно которому температуры в фазах по обе стороны раздела одинаковы и равны температуре насыщения при заданном давлении.

Однако при низких давлениях (рис. 5.7) рассматриваемый эффект может стать заметным. Существенным будет влияние R_ϕ при конденсации и испарении жидких металлов, так как вследствие высокой теплопроводности жидкости λ_f возрастает относительное значение фазового сопротивления. Имеются также специальные задачи с очень высокими скоростями испарения и конденсации, где неравновесные эффекты на границе раздела фаз принципиально важны и где необходимо применение уточненных моделей по сравнению с приведенной здесь. На практике часто используют соотношения элементарной теории (5.54), в которых следует произвести замену:

$$\beta \Rightarrow \frac{2\beta}{2-\beta}.$$

5.6. Условия динамического и теплового взаимодействия на поверхности раздела фаз

Поверхность раздела фаз как математический объект может быть представлена уравнением вида $z = f(x, y, \tau)$, или, в неявной форме записи:

$$F(x, y, z, \tau) \equiv z - f(x, y, \tau) = 0. \quad (5.55)$$

Полезно провести аналогию с изотермической поверхностью, хорошо знакомой читателю из курса теплопроводности. Можно представить себе некоторую скалярную величину F , такую как температура, для которой записывается уравнение поверхности нулевого уровня (нулевой «изотермы»): $F = F(x, y, z, \tau) = 0$. Тогда становится ясным, что градиент от скалярной функции $F(x, y, z, \tau)$ определит нормаль к поверхности уровня (т.е. границе раздела) и, после нормирования, *единичную нормаль* \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}. \quad (5.56)$$

Поскольку единичный вектор \mathbf{n} указывает направление возрастания $F(x, y, z, \tau)$, можно идентифицировать фазовые состояния по сторонам поверхности раздела, например, как на рисунке (рис. 5.8).

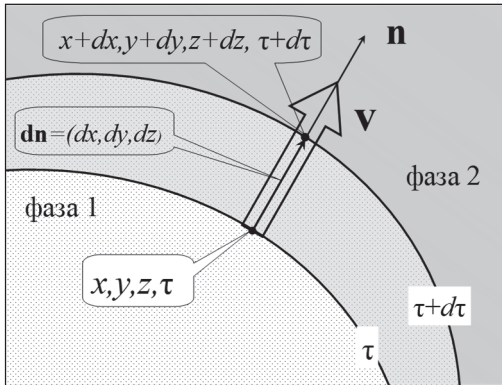


Рис. 5.8. Поверхность раздела

Для нестационарной границы раздела вводят локальную скорость \mathbf{v} смещения точек поверхности в направлении нормали (рис. 5.8). Мы наблюдаем за изменением положения поверхности $F(x, y, z, \tau) = 0$ в течение $d\tau$. Обозначая малое смещение по нормали за время $d\tau$ как $(d\mathbf{n} = \mathbf{n} dn)$, где величина и знак dn подлежат вычислению, определим скорость границы как

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{n} \frac{dn}{d\tau}.$$

Поскольку на границе раздела $F = 0$, т.е. постоянная величина, ее полный дифференциал равен нулю. Выписывая выражение полного дифференциала $dF(x, y, z, \tau) = 0$, получим последовательно:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \tau) = 0 \\ F(x + dx, y + dy, z + dz, \tau + d\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow dF = 0;$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0;$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \text{grad } F; \quad (dx, dy, dz) = d\mathbf{n};$$

$$dF = (\text{grad } F \cdot d\mathbf{n}) + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0;$$

$$d\mathbf{n} = \mathbf{n} dn; \tag{5.57}$$

$$(\text{grad } F \cdot \mathbf{n}) dn + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0; \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|};$$

$$\frac{dn}{d\tau} = - \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{1}{|\text{grad } F|};$$

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{n} \frac{dn}{d\tau};$$

$$\mathbf{v} = - \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{1}{|\text{grad } F|} \mathbf{n}.$$

Таким образом, если уравнение границы раздела известно, то нетрудно вычислить и скорость смещения границы. Следует иметь в виду, что скорость границы – это некоторое геометрическое понятие. Вообще говоря, эта скорость *не равна* скорости ма-

териальных частиц жидкости у границы. Связь между этими величинами устанавливается кинематическим условием на границе раздела фаз (см. далее).

Поверхность раздела может быть очень сложным геометрическим объектом. Достаточно представить себе различные волны на воде, от капиллярной ряби до гигантских цунами. Сложность двухфазных задач обусловлена в значительной мере тем, что уравнение поверхности раздела заранее не известно, а напротив, должно быть получено при решении.

При формулировке условий на границе раздела мы будем полагать, что поверхность задана в некоторой общей форме (5.55), а скорость движения границы определяется уравнением (5.57).

Основная идея вывода условий взаимодействия фаз на границах (Том 1\гл.1 «Краевые условия») состоит в применении специального контрольного объема, стягивающегося к поверхности раздела. Благодаря этому в общем уравнении сохранения исчезают *объемные* члены, а также потоки через *боковые* грани. В результате получается равенство плотностей потоков через границу, взятых по обе стороны поверхности раздела.

Здесь необходимо добавить следующее уточнение. Существуют физические эффекты, непосредственно связанные с границей раздела. Например, лапласовское давление Δp_σ (5.22) действует на поверхность раздела, остающуюся всегда *внутри* применяемого нами специального контрольного объема, стягивающегося в пределе к границе. Поэтому Δp_σ подлежит учету в балансе сил (или потоков импульса).

Кинематическое условие

Кинематическое условие отражает непрерывность поперечного потока массы по обе стороны поверхности раздела (рис. 5.9):

$$\rho_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \rho_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = j, \quad (5.58)$$

где j – плотность потока массы через поверхность раздела; \mathbf{n} – нормаль к поверхности раздела; \mathbf{v} – скорость смещения поверхности раздела, вектор, направленный по нормали к поверхности; \mathbf{w} – скорости в фазах по обе стороны поверхности раздела; ρ – плотности фаз.

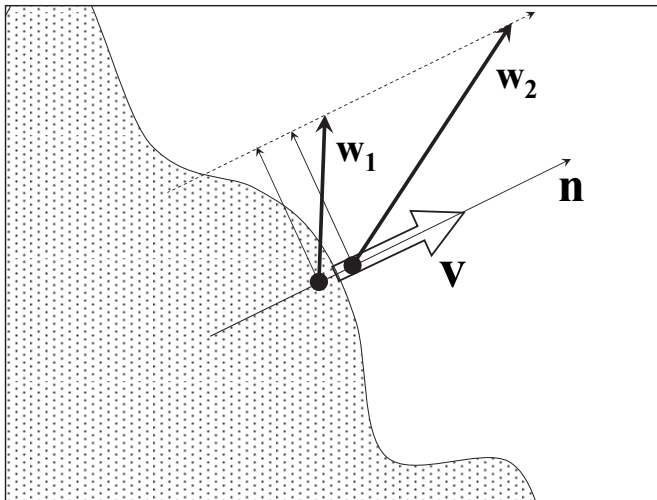


Рис. 5.9. Кинематическое условие на поверхности раздела

Это условие дает соотношение между нормальными составляющими скорости по обе стороны поверхности раздела:

$$w_{1n} - v_{surf} = \frac{j}{\rho_1}; \quad w_{2n} - v_{surf} = \frac{j}{\rho_2}; \quad (5.59)$$

$$w_{2n} - w_{1n} = j \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (5.60)$$

где v_{surf} – скорость смещения границы раздела.

Из уравнений (5.59), (5.60) следуют два важных вывода:

- скорость границы раздела и нормальная скорость движения жидкости на границе неодинаковы, если имеет место фазовое превращение, т.е. если плотность потока массы j через поверхность раздела ненулевая;

- нормальная составляющая скорости претерпевает скачок на границе раздела при $j \neq 0$.

Если скорость смещения поверхности раздела нулевая ($v = 0$, стационарная граница раздела фаз), то из (5.59) следует:

$$\rho_1 w_{1n} = \rho_2 w_{2n} = j. \quad (5.61)$$

На неподвижной границе с нулевым поперечным потоком массы нормальные составляющие скорости нулевые:

$$w_{1n} = 0; \quad w_{2n} = 0. \quad (5.62)$$

Соотношения (5.62) называют *условиями непроницаемости* поверхности.

На границе раздела предполагают отсутствие скольжения фаз:

$$w_{1\tau} = w_{2\tau}, \quad (5.63)$$

т.е. одинаковость касательных составляющих скорости по обе стороны поверхности раздела. Аналогичное *условие прилипания* устанавливает нулевую касательную скорость жидкости на поверхности неподвижной твердой стенки. Отсутствие скольжения, или условие прилипания, следует из предположения о сплошности рассматриваемых сред.

В разреженных газах, когда длина свободного пробега молекул составляет десятую или большую часть от характерного размера объекта, в инженерных расчетах применяют граничные условия со скольжением. Особой областью являются также процессы и устройства микро- и нанотехнологий.

Динамическое условие

Динамическое условие получают, записывая равенство потоков импульса через контрольные поверхности 1 и 2 в направлении \mathbf{n} (рис. 5.10). *Тензор* плотности потока импульса (Том 1 \ гл. 1. «Законы переноса теплоты, вещества, импульса»),

$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho\mathbf{w}\mathbf{w},$$

определяется действием сил давления $p\mathbf{I}$ (\mathbf{I} – единичный тензор) и вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}'$, а также конвективным переносом $\rho\mathbf{w}\mathbf{w}$.

Вектор потока импульса через единичную площадку, заданную единичным вектором нормали \mathbf{n} (рис. 5.10), вычисляется как проекция, или скалярное произведение ($\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}$):

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} = p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} + \rho\mathbf{w}\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = p\mathbf{n} - \mathbf{P}'_n + j\mathbf{w}.$$

Поясним выполненные операции.

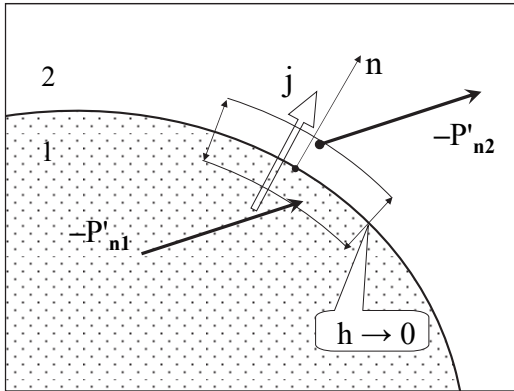


Рис. 5.10. Динамическое условие на поверхности раздела фаз

Ясно, что умножение вектора \mathbf{n} на тензорную единицу не изменяет \mathbf{n} , $(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n}$.

Величина $(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{P}'_{\mathbf{n}}$ – вязкое напряжение, сила, действующая на единичную площадку с нормалью \mathbf{n} . Например, нормальная составляющая этой силы есть нормальное вязкое напряжение $\mu \partial w / \partial n$. Напомним общий вид разложения на нормальную и касательные составляющие в декартовых координатах:

$$\mathbf{P}'_z = i\sigma'_{zx} + j\sigma'_{zy} + k\sigma'_{zz},$$

где

$$\sigma'_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \sigma'_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad \sigma'_{zz} = \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

Мы не стали менять обозначения ортов, так что \mathbf{k} следует отождествить с \mathbf{n} ; координата z нормальна к поверхности раздела фаз, соответственно x и y находятся в касательной плоскости. Скорость $\mathbf{w} = (u, v, w)$.

После этих необходимых справок запишем искомое динамическое условие как векторное равенство потоков импульса через контрольные поверхности 1 и 2 в выбранном направлении \mathbf{n} (рис. 5.10):

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2. \quad (5.64)$$

Рассмотрим простейший случай, когда фазовые превращения и движение в обеих фазах отсутствуют. Тогда поперечный поток j , скорости \mathbf{w}_1 , \mathbf{w}_2 и их производные в уравнении (5.64) обращаются в ноль и остаются только давления: $p_1 = p_2$. Это хорошо знакомое условие термодинамического равновесия для двухфазных систем с *плоской поверхностью раздела*.

Для *искривленной* поверхности раздела динамическое условие должно включать капиллярное (лапласовское) давление Δp_σ (5.22), обусловленное молекулярными силами и геометрией поверхности раздела, но не зависящее от макроскопического движения жидкости:

$$\Delta p_\sigma = 2\sigma H; \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad (5.65)$$

где H – средняя кривизна поверхности раздела, k_1 , k_2 – главные кривизны, R_1 , R_2 – главные радиусы кривизны. Если поверхность задана в виде $Z = Z(x, y)$, то среднюю кривизну можно определить, взяв полусумму в двух *перпендикулярных координатных* сечениях $x = \text{const}$, $y = \text{const}$:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_{yy}}{(1+Z_y^2)^{3/2}} + \frac{Z_{xx}}{(1+Z_x^2)^{3/2}}\right). \quad (5.66)$$

Дополнительные сведения о вычислении кривизны поверхностей можно найти в курсе дифференциальной геометрии.

Интерпретируем капиллярное давление как силу, отнесенную к единице поверхности и ориентированную в положительном направлении – по нормали \mathbf{n} . Добавим поэтому $(\Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n})$ в левую часть уравнения (5.64) как дополнительный поступающий поток импульса:

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 + \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2. \quad (5.67)$$

Теперь в рассмотренном выше предельном случае неподвижных фаз получится:

$$p_1 \cdot \mathbf{n} + \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} = p_2 \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \Delta p_\sigma = p_2 - p_1. \quad (5.68)$$

На рисунке кривизна поверхности раздела отрицательна ($H < 0$), поэтому $\Delta p_\sigma < 0$, $p_1 > p_2$, как и должно быть при такой конфигурации.

Динамическое условие можно переписать в форме:

$$j(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} + (p_1 - p_2)\mathbf{n} + (\mathbf{P}'_{n2} - \mathbf{P}'_{n1}), \quad (5.69)$$

допускающей следующую интерпретацию: изменение импульса при пересечении границы происходит благодаря действию разности давлений и вязких напряжений по обе стороны границы, а также капиллярному давлению.

Динамическое условие (5.69) как векторное уравнение содержит два условия: для нормальных и касательных напряжений.

Предельный случай статического равновесия (5.68) является примером нормальной проекции динамического условия. Рассмотрим еще один пример нормальной проекции (5.69), пренебрегая вязкими силами и капиллярным давлением, но учитывая фазовый переход. После скалярного умножения обеих частей (5.69) на \mathbf{n} ,

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}) &= (p_1 - p_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \Rightarrow \\ j(w_{2n} - w_{1n}) &= p_1 - p_2, \end{aligned} \quad (5.70)$$

и подстановки (5.60) получим:

$$j^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = p_1 - p_2.$$

Повышение давления в плотной фазе происходит благодаря *реактивному* эффекту, обычно незначительному, но играющему главную роль в проблеме лазерного термоядерного синтеза. Сила реакции быстро испаряющегося вещества – под действием сверхмощного лазерного излучения – приводит к сжатию и разогреву мишени.

Рассмотрим тангенциальную проекцию динамического условия (5.69) ($\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор к поверхности раздела):

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) &= \Delta p_\sigma \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + (p_1 - p_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{P}'_{n2} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{P}'_{n1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \\ j(u_2 - u_1) &= \sigma'_{n\tau 2} - \sigma'_{n\tau 1} \Rightarrow \\ \sigma'_{n\tau 2} &= \sigma'_{n\tau 1}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Вследствие условия прилипания, касательные составляющие скорости u_1, u_2 по обе стороны границы одинаковы, поэтому тангенциальное условие сводится к равенству касательных напряжений.

Индекс «пт» означает, что напряжение действует на площадку с нормалью \mathbf{n} в касательном направлении \mathbf{t} .

В соответствии с законом Стокса вязкого трения, условие (5.71) запишется как:

$$\mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \quad (5.72)$$

или, для течения типа пограничного слоя,

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \approx \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}. \quad (5.73)$$

(обозначение z дублирует нормальное направление n , x есть касательное направление к поверхности раздела).

Как мы видели выше, поверхностное натяжение σ создает силу, *нормальную* к искривленной поверхности раздела (5.69).

Если σ неоднородно по поверхности раздела, то возникает также *тангенциальная* сила (эффект Марангони), равная в расчете на единицу поверхности:

$$(\text{grad}\sigma)_{\rightarrow}, \quad (5.74)$$

где индекс \rightarrow означает, что градиент вычисляется вдоль поверхности. Если переменность σ связана с температурной зависимостью $\sigma(T)$, то говорят о *термокапиллярном* эффекте.

Возможны сильные изменения σ при наличии примесей поверхностно активных веществ.

Сила (5.74) должна быть добавлена в левую часть уравнения (5.64) как дополнительный поступающий поток импульса:

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 + \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} + (\text{grad}\sigma)_{\rightarrow} = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2. \quad (5.75)$$

Тепловые условия

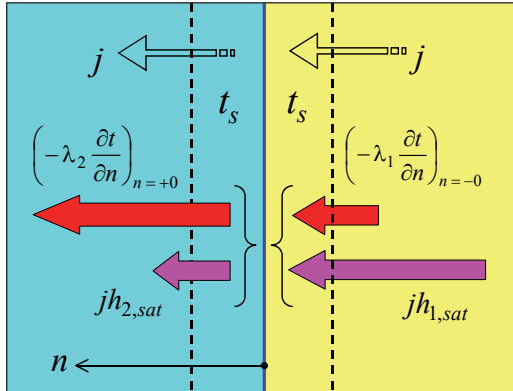


Рис. 5.11. Тепловые условия на поверхности раздела фаз

Тепловые условия на поверхности раздела (рис. 5.11) записывается двумя соотношениями. Если газокинетическое (фазовое) термическое сопротивление (5.54) пренебрежимо мало, то температуры по обе стороны поверхности раздела фаз одинаковы и равны температуре насыщения:

$$t_1|_{n=-0} = t_2|_{n=+0} = t_s.$$

Баланс потоков тепловой энергии на межфазной границе записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(-\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=+0} + jh_{2,\text{sat}} &= \left(-\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=-0} + jh_{1,\text{sat}} \Rightarrow \\ j(h_{1,\text{sat}} - h_{2,\text{sat}}) &\equiv j \cdot r = \left(-\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=+0} - \left(-\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=-0} \end{aligned}, \quad (5.76)$$

где r – разность энтальпий на линии насыщения, скрытая теплота фазового превращения. При конденсации чистого насыщенного пара теплота парообразования отводится через жидкую фазу (пленку конденсата), поэтому в правой части последнего соотношения следует оставить только первое слагаемое. При пленочном кипении, напротив, теплота к поверхности раздела фаз подводится через паровую пленку, и необходимо, сохранить второе слагае-

мое (при высоких температурах стенки добавляется перенос теплоты излучением).

Соотношение (5.76) остается справедливым, если паровая фаза содержит примеси инертного (неконденсирующегося) газа. Поперечный поток массы j в этом случае – это поток «активного» компонента смеси (пара), соответственно удельная энтальпия в газовой фазе – это энтальпия активного компонента.

5.7. Феномен гидродинамической неустойчивости границы раздела

Стационарная, гладкая поверхность раздела редко наблюдается на практике. Общим правилом скорее является возмущенная, волновая поверхность, или даже разрушающаяся граница раздела с отрывом капель и насыщением жидкости газовыми пузырьками. Неустойчивость поверхности раздела бывает двух типов (рис. 5.12):

- неустойчивость Гельмгольца: динамическая неустойчивость поверхности раздела, по обе стороны которой скорости потоков неодинаковы (как при различной, так и при одинаковой плотности жидкостей);

- неустойчивость Тейлора: неустойчивость поверхности раздела в поле сил тяжести, если более тяжелая (с большей плотностью ρ) жидкость находится сверху. Гравитация может быть заменена движением с ускорением, направленным в сторону более тяжелой жидкости (как в лифте, ускоренно движущемся вверх).

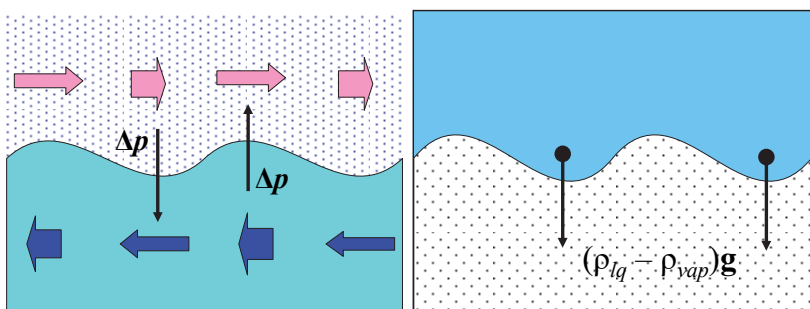


Рис. 5.12. Неустойчивость Гельмгольца (слева) и Тейлора (справа)

В случае Гельмгольцевой неустойчивости продольное движение над выступами волнового профиля ускоряется из-за сужения трубок тока, а над впадинами – замедляется, благодаря их расширению. По закону Бернулли, давление над выступами уменьшается, а во впадинах – возрастает, что и приводит к дальнейшему увеличению отклонений от исходного состояния: выступы будут расти, а впадины углубляться.

В случае Тейлоровской неустойчивости случайное смещение тяжелой жидкости вниз с одновременным компенсирующим поднятием легкой жидкости вверх будет энергетически выгодным – потенциальная энергия всей системы уменьшится. Поэтому отклонение будет самопроизвольно увеличиваться.

Приведем несколько актуальных примеров проявления гидродинамической неустойчивости в задачах двухфазного теплообмена.

Гидродинамическая теория кризиса кипения (перехода от пузырькового к пленочному кипению (гл. 6) основывается на неустойчивости Гельмгольца: уходящий от горячей стенки поток пара препятствует притоку жидкости из-за сильных возмущений поверхности раздела между этими встречными течениями. Обратный переход (второй кризис кипения, переход от пленочного кипения к пузырьковому) связан с потерей устойчивости паровой пленки, над которой находится тяжелая жидкость (вода), т.е. с неустойчивостью Тейлора.

Гельмгольцева неустойчивость обуславливает диспергирование струй жидкости в конденсаторах и испарителях контактного типа. При сильном торможении (отрицательном ускорении) скоростных капель в паровой среде распад может быть вызван Тейлоровской неустойчивостью («эффект лифта»).

Хотя приведенные выше качественные объяснения феномена неустойчивости представляются простыми и понятными, количественная теория оказывается весьма сложной, поскольку необходимо учесть влияние вязкости, поверхностного натяжения, поперечного потока массы при испарении и конденсации, а также нелинейные эффекты.

Мы ограничимся здесь ссылкой на материалы [51], по которым на примере сдвигового потока можно изучить технику математического и компьютерного моделирования в случае ма-

лых, линейных возмущений. Обнаруживаемые прогрессирующие возмущения в потоке являются предшественниками турбулентности (рис 5.13).

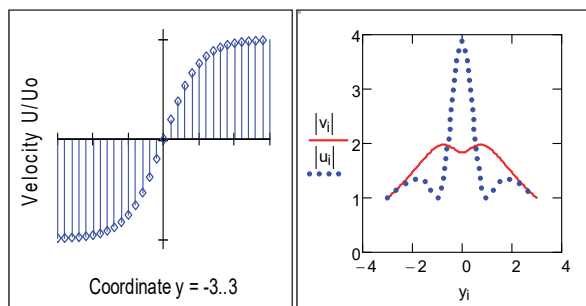


Рис. 5.13. Основное течение (слева) и пульсации поперечной и продольной скорости (справа)

В методическом отношении указанные материалы могут служить элементарным введением в общую теорию устойчивости. Фундаментальная идея – разложение решения вблизи точки равновесия по степеням малых отклонений – реализуется с применением *символьного* процессора Mathcad, позволяющего автоматизировать аналитические преобразования. Рассматривается техника работы с дифференциальными уравнениями в комплексной области. Показано, как интегрировать уравнения с комплексными коэффициентами численным методом и как интерпретировать получившиеся комплекснозначные решения.

5.8. Гомогенная модель

Выше в данной главе были подробно рассмотрены свойства поверхности раздела. Это основа для детального анализа гидродинамики и теплообмена в двухфазных средах. Однако существует альтернативный, весьма упрощенный подход, когда задачу сводят к однофазной, наделяя реальный двухфазный поток некоторыми осредненными свойствами и рассматривая его как *гомогенное* течение. В основе изложенной ниже простой теории – представление о хорошо перемешанном, *односкоростном* двух-

фазном потоке, т.е. потоке, в котором обе фазы движутся с одинаковыми скоростями. Удовлетворительных результатов можно ожидать для высокоскоростных турбулентных течений, как это бывает при конденсации и кипении (рис. 5.14) в трубах и каналах. Указанные две задачи весьма сложны для анализа, поэтому простая гомогенная модель сохраняет свою актуальность.

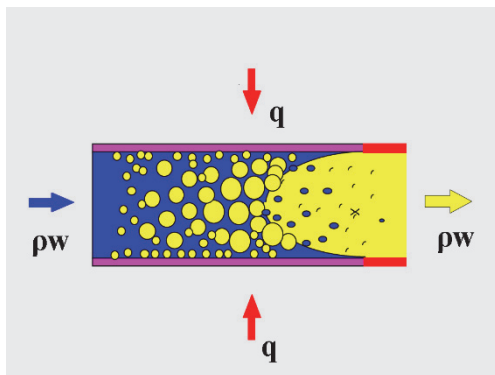


Рис. 5.14. Схематическое представление кипения в трубе

Параметры двухфазного потока

Перечислим основные количественные характеристики двухфазного потока, необходимые для расчета теплообмена и сопротивления. Условимся относить величины без индексов к двухфазному потоку как некоторой специфической среде с особыми свойствами, а жидкую и газовую (паровую) фазы обозначать индексами L и G (или V).

- Массовый расход:

$$G = \rho w f, \quad \text{кг/с}, \quad (5.77)$$

где f – поперечное сечение канала.

- Массовая скорость (плотность потока массы):

$$\rho w = \frac{G}{f}, \quad \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}. \quad (5.78)$$

- Объемное паросодержание:

$$\beta = \frac{V_G}{V_G + V_L}, \quad \frac{\text{м}^3 \text{ газа}}{\text{м}^3 \text{ смеси}}. \quad (5.79)$$

- Массовое паросодержание:

$$x = \frac{M_G}{M_G + M_L} \frac{\text{кг газа}}{\text{кг смеси}}. \quad (5.80)$$

Для односкоростного, хорошо перемешанного двухфазного потока величины β и x , называемые также истинными паросодержаниями, совпадают с расходными объемным и массовым паросодержаниями. Последние определяются такими же формулами, но соответственно через объемный и массовый расход. Например, для расходного массового паросодержания

$$x = \frac{G_G, \text{ кг/с газа}}{G, \text{ кг/с смеси}}. \quad (5.81)$$

Величина массового паросодержания легко определяется через количество теплоты, подводимой к двухфазному потоку. Например, если состояние двухфазного потока равновесное (пар и жидкость находятся на линии насыщения) то

$$G_g = \frac{Q}{r} \frac{\text{Вт}}{\text{Дж/кг}}. \quad (5.82)$$

Теперь можно определить плотность или удельный объем двухфазной смеси.

Плотность легко вычислить через объемное паросодержание:

$$\rho = \beta \rho_G + (1 - \beta) \rho_L. \quad (5.83)$$

Здесь непосредственно используется определение понятия объемного паросодержания как доли суммарного объема, занятой паровой фазой. Первое слагаемое в правой части есть масса пара в одном кубометре смеси, а второе слагаемое – масса жидкости в одном кубометре смеси.

Удельный объем смеси просто вычисляется через массовое паросодержание:

$$v = xv_G + (1 - x)v_L. \quad (5.84)$$

Действительно, первое слагаемое справа есть объем пара в одном килограмме смеси, а второе – объем жидкости в одном килограмме смеси. Сумма этих объемов дает объем для одного килограмма смеси, то есть удельный объем смеси.

Плотность и удельный объем связаны обычным соотношением:

$$\rho = 1 / v .$$

Подставляя в это соотношение выражения для плотности и удельного объема смеси, получим связь между объемным и массовым паросодержаниями:

$$\beta \rho_G + (1 - \beta) \rho_L = \frac{1}{x v_G + (1 - x) v_L} .$$

или, после простых преобразований:

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{1 - x}{x} \frac{\rho_G}{\rho_L}} . \quad (5.85)$$

Как говорилось выше, массовое паросодержание нетрудно определить из теплового расчета. С другой стороны, объемное паросодержание дает хорошее «визуальное» представление о двухфазном потоке. Пусть, например, массовое паросодержание невелико, скажем, равно 0,1. При атмосферном давлении отношение плотностей пара и жидкости составляет примерно 0,001. Подставляя численные значения в последнюю формулы, получим для объемного паросодержания величину 0,99. Это означает, что 99% объема занимает паровая фаза и только 1% – жидкая фаза. Соответствующую двухфазную структуру можно представить как паровой поток, несущий мельчайшие капельки жидкости, или как паровой поток с очень тонкой пленкой жидкости на стенке канала, или как пену, то есть как плотно упакованную систему пузырьков пара, разделенных очень тонкими жидкими прослойками.

Выведем еще несколько полезных для дальнейшего анализа соотношений. Поделив обе части уравнения (5.84) для удельного объема на v_L , получим

$$v / v_L = x v_G / v_L + (1 - x),$$

или, заменяя отношения удельных объемов отношениями удельных плотностей,

$$\frac{\rho}{\rho_L} = x \frac{\rho_G}{\rho_L} + (1 - x) . \quad (5.86)$$

Поделив обе части уравнения (5.84) на v_G , получим

$$v / v_G = x + (1 - x)v_L / v_G,$$

или, заменяя отношения удельных объемов отношениями удельных плотностей

$$\frac{\rho_G}{\rho} = x + (1 - x)\frac{\rho_G}{\rho_L}. \quad (5.87)$$

Эти соотношения позволяют судить, насколько плотность двухфазной смеси отличается от плотностей жидкой или паровой фазы. Такие оценки важны, например, для анализа естественной циркуляции, когда движение в контуре циркуляции происходит под действием разности весов среды в опускных и парогенерирующих каналах.

Гораздо более сложным является определение эффективных значений вязкости или теплопроводности смеси. Мы будем основываться далее на простой модели, согласно которой трение и теплообмен зависят от свойств потока в непосредственной близости от твердой стенки.

Например, при пленочной конденсации быстродвижущегося пара в трубе со стенкой контактирует *непрерывная жидкая фаза* – пленка конденсата, а основное сечение занято потоком пара, содержащим диспергированную влагу – сорванные с поверхности пленки капли конденсата. Похожая структура имеет место при *кольцевом режиме кипения* в трубе, когда основная часть жидкости уже превращена в пар и осталась только смачивающая стенку тонкая испаряющаяся пленка плюс диспергированная влага в паровом ядре потока. В описанных случаях следует принять вязкость и теплопроводность среды равными значениям для жидкой фазы.

Противоположным примером является закритический (опасный из-за возможного пережога) дисперсный режим парогенерирующего канала, когда непрерывной фазой, контактирующей со стенкой, является пар, а диспергированная жидкость движется в форме капель в ядре потока. В этом случае было бы разумным считать вязкость и теплопроводность среды равными значениям для паровой фазы. Такая же ситуация возникает при движении потока газа с взвешенными твердыми частицами.

Расчет трения и теплообмена в двухфазном потоке

Воспользуемся этими простыми модельными представлениями для расчета трения и теплообмена двухфазного потока со стенкой. Непрерывную фазу, контактирующую со стенкой, идентифицируем индексом « k ».

Расчет трения

Напряжение трения на стенке при инженерных расчетах определяется по формуле:

$$\tau = \frac{\xi}{8} \rho w^2, \quad (5.88)$$

где $\xi(\text{Re})$ – коэффициент гидравлического сопротивления как функция числа Рейнольдса. Напомним, что отсутствие индексов означает характеристики двухфазного потока.

Сопоставим трение двухфазного потока с трением однофазного потока непрерывной фазы при одинаковых значениях расхода G (или массовой скорости ρw):

$$\tau_k = \frac{\xi_k}{8} \rho_k w_k^2; \quad \rho w = \rho_k w_k. \quad (5.89)$$

В случае кипения в трубе скорость w_k – это скорость воды, подаваемой на вход; эту величину часто называют скоростью циркуляции.

Если принять вязкость двухфазного потока такой же как для непрерывной фазы, контактирующей со стенкой, $\mu = \mu_k$, то коэффициенты гидравлического сопротивления будут одинаковыми в обоих случаях, так как одинаковы значения числа Рейнольдса. Действительно:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \frac{wd}{\nu} \equiv \frac{(\rho w)d}{\mu}; & \text{Re}_k &= \frac{w_k d}{\nu_k} \equiv \frac{(\rho_k w_k)d}{\mu_k}; \\ \mu &= \mu_k; \rho w = \rho_k w_k & \Rightarrow & \text{Re} = \text{Re}_k. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Теперь, составив отношение напряжений трения (5.88) и (5.89), получим:

$$\frac{\tau}{\tau_k} = \frac{\rho w^2}{\rho_k w_k^2} \equiv \frac{w}{w_k} = \frac{\rho_k}{\rho}.$$

или

$$\tau = \tau_k \frac{\rho_k}{\rho}. \quad (5.91)$$

Итак, расчет трения *двухфазного* потока сводится к расчету трения *однофазного* потока с той же массовой скоростью. Отношение плотностей в формуле (5.91) можно рассчитать через массовое паросодержание x , как это показано выше (5.86), (5.87).

Расчет теплоотдачи

Предварительно определим некоторую *эквивалентную скорость* рассматриваемой фазы « k », которая обеспечивает такое же напряжение трения, как для движения двухфазной среды:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_k \frac{\rho_K}{\rho} \equiv \frac{\xi}{8} \rho_k w_k^2 \frac{\rho_k}{\rho}; \\ \tau_{eq} &= \frac{\xi}{8} \rho_k w_{eq}^2. \end{aligned}$$

Приравнивая правые части этих выражений и считая значение коэффициента гидравлического сопротивления примерно одинаковым, получим:

$$w_{eq} = w_k \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho}}. \quad (5.92)$$

Итак, если однофазный поток непрерывной фазы « k », контактирующей со стенкой, движется со скоростью w_{eq} , то трение на стенке будет таким же, как для исходного двухфазного потока.

Мы завершили подготовительный этап и переходим к расчету теплоотдачи. В приближенной модели воспользуемся аналогией Рейнольдса между трением и теплообменом, выражением которой является следующее соотношение:

$$St = \frac{\xi}{8}.$$

или

$$\frac{\alpha}{\rho_K C_{PK} w_{eq}} = \frac{\xi}{8}. \quad (5.93)$$

После подстановки выражения (5.92) для эквивалентной скорости и простых преобразований получим:

$$\alpha = \left(\frac{\xi}{8} (\rho c_p w)_k \right) \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho}}. \quad (5.94)$$

Выражение в скобках в правой части этой формулы есть значение коэффициента теплоотдачи, рассчитанное по параметрам однофазного потока непрерывной фазы « k », контактирующей со стенкой, при той же массовой скорости, что и для исходного двухфазного потока. Обозначив эту просто рассчитываемую величину как α_k , запишем окончательное выражение:

$$\alpha = \alpha_k \sqrt{\frac{\rho_k}{\rho}}. \quad (5.95)$$

Получим далее конкретные представления этого уравнения для различных режимов теплообмена двухфазных потоков.

При расчете *конвективной составляющей теплоотдачи при кипении в трубах* (гл. 6) или при расчете *пленочной конденсации быстро движущегося пара* непрерывной фазой, контактирующей со стенкой, является жидкость. Следовательно:

$$\frac{\rho_k}{\rho} = \frac{\rho_L}{\rho} = x \frac{\rho_L}{\rho_G} + (1-x) \equiv 1 + x \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} - 1 \right). \quad (5.96)$$

При турбулентном режиме течения коэффициент теплоотдачи α_k можно рассчитать, например, по формуле Михеева или Диттуса–Белтера (гл. 1). Тогда окончательное выражение для коэффициента теплоотдачи в указанных случаях записывается следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda_L}{d} \left(0,023 \text{Re}_L^{0,8} \text{Pr}_L^{0,4} \right) \sqrt{1 + x \left(\frac{\rho_L}{\rho_G} - 1 \right)}, \quad (5.97)$$

где

$$\text{Re}_L = \frac{(\rho w)d}{\mu_L}. \quad (5.98)$$

При кипении в трубах для *дисперсного двухфазного потока в закризисной области* (гл. 6) непрерывной фазой является пар, в потоке которого движутся взвешенные мелкие капли жидкости.

Теплота от стенки передается к паровому потоку и затем расходуется на испарение капель жидкости. Температура в ядре потока поддерживается примерно равной температуре насыщения, и в качестве температурного напора принимается разность температур стенки и насыщения:

$$\Delta T = T_w - T_s .$$

Поскольку непрерывная фаза – пар, то

$$\frac{\rho_k}{\rho} \equiv \frac{\rho_G}{\rho} = x + (1-x) \frac{\rho_G}{\rho_L} . \quad (5.99)$$

и формула (5.95) для теплоотдачи при турбулентном течении дисперсного потока переписывается следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda_G}{d} \left(0,023 \text{Re}_G^{0,8} \text{Pr}_G^{0,4} \right) \sqrt{x + (1-x) \frac{\rho_G}{\rho_L}} ; \quad (5.100)$$

$$\text{Re}_G = \frac{(\rho w) d}{\mu_G} .$$

Напомним основное ограничение изложенной простой теории – это представление о хорошо перемешанном, односкоростном двухфазном потоке. Достоинством приведенных выше расчетных соотношений является то, что они получены на базе некоторой феноменологической модели сложных процессов теплообмена и могут служить структурной основой для эмпирических корреляций. Детальный анализ теплообмена при кипении и конденсации см. в последующих главах.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите фазовые равновесия, приведите уравнение кривой насыщения.
2. Дайте понятие центров кипения/конденсации. Что такое критический радиус парового зародыша?
3. Каковы условия для реализации кипения в объеме и на поверхности?
4. Приведите параметры двухфазного потока. Какова постановка граничных условий на межфазной поверхности?
5. Опишите гомогенную модель двухфазного потока.

Глава 6. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ

6.1. Кривые кипения

Кривая кипения (кривая Нукиямы, 1934) связывает плотность теплового потока q и температурный напор $\Delta t = t_w - t_s$ (рис. 6.1). Нукияма кипятил воду при атмосферном давлении (т.е. при $t_s \approx 100^\circ\text{C}$) на электрически обогреваемой проволоке, которая служила одновременно нагревателем и термометром сопротивления. По измерениям силы тока и напряжения определялась и плотность теплового потока q , и температура нагревателя t_w :

$$q = \frac{I \cdot U}{\pi D_{\text{wire}} L_{\text{wire}}}; \quad \frac{U}{I} = R(t_w) \xrightarrow{\text{Тарировочная кривая } R \leftrightarrow t^\circ\text{C}} t_w.$$

Было обнаружено, что увеличение теплового потока q вплоть до экстремально больших значений порядка 10^6 Вт/м^2 сопровождалось относительно слабым увеличением температуры нагревателя t_w (примерно до 130°C) и температурного напора $\Delta t = t_w - t_s$ (примерно до 30°C), так что коэффициент теплоотдачи $\alpha = q / \Delta t$ достигал значений $\sim 30000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ }^\circ\text{C})$. Однако затем происходил внезапный скачок температуры t_w (более чем на 1000°C) с пережогом нагревателя.

Исключительно высокие значения коэффициента теплоотдачи α (рис. 6.2, 6.3) обусловили широкое применение кипящих теплоносителей в энергетике, в том числе ядерной, а также в других технологиях, где требуется обеспечить отвод экстремальных тепловых потоков при небольших разностях температур. В то же время, выраженный нелинейный характера зависимости $q(\Delta t)$ (рис. 6.1), потенциальная опасность пережога, видимая сложность процесса инициировали интенсивные теоретические и экспериментальные исследования кипения.

Графики на нижеследующих рисунках (рис. 6.1–6.3), воспроизводящие кривые Нукиямы, построены по современным инженерным расчетным методикам, реализованным в Mathcad программе (рис. 6.4) [51]. Характерные режимы обозначены на рисунках цифрами 1–5.

Режим 1. Область однофазной свободной конвекции при малых значениях Δt и q . Плотность *центров парообразования* (гл. 5, п. 5.4) здесь невелика вследствие малых перегревов жидкости, поэтому теплоотвод от стенки осуществляется в режиме свободной конвекции ($\alpha \sim \Delta t^{1/4}$ или $\alpha \sim \Delta t^{1/3}$). Испарение происходит со свободной поверхности («зеркала») жидкости.

Режим 2. Область развитого пузырькового кипения. Интенсивный теплообмен в этой области обусловлен пульсационным движением жидкости у стенки, вынуждаемым быстрорастущими пузырьками пара. Здесь $\alpha \sim q^{2/3}$, $\alpha \sim \Delta t^2$, $q \sim \Delta t^3$. Это наиболее важный в практическом отношении интенсивный режим теплоотдачи.

В вычислительной программе теплоотдача в режимах 1 и 2 рассчитывалась по методике интерполяции между асимптотами свободной конвекции и развитого пузырькового режима.

Режим 3. Наблюдается парадоксальный, противоречащий обычному опыту факт: тепловой поток *уменьшается* с ростом температурного напора. В этой области происходит перемежающееся во времени и по поверхности пузырьковое (режим 2) и пленочное (режим 4, см. ниже) кипение. Непрерывный переход от пузырькового к пленочному кипению по линии 3 реализуется, если независимой переменной служит температура стенки (температурный напор). Например, при *паровом обогреве* температура стенки (по горизонтальной оси) задается давлением конденсирующегося пара на другой стороне поверхности теплопередачи. Теплоотдача в переходной области – это специальный вопрос, выходящий за рамки нашего изложения. Поэтому в вычислительной программе кривая 3 строилась формально, как линейная интерполяция между характерными точками $(q_{cr1}, \Delta t_{cr1})$ и $(q_{cr2}, \Delta t_{cr2})$ в логарифмической системе координат.

При электрическом обогреве, как в экспериментах Нукиямы, или при ядерном обогреве (как в кипящих энергетических реакторах) независимой переменной является плотность теплового потока q (вертикальная ось на рис. 6.1). В этом случае режим 3 не реализуется, а происходит *кризис кипения* – резкий скачок от пузырькового к пленочному режиму, если в процессе постепенного увеличения q будет превышена *критическая плотность тепло-*

вого потока q_{cr1} . Скачок температуры стенки обычно сопровождается разрушением поверхности нагрева (например, расплавлением циркониевой оболочки твэла).

Режим 4. Область пленочного кипения. Паровая пленка изолирует горячую стенку от жидкости. Здесь $\alpha \sim \Delta t^{(-1/4)}$, как при похожем процессе пленочной конденсации. Термическое сопротивление пленки пара весьма велико из-за низкой теплопроводности пара. Отсутствует перемешивание. В результате коэффициент теплоотдачи при пленочном кипении оказывается на порядки ниже, чем при пузырьковом режиме.

Если независимой переменной является плотность теплового потока q и мы уменьшаем q с целью вернуться на благоприятный режим 3, то обратный скачкообразный переход совершается при существенно меньшем критическом значении $q_{cr2} < q_{cr1}$. *Гистерезис* является характерным свойством сильно нелинейных систем.

Режим 5. Когда в режиме пленочного кипения температура стенки достигает 1000°C и выше, большой вклад в теплоперенос вносит тепловое излучение (см. Mathcad программу), чем и объясняется наблюдаемый рост эффективного коэффициента теплоотдачи.

Описанное выше явление кризиса кипения представляет серьезную опасность для установок с электрическим и ядерным обогревом. В *теории катастроф* (как разделе прикладной математики) кривая вида $q(\Delta t)$ носит обобщающее название «*катастрофы складки*». Для такого рода систем характерно возникновение катастрофических, скачкообразных изменений состояния при плавном изменении управляющих параметров, как в случае кризиса кипения при увеличении q . Другим примером является описание экологических проблем энергетики в форме катастрофы складки, если вместо управляющего параметра q взять «энерговооруженность» человека, а вместо переменной состояния Δt – «степень загрязненности» окружающей среды, неизбежно возрастающую вместе с вводом все новых энергетических мощностей традиционной теплоэнергетики. В этом случае особый драматизм приобретает свойство гистерезиса: возврат к норме после экологической катастрофы связан с практически полным исключением энергетики (по аналогии с соотношением $q_{cr2} \ll q_{cr1}$ при кипении).

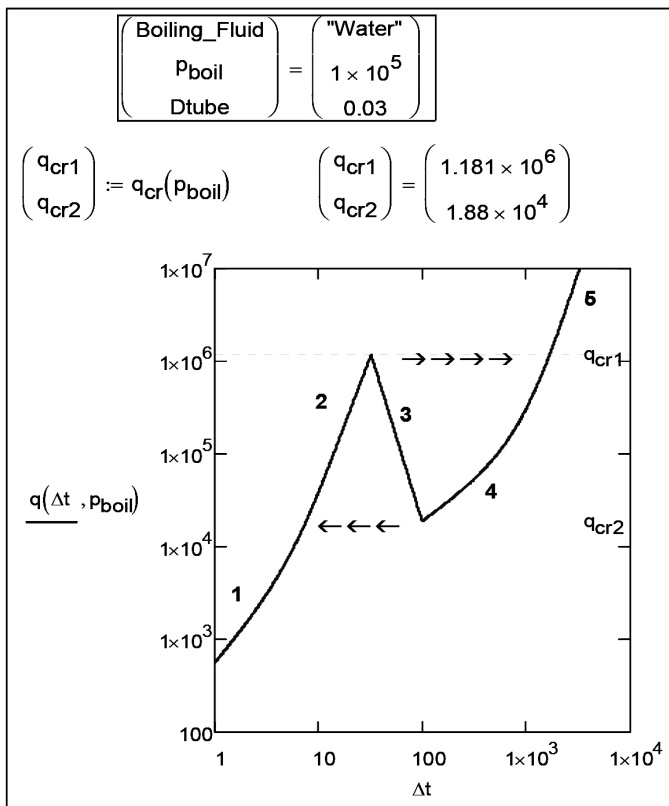


Рис. 6.1. Кривая кипения $q(\Delta t)$

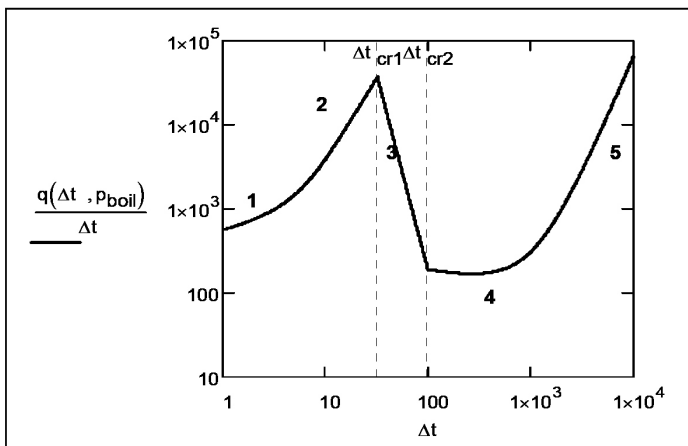


Рис. 6.2. Кривая кипения $\alpha(\Delta t)$

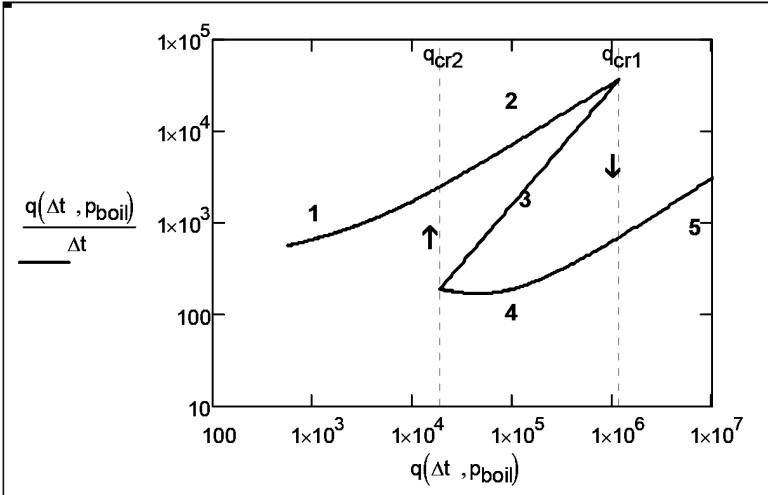


Рис. 6.3. Кривая кипения $\alpha(q)$

$$q(\Delta t, p_{Pa}) := \begin{cases} \begin{pmatrix} q_{cr1} \\ q_{cr2} \end{pmatrix} \leftarrow q_{cr}(p_{Pa}) \\ \begin{pmatrix} \Delta t_{cr1} \\ \Delta t_{cr2} \end{pmatrix} \leftarrow \Delta t_{cr}(p_{Pa}) \end{cases}$$

if $\Delta t \leq \Delta t_{cr1}$

"Nucleate Boiling + Free Convection"

$$\alpha_{12}(q, p_{Pa}) \leftarrow \sqrt{\alpha_{Lab}(q, p_{Pa})^2 + \alpha_{FreeCon}(\Delta t, p_{Pa})^2}$$

$$q \leftarrow 10^3$$

$$q \leftarrow \text{root}\left(\Delta t - \frac{q}{\alpha_{12}(q, p_{Pa})}, q\right)$$

if $\Delta t_{cr1} < \Delta t < \Delta t_{cr2}$

"Transition"

$$\log_q \leftarrow \log(q_{cr1}) + (\log(q_{cr2}) - \log(q_{cr1})) \cdot \left(\frac{\log(\Delta t) - \log(\Delta t_{cr1})}{\log(\Delta t_{cr2}) - \log(\Delta t_{cr1})}\right)$$

$$q \leftarrow 10^{\log_q}$$

if $\Delta t \geq \Delta t_{cr2}$

"Film Boiling + Radiation"

$$T_{boil} \leftarrow T_s(p_{Pa}, \text{Boiling_Fluid})$$

$$q \leftarrow \alpha_{FilmBoil}(\Delta t, p_{Pa}) \cdot \Delta t + c_{St_Bo} \left[(T_{boil} + \Delta t)^4 - (T_{boil})^4 \right]$$

Рис. 6.4. Расчет кривой кипения $q(\Delta t)$

Mathcad программу для построения кривой кипения можно просмотреть и запустить по ссылке [51].

Основная программа (рис. 6.4) вызывает функции для расчета теплоотдачи при пузырьковом и пленочном режимах кипения с учетом эффектов однофазной свободной конвекции и радиационного теплообмена. Как и в профессиональных программных продуктах, встроены функции для расчета теплофизических свойств теплоносителей. В приведенной версии включены два характерных теплоносителя с заметно различающимися свойствами: вода и так называемая электронная жидкость CF72, используемая для охлаждения электронной аппаратуры. При экспериментах с программой полезно провести расчеты и сопоставить кривые кипения для разных жидкостей и для различных давлений.

6.2. Модель теплообмена при пузырьковом кипении

Визуально наблюдаемая картина пузырькового кипения – с бурным перемешиванием жидкости у стенки посредством быстрорастущих пузырьков пара – делает качественно объяснимой высокую интенсивность теплообмена при кипении.

Однако непосредственно на твердой стенке движение жидкости (и перемешивание) блокируется вследствие прилипания. Естественно предположить, что заторможенный силами вязкости пристенный слой жидкости δ составляет основное термическое сопротивление, на которое приходится весь перепад температур $\Delta t = t_w - t_s$, а за пределами этого слоя благодаря интенсивному перемешиванию жидкость практически изотермична при температуре t_s . Тогда для коэффициента теплоотдачи получается следующее оценочное соотношение:

$$\alpha \approx \frac{1}{\left(\frac{\delta}{\lambda_{lq}} \right)} \equiv \frac{\lambda_{lq}}{\delta}. \quad (6.1)$$

Величину δ можно оценить следующим образом. Пусть известна поверхностная плотность n , м^{-2} центров парообразования, на которых образуются и растут пузырьки пара.

Среднее расстояние L_c , м, между ними составит:

$$L_c \approx \sqrt{\frac{1}{n}}. \quad (6.2)$$

Эту дистанцию растущий пузырек пара проходит за характерное время порядка τ_0 :

$$\tau_0 \approx \frac{L_c}{w_r}; \quad w_r \equiv \frac{q}{r \rho_{\text{vap}}}, \quad (6.3)$$

где w_r , м/с – приведенная скорость парообразования, т.е. объем пара, образующегося за единицу времени на единице поверхности стенки при заданной плотности теплового потока q . Величина w_r служит мерой скорости перемещения границы раздела фаз пар-жидкость. В конце дистанции L_c пузырьки сливаются и удаляются с поверхности, возобновляется контакт «свежей» жидкости с обогреваемой стенкой, и процесс повторяется.

Мы сводим эту картину к простейшей схеме и оцениваем величину δ как глубину проникания *возмущения* скорости (торможения на твердой поверхности) вглубь полуограниченного массива жидкости за характерное время τ_0 . Здесь обнаруживается аналогия с подробно рассмотренной ранее тепловой задачей о прогреве полуограниченного массива (Том 1 \ гл. 5 «Нестационарная теплопроводность», п. 5.4 «Задача о прогреве полуограниченного массива», п. «Оценка для аналогичной гидродинамической задачи»):

$$\underbrace{\delta_T \propto \sqrt{a_{lq} \tau_0}}_{\text{Тепловая задача}} \longleftrightarrow \text{Аналогия} \longleftrightarrow \underbrace{\delta \propto \sqrt{v_{lq} \tau_0}}_{\text{Динамическая задача}}; \quad (6.4)$$

$$\delta \propto \sqrt{v_{lq} \tau_0}; \quad \tau_0 \approx \frac{L_c}{w_r} \Rightarrow \delta \propto \sqrt{v_{lq} \frac{L_c}{w_r}}.$$

Полезно сопоставить полученную формулу с похожим результатом при моделировании обычной (однофазной) вынужденной конвекции при обтекании пластины (см. гл. 1, п. «Простейшая модель конвективной теплоотдачи», формула (1.4)).

Остается определить расстояние между центрами парообразования L_c . Как известно (гл. 5, п. 5.4), размер R_{cr} зародышевых (первичных, минимальных) пузырьков пара определяется *перегревом* жидкости у стенки, т.е. температурным напором Δt :

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_{vap}\Delta t}; \quad \Delta t \equiv T_w - T_s. \quad (6.5)$$

Центрами парообразования могут служить заполненные паром микроуглубления с размерами порядка R_{cr} , но не меньшими. Если принять, что частота, с которой встречаются микронеровности, зависит только от их размера, то из соображений размерности следует:

$$n \propto \frac{1}{R_{cr}^2} \quad (6.6)$$

и далее

$$L_c \approx \sqrt{\frac{1}{n}} \Rightarrow L_c = C_L R_{cr}, \quad (6.7)$$

где $C_L \gg 1$, безразмерный коэффициент, зависящий от степени шероховатости, способа обработки поверхности и т.п.

Сделаем необходимые подстановки:

$$\begin{aligned} \alpha \propto \frac{\lambda_{lq}}{\delta} &\Rightarrow \alpha \propto \frac{\lambda_{lq}}{\sqrt{v_{lq} \frac{L_c}{w_r}}} \Rightarrow \alpha \propto \frac{\lambda_{lq}}{\sqrt{v_{lq} \frac{R_{cr}}{w_r}}}; \\ \alpha &\propto \frac{\lambda_{lq}}{\sqrt{v_{lq} \left(\frac{2\sigma T_s}{r\rho_{vap}\Delta t} \right) \left(\frac{q}{r\rho_{vap}} \right)}} \equiv \sqrt{\frac{\lambda_{lq}^2 \Delta t q}{2\sigma T_s v_{lq}}}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Последняя формула содержит величины α , Δt и q , связанные между собой уравнением Ньютона–Рихмана: $q = \alpha \Delta t$.

После замены $\Delta t = q/\alpha$ и простых преобразований получают для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = b \left(\frac{\lambda_{lq}^2}{\nu_{lq} \sigma T_s} \right)^{1/3} q^{2/3}; \quad (6.9)$$

$$b = 0,075 \left[1 + 10 \left(\frac{\rho_{vap}}{\rho_{lq} - \rho_{vap}} \right)^{2/3} \right].$$

Собственно в рамках рассмотренной модели безразмерный коэффициент b является константой (примерно 0,075, как следует из сопоставления с экспериментом для давлений, далеких от критического). Однако при больших давлениях вводится дополнительный поправочный множитель (в квадратной скобке), чтобы улучшить согласование с опытными данными.

Изложенная модель пузырькового кипения восходит к работам Д.А. Лабунцова.

Применение формулы Лабунцова (6.9) иллюстрируется Mathcad программой (рис. 6.4) для расчета кривой кипения. Основная программа (рис. 6.4) обращается к функциям–подпрограммам для расчета пузырькового кипения (рис. 6.5) и однофазной свободной конвекции (рис. 6.6). При небольших тепловых потоках и, соответственно, малых перегревах жидкости влияние свободной конвекции становится преобладающим (область 1 на рис. 6.1–6.3).

$\alpha_{Lab}(q, pPa) :=$	$p \leftarrow pPa$ $(lq \text{ vap inter}) \leftarrow \begin{cases} Props(p) & \text{if Boiling_Fluid} = \text{"Water"} \\ Props_CF72(p) & \text{if Boiling_Fluid} = \text{"CF72"} \end{cases}$ $(\rho_l \ c_{p_l} \ \lambda_l \ \nu_l \ a_l \ Pr_l \ \beta_l) \leftarrow lq^T$ $(\rho_v \ c_{p_v} \ \lambda_v \ \nu_v \ a_v \ Pr_v \ \beta_v) \leftarrow vap^T$ $(T_s \ \sigma \ h_{vl} \ \rho_{v_l} \ \lambda_{v_l} \ \theta_{mas}) \leftarrow inter^T$ $\alpha_{Lab} \leftarrow 0.075 \cdot \left[1 + 10 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(\frac{\lambda_l^2}{\nu_l \cdot \sigma \cdot T_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot q^{\frac{2}{3}}$
---------------------------	---

Рис. 6.5. Расчет теплоотдачи при пузырьковом кипении

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\text{FreeConv}}(\Delta t, pPa) := & \quad p \leftarrow pPa \\
 & \quad (lq \text{ vap } inter) \leftarrow \begin{cases} \text{Props}(p) \text{ if Boiling_Fluid} = \text{"Water"} \\ \text{Props_CF72}(p) \text{ if Boiling_Fluid} = \text{"CF72"} \end{cases} \\
 & \quad (\rho_l \ c_{p_l} \ \lambda_l \ v_l \ a_l \ Pr_l \ \beta_l) \leftarrow lq^T \\
 & \quad (T_s \ \sigma \ h_{vl} \ \rho_{v_l} \ \lambda_{v_l} \ \theta_{mas}) \leftarrow inter^T \\
 & \quad Ra \leftarrow \frac{g \cdot \beta_l \cdot \Delta t \cdot Dtube^3}{v_l^2} \cdot Pr_l \\
 & \quad \alpha \leftarrow \frac{\lambda_l}{Dtube} \cdot 0.5 \cdot Ra^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

Рис. 6.6. Расчет теплоотдачи при свободной конвекции на горизонтальной трубе

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\text{FilmBoil}}(\Delta t, pPa) := & \quad p \leftarrow pPa \\
 & \quad (lq \text{ vap } inter) \leftarrow \begin{cases} \text{Props}(p) \text{ if Boiling_Fluid} = \text{"Water"} \\ \text{Props_CF72}(p) \text{ if Boiling_Fluid} = \text{"CF72"} \end{cases} \\
 & \quad (\rho_l \ c_{p_l} \ \lambda_l \ v_l \ a_l \ Pr_l \ \beta_l) \leftarrow lq^T \\
 & \quad (\rho_v \ c_{p_v} \ \lambda_v \ v_v \ a_v \ Pr_v \ \beta_v) \leftarrow vap^T \\
 & \quad (T_s \ \sigma \ h_{vl} \ \rho_{v_l} \ \lambda_{v_l} \ \theta_{mas}) \leftarrow inter^T \\
 & \quad h_{vl_ef} \leftarrow h_{vl} + 0.8 \cdot c_{p_v} \cdot \Delta t \\
 & \quad \alpha \leftarrow 0.62 \cdot \frac{\lambda_v}{Dtube} \cdot \left[\frac{g \cdot h_{vl_ef} (\rho_l - \rho_v) \cdot Dtube^3}{v_v \cdot \lambda_v \cdot \Delta t} \right]^{\frac{1}{4}}
 \end{aligned}$$

Рис. 6.7. Пленочное кипение

6.3. Компьютерная модель пузырькового кипения

Компьютерная модель пузырькового кипения, презентацию которой можно посмотреть по ссылке [51] детализирует изложенные выше физические представления. Модель конструируется из известных элементарных механизмов, таких как перегрев жидкости при ее возобновляющемся контакте со стенкой, зарождение пузырьков на активных центрах парообразования, рост пузырьков в перегретой жидкости, испарение тонкой пленки под пузырьками.

Новые представления применены при расчете плотности центров парообразования N , м^{-2} . Активные центры рассматриваются как структурные элементы шероховатой поверхности нагрева, имеющей фрактальный характер, с фрактальной размерностью $2 < D < 3$.

Аналогичный подход для описания реальных поверхностей уже используется в различных областях – от создания реалистических ландшафтов в компьютерной графике до исследования адсорбции и электрохимических процессов на шероховатых поверхностях.

Компьютерная модель построена на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений, численное интегрирование которой позволяет описать пространственно-временное распределение перегрева стенки при заданной плотности теплового потока. Осредненные характеристики воспроизводят теплоотдачу при кипении в широком интервале давления.

В последнее время развивается технология экспериментальных исследований пузырькового кипения на матрицах микронагревателей, изготавливаемых по микроэлектронным стандартам. Эти работы инициируются также интенсивным развитием микроэлектромеханических систем (MEMS), в которых возможно применение пузырьков как микропривода.

Детальное количественное описание элементарных механизмов кипения может сделать компьютерную модель полезным инструментом в указанной новой технологии. Более подробное изложение компьютерной модели можно найти в следующих источниках [53, 54].

6.4. Замечание о тепловом росте пузырьков пара

В пункте 6.2 говорилось об оценке скорости границы раздела фаз. Полезно иметь в виду, что межфазная граница проницаема для потоков массы, поэтому скорость среды и скорость границы, вообще говоря, не одинаковы.

Если фиксировать скоростной видеокамерой рост пузырька пара в перегретой жидкости, то посредством измерений радиуса

пузырька на кадрах можно определить скорость роста, или скорость фазовой границы, как величину

$$v_{surf} = \frac{dR}{d\tau}. \quad (6.10)$$

Скорость жидкости w_{1n} на границе пузырька не равна скорости v_{surf} , с которой смещается граница пузырька, поскольку на границе раздела имеет место фазовое превращение: граница проницаема для потоков массы. Скорость жидкости меньше v_{surf} , поскольку знак скорости испарения j будет отрицательным в естественной системе координат, когда расстояние отсчитывается от центра пузырька:

$$w_{1n} = v_{surf} + \frac{j}{\rho_1}. \quad (6.11)$$

Если бы пузырек газа просто «выдувался» в жидкость, как это бывает в некоторых технологических процессах, то скорость жидкости была бы равна скорости роста (выдувания) пузырька, поскольку поперечный потока массы через границу был бы нулевым.

В задаче о росте пузырька при кипении можно считать с некоторым приближением, пренебрегая инерционными эффектами, что давление пара внутри него остается постоянным, равным давлению насыщения при фиксированной температуре. Постоянной будет также плотность пара, а массовое количество пара и объем пузырька будут расти пропорционально скорости испарения. В этом приближении «теплого» роста скорость пара следует принять нулевой:

$$w_{2n} = \frac{j}{\rho_2} + v_{surf} = 0 \Rightarrow v_{surf} \equiv \frac{dR}{d\tau} = -\frac{j}{\rho_2}. \quad (6.12)$$

Тогда после подстановки последнего выражения в уравнение (6.11), получим для скорости жидкости на границе следующее явное выражение через скорость смещения границы (скорость роста):

$$w_{1n} = v_{surf} + \frac{j}{\rho_1} = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{dR}{d\tau}. \quad (6.13)$$

Видно, что при высоком давлении указанное различие скоростей может быть большим, а при приближении к критической термодинамической точке скорость жидкости, как и скорость пара, будет практически нулевой, в то время как граница раздела будет смещаться с конечной скоростью.

6.5. Гидродинамическая модель кризиса кипения

При кипении от стенки *отводится* поток пара, и для поддержания материального баланса должен *подводиться* такой же массовый поток жидкости. Отводимый поток пара движется со скоростью порядка приведенной скорости парообразования $w_r = q/r\rho_v$.

Предполагается, что компенсирующее опускное движение жидкости к обогреваемой стенке происходит под действием гравитации, в то время как динамический напор парового потока, уходящего от поверхности нагрева, препятствует опускному движению и стремится оторвать жидкость от стенки. В предкризисной ситуации обе силы взаимно уравниваются:

$$\underbrace{\rho_v w_r^2 \cdot L^2}_{\text{Динамический напор}} \approx \underbrace{g(\rho_l - \rho_v) \cdot L^3}_{\text{Гравитация}}. \quad (6.14)$$

Здесь L – характерный размер волновых образований на границе раздела парового и жидкостного потока, движущихся с относительной скоростью порядка w_r . Волнообразование обязано своим возникновением феномену неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Величины L^2 и L^3 определяют сечение и объем этих образований.

Размер L для капиллярных волн может быть оценен приравнением динамического давления, генерирующего волны, и Лапласовского давления, стремящегося сгладить неровности поверхности раздела посредством поверхностного натяжения σ :

$$\underbrace{\rho_v w_r^2}_{\text{Динамическое давление}} \approx \underbrace{\frac{\sigma}{L}}_{\text{Лапласовское давление}} \Rightarrow L \approx \frac{\sigma}{\rho_v w_r^2}. \quad (6.15)$$

Подстановка L из (6.15) в (6.14) дает:

$$\begin{aligned} \rho_v w_{r\,cr}^2 &\approx g(\rho_l - \rho_v) \frac{\sigma}{\rho_v w_{r\,cr}^2} \Rightarrow \\ w_{r\,cr} &\approx \frac{1}{\sqrt{\rho_v}} \sqrt[4]{g(\rho_l - \rho_v)\sigma}; \\ w_{r\,cr} &= \frac{q_{cr}}{r\rho_v} \Rightarrow \\ q_{cr1} &= 0,14r\sqrt{\rho_v} \sqrt[4]{g(\rho_l - \rho_v)\sigma}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Числовой множитель 0,14 получается из сопоставления теоретической оценки и экспериментальных данных.

Аналогичные соображения для явления потери устойчивости пленки пара при пленочном кипении приводят к следующей формуле для q_{cr2} :

$$q_{cr2} = 0,09r\rho_v \sqrt[4]{\frac{g(\rho_l - \rho_v)\sigma}{(\rho_l + \rho_v)^2}}. \quad (6.17)$$

Расчет критической плотности иллюстрируется программными модулями (рис. 6.4, 6.8) и графическими представлением зависимости от давления (рис. 6.9), а расчет коэффициента теплоотдачи при пленочном кипении на горизонтальной трубе представлен на рис. 6.7.

$q_{cr}(pPa) := \begin{cases} p \leftarrow pPa \\ (lq \text{ vap inter}) \leftarrow \begin{cases} \text{Props}(p) & \text{if Boiling_Fluid} = \text{"Water"} \\ \text{Props_CF72}(p) & \text{if Boiling_Fluid} = \text{"CF72"} \end{cases} \\ (\rho_l \ c_{p_l} \ \lambda_l \ v_l \ a_l \ Pr_l \ \beta_l) \leftarrow lq^T \\ (\rho_v \ c_{p_v} \ \lambda_v \ v_v \ a_v \ Pr_v \ \beta_v) \leftarrow vap^T \\ (T_s \ \sigma \ h_{vl} \ \rho_{v_l} \ \lambda_{v_l} \ \theta_{mas}) \leftarrow inter^T \\ q_{cr1} \leftarrow 0.14 \cdot h_{vl} \cdot \sqrt{\rho_v} \cdot \sqrt[4]{g \cdot (\rho_l - \rho_v) \cdot \sigma} \\ q_{cr2} \leftarrow 0.09 \cdot h_{vl} \cdot \rho_v \cdot \sqrt[4]{\frac{g \cdot (\rho_l - \rho_v) \cdot \sigma}{(\rho_l + \rho_v)^2}} \\ \begin{pmatrix} q_{cr1} \\ q_{cr2} \end{pmatrix} \end{cases}$
--

Рис. 6.8. Расчет критической плотности теплового потока

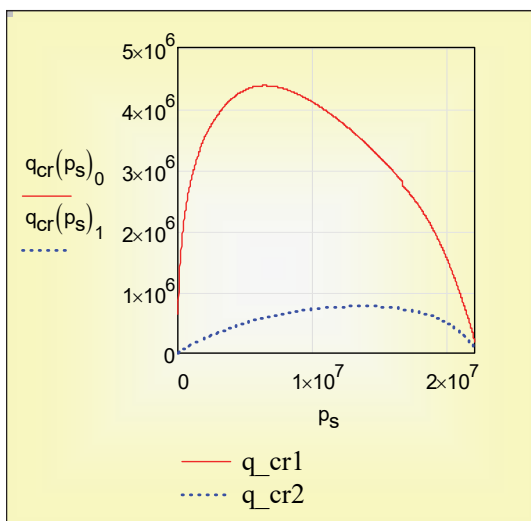


Рис. 6.9. Критическая плотность теплового потока для воды в зависимости от давления

6.6. Кипение в трубах

В энергетических установках процесс кипения часто реализуется как кипение в трубах. Жидкость (недогретая до температуры насыщения) подается в обогреваемый снаружи канал и последовательно проходит через несколько характерных зон (рис. 6.10):

- зону подогрева до температуры насыщения (экономайзерный участок), возможно, с поверхностным кипением;
- зону пузырькового кипения с увеличивающимся паросодержанием пузырькового потока, вплоть до перехода к дисперсно–кольцевому течению (по достижении плотной упаковки пузырьков), когда дисперсной фазой становится жидкость;
- зону испарения кольцевой пленки жидкости на стенке при дисперсно–кольцевом течении;
- зону испарения дисперсной влаги в ядре потока;
- зону перегрева однофазного парового потока на выходе из канала.

Как и при кипении в большом объеме, возможен переход от пузырькового к пленочному кипению (кризис первого рода, кризис осушения стенки, burnout (англ.)). Специфическим является

кризис второго рода – кризис высыхания пленки при дисперсно-кольцевом режиме (dryout (англ.)).



Рис. 6.10. Кипение в трубе

Расчет кипения в трубах представляет сложную задачу, вследствие многообразия форм двухфазного потока. Основными влияющими параметрами являются давление, длина и диаметр канала, массовая скорость, плотность теплового потока, теплофизические свойства теплоносителя. Необходимо идентифицировать режимы двухфазного потока по длине канала, рассчитать теплоотдачу и температуру стенки канала, определить гидравлическое сопротивление, диагностировать кризисы кипения.

Основные количественные характеристики двухфазного потока, такие как массовая скорость ρw , объемное β и массовое x паросодержание были подробно рассмотрены выше в гл. 5. Физические параметры, записанные без индексов, условимся относить к двухфазному потоку как к некоторой специфической среде с особыми свойствами, а жидкую и паровую фазы обозначать индексами « l » и « v ».

Расчет теплообмена при кипении в трубах

Теплообмен в докризисной зоне. При кипении в трубах необходимо учитывать два фактора, определяющих интенсивность теплопереноса от стенки к жидкости:

- собственно процесс пузырькового кипения с интенсивным перемешиванием жидкости у стенки быстрорастущими пузырьками пара;

- конвекцию при вынужденном движении теплоносителя в канале.

Количественной мерой влияния этих факторов на результирующую интенсивность теплообмена α являются соответственно:

- α_q – коэффициент теплоотдачи при пузырьковом кипении в *большом объеме*, то есть при отсутствии вынужденного движения в трубе;

- α_w – коэффициент теплоотдачи при вынужденном течении двухфазной смеси в отсутствии кипения (трение и теплообмен в двухфазном потоке как в гомогенной среде с особыми свойствами рассчитываются по гомогенной модели из гл. 5).

Имеются две очевидные предельные ситуации:

1. $\alpha \Rightarrow \alpha_q$ если $\alpha_q \gg \alpha_w$;

2. $\alpha \Rightarrow \alpha_w$ если $\alpha_q \ll \alpha_w$.

Первый случай реализуется при больших значениях теплового потока к кипящей жидкости и относительно малой скорости вынужденного движения, второй – при больших значениях скорости и относительно малых тепловых потоках.

Для промежуточной ситуации можно найти подходящую интерполяцию между этими предельными случаями, например:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_q^2 + \alpha_w^2}. \quad (6.18)$$

Для расчета величины α_q можно использовать формулу Лабунцова для пузырькового кипения в большом объеме:

$$\alpha_q = 0,075 \left(1 + 10 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \right)^{2/3} \right) \left(\frac{\lambda_l^2}{\nu_l \sigma T_s} \right)^{1/3} q^{2/3}. \quad (6.19)$$

Для расчета α_w при турбулентном режиме течения двухфазной смеси можно использовать соотношение (5.97), полученное ранее в гл. 5 по гомогенной модели для случая, когда непрерывной фазой, контактирующей с обогреваемой стенкой, является жидкость:

$$\alpha_w = \frac{\lambda_l}{d} \left(0,023 \text{Re}_{lq}^{0,8} \text{Pr}_{lq}^{0,4} \right) \sqrt{1 + x \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1 \right)}, \quad (6.20)$$

где

$$\text{Re}_{lq} = \frac{(\rho w)d}{\mu_l}.$$

Теплообмен в закризисной зоне. В закризисной зоне структура двухфазного потока следующая. Непрерывной фазой, контактирующей с обогреваемой стенкой, является пар. Мелкие взвешенные капли жидкости движутся в ядре потока. Поэтому для расчета коэффициент теплоотдачи можно воспользоваться формулой (5.100), полученной ранее в гл. 5 в рамках гомогенной модели:

$$\alpha = \frac{\lambda_v}{d} (0,023 \text{Re}_v^{0,8} \text{Pr}_v^{0,4}) \sqrt{x + (1-x) \frac{\rho_v}{\rho_l}} ;$$

$$\text{Re}_v = \frac{(\rho w) d}{\mu_v} .$$
(6.21)

Расчет кризиса кипения в трубах. Напомним, что под кризисом кипения понимают резкое уменьшение коэффициента теплоотдачи вследствие прекращения контакта обогреваемой стенки с жидкой фазой и перехода к режиму контакта с паровой фазой. Различают два основных механизма кризиса кипения в трубах:

- кризис оттеснения жидкой фазы, который аналогичен кризису при кипении в большом объеме, однако осложнен влиянием вынужденного течения двухфазной смеси в канале;
- кризис высыхания жидкой пленки на стенке при кольцевом режиме течения двухфазного потока.

Пока не существует исчерпывающей теории этого сложного явления. Учитывая высокую ответственность при прогнозировании кризиса (это связано с возможным пережогом поверхности нагрева), в настоящее время предпочитают пользоваться экспериментальными табличными данными.

Приведем небольшой фрагмент такой таблицы для кипения воды в трубе диаметром 8 мм при давлении 1,5 МПа:

w, кг/м ² с	x=0	0,2	0,4	0,6	0,8
2000	8,6	5,7	*	0,28	0,17
2500	8,6	5,53	*	0,31	0,19
3000	8,6	5,39	0,47	0,33	0,21

Например, при давлении 1,5 МПа, массовой скорости 2500 кг/м²с и паросодержании 0,2 кризис кипения происходит при $q > q_{cr} = 5,53 \cdot 10^6$ Вт/м². Символ «*» означает, что в экспериментах

наблюдался большой разброс экспериментальных данных вследствие нестабильности режима кипения. Из таблицы видно, что в области паросодержаний 0,2 – 0,4 (для приведенного небольшого фрагмента полной таблицы) наблюдается резкое падение критического теплового потока, что связывают с кризисом высыхания пленки при кольцевом режиме. Соответствующее значение паросодержания называют граничным паросодержанием и обозначают x_{cr} .

Таблицей трудно воспользоваться при компьютерных расчетах. В литературе имеются аппроксимации, удовлетворительно воспроизводящие экспериментальные данные.

Одно из таких эмпирических уравнений приводится далее:

$$\begin{aligned} q_{cr} &= f(p) (\rho w \cdot 10^{-3})^{m(p,x)} \exp(-1,5x); \\ f(p) &= 10,3 - 0,796p + 0,0167p^2; \\ m(p,x) &= 1,2(0,25(0,1p - 1) - x). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Эту формулу можно использовать в следующем диапазоне параметров:

$$p = 3 \div 16 \text{ МПа}; \quad \rho w = 750 \div 2000 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с}); \quad x = 0 \div x_{cr}.$$

Для значений диаметра трубы, отличных от 8 мм, в диапазоне 4–20 мм используют поправку:

$$q_{cr}(d) = q_{cr}(d = 8 \text{ мм}) \left(\frac{8}{d} \right)^{0,5}. \quad (6.23)$$

Для диаметров, больше 20 мм, дальнейшее уменьшение критического теплового потока с ростом диаметра не происходит.

Граничное паросодержание рассчитывают по формуле:

$$x_{cr} = \frac{(0,39 + 0,16p - 0,0212p^2 + 0,00072p^3)}{(\rho w \cdot 10^{-3})^{0,5}}. \quad (6.24)$$

Пересчет на другой диаметр производится по формуле:

$$x_{cr}(d) = x_{cr}(d = 8)(8/d)^{0,25}. \quad (6.25)$$

Можно также воспользоваться следующей аппроксимацией:

$$x_{cr} = 1 - 0,86 \exp(-19/\sqrt{We}), \quad (6.26)$$

где We – модифицированное число Вебера:

$$We = \frac{(\rho w)^2 d}{\rho_l \sigma}.$$

Уравнение теплового баланса. Балансовое паросодержание. При постоянной по длине канала плотности теплового потока уравнение теплового баланса для текущего значения длины канала z можно записать следующим образом:

$$q \pi d z = G \cdot (h - h_{l,z=0}). \quad (6.27)$$

Это соотношение используется для расчета изменения паросодержания по длине канала при заданной плотности теплового потока. Напомним, что паросодержание необходимо знать для расчета коэффициента теплоотдачи и прогнозирования кризиса кипения, а температуру теплоносителя t_f – для последующего расчета температуры стенки канала t_w .

Преобразуем правую часть уравнения теплового баланса (6.27) так, чтобы отсчитывать энтальпию от уровня, соответствующего энтальпии жидкости на линии насыщения h_{ls} ,

$$q \pi d z = G \cdot ((h - h_{ls}) - (h_{l,z=0} - h_{ls})), \quad (6.28)$$

и сделаем это уравнение безразмерным, поделив обе части на произведение $G \cdot r$:

$$\frac{q \pi d}{G r} z = \frac{h - h_{ls}}{r} - \frac{h_{l,z=0} - h_{ls}}{r}. \quad (6.29)$$

Величина

$$x_b \equiv \frac{h - h_{ls}}{r} \quad (6.30)$$

называется балансовым паросодержанием (так как вычисляется из уравнения теплового баланса). Смысл этой величины и ее связь с ранее введенным расходным массовым паросодержанием x можно пояснить следующим образом.

Имеются три характерные зоны по длине канала:

- 1) зона подогрева воды до температуры насыщения;
- 2) зона двухфазного потока с примерно постоянной температурой двухфазной среды, равной температуре насыщения;
- 3) зона перегрева пара.

В первой зоне энтальпия теплоносителя меньше энтальпии на линии насыщения на величину теплоты недогрева:

$$h = h_{ls} - c_{pl}(t_s - t_f). \quad (6.31)$$

Подставляя это выражение в формулу (6.30), получим:

$$x_b = -\frac{c_{pl}(t_s - t_f)}{r}, \quad (6.32)$$

т.е. балансовое паросодержание имеет отрицательное значение и равно относительной теплоте недогрева жидкости до температуры насыщения.

Во второй зоне – зоне двухфазного потока:

$$\begin{aligned} h &= xh_{vs} + (1-x)h_{ls} \equiv h_{ls} + x(h_{vs} - h_{ls}) \equiv h_{ls} + xr; \\ x_b &= x, \end{aligned} \quad (6.33)$$

т.е. значения балансового и расходного паросодержания одинаковы. Отметим, что при вычислении энтальпии двухфазной смеси предполагалось наличие термического равновесия фаз. В действительности, неравновесность всегда в той или иной мере имеет место, поскольку перенос теплоты неразрывно связан с неоднородностью температурного поля. Например, температура капель в дисперсном потоке может быть ниже температуры перегретого пара, соприкасающегося с горячей стенкой. Однако в практических расчетах эти эффекты обычно не учитывают.

В зоне перегрева пара:

$$\begin{aligned} h &= h_{ls} + r + c_{pv}(t_f - t_s); \\ x_b &= 1 + \frac{c_{pv}(t_f - t_s)}{r}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

т.е. балансовое паросодержание превышает единицу на величину относительной теплоты перегрева пара.

Формулы (6.32), (6.34) поясняют смысл отрицательных или бóльших единицы значений паросодержания. В двухфазной области балансовое паросодержание просто совпадает с расходным массовым паросодержанием. Для области недогрева балансовое паросодержание является важным безразмерным параметром в соотношениях специальной литературы, учитывающих влияние недогрева жидкости на теплоотдачу при кипении и на кризис кипения.

Кипение недогретой жидкости в канале. При расчете экономайзерного участка следует учитывать возможность возникновения так называемого поверхностного кипения, если темпера-

тура стенки превысит значение температуры насыщения жидкости. При поверхностном кипении образовавшиеся на горячей стенке пузырьки пара попадают затем в поток холодной жидкости и конденсируются.

Коэффициент теплоотдачи при поверхностном кипении можно оценить по уже использовавшейся методике для кипения движущейся насыщенной двухфазной смеси, однако следует учесть, что коэффициент теплоотдачи при кипении относят к разности температур стенки и насыщения, в то время как конвективный коэффициент – к разности температур стенки и недогретой до температуры насыщения жидкости.

Начинать расчет следует в предположении, что кипения нет, и определить температуру стенки t_w из соотношения:

$$t_w - t_f = q / \alpha_w . \quad (6.35)$$

Если окажется, что температура стенки больше температуры насыщения, то необходимо использовать интерполяционное соотношение в следующей форме:

$$\alpha \equiv \frac{q}{t_w - t_f} = \sqrt{\alpha_{\text{boil}}^2 + \alpha_w^2} , \quad (6.36)$$

где коэффициент теплоотдачи при кипении рассчитывается через правильное значение температурного напора:

$$\alpha_{\text{boil}} = -c(p) \cdot (t_w - t_s)^2 , \quad (6.37)$$

где $c(p)$ – коэффициент, учитывающий зависимость от давления.

После подстановки (6.37) в (6.36) получается уравнение относительно неизвестной температуры стенки:

$$\frac{q}{t_w - t_f} = \sqrt{c^2 \cdot (t_w - t_s)^4 + \alpha_w^2} . \quad (6.38)$$

Это уравнение обеспечивает корректную обработку ситуации, когда температура стенки близка к температуре насыщения, $t_w \approx t_s$. Ясно, что при этом кипения еще нет,

$$\alpha = \sqrt{0 + \alpha_w^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_w ,$$

т.е. весь тепловой поток снимается в режиме однофазной конвекции. Применение интерполяции (6.36) непосредственно в форме

$$\alpha = \sqrt{(c_q q^{2/3})^2 + \alpha_w^2}$$

привело бы к завышенному результату, поскольку первое слагаемое под корнем оказалось бы ненулевым.

В уравнении (6.38) плотность теплового потока считается заданной величиной. Температура жидкости t_f вычислена из уравнения теплового баланса, температура насыщения определена по давлению, а конвективный коэффициент теплоотдачи рассчитан по известному значению скорости однофазного потока (по скорости циркуляции). Это – нелинейное уравнение, и его нужно решать каким-либо численным методом, как показано далее в компьютерной реализации описанной расчетной методики.

Компьютерная модель парогенерирующего канала

Изложенная методика лежит в основе компьютерной модели парогенерирующего канала, реализованной в среде Visual Basic.

Далее показаны экранные копии, иллюстрирующие взаимодействие пользователя с вычислительной программой. Работа начинается с обращения к базе данных в формате Access, содержащей уже исследованные ранее режимы (рис. 6.11). Здесь пользователь имеет возможность выбрать параметры режима, просмотреть и при необходимости отредактировать исходные данные, добавить или удалить запись в базе данных.

Результаты расчета представляются в наглядной графической форме и позволяют провести полную диагностику режимов кипения в канале (рис. 6.12–6.14).

Распределение температур стенки и жидкости показано на рис. 6.12 для кипения недогретой жидкости на входном экономайзерном участке и далее при пузырьковом кипении.

Ухудшенный режим работы парогенерирующего канала при малой скорости циркуляции представлен на рис. 6.13–6.14. Следует обратить внимание на резкое падение коэффициента теплоотдачи и недопустимое возрастание температуры стенки вблизи выхода из парогенерирующего канала.

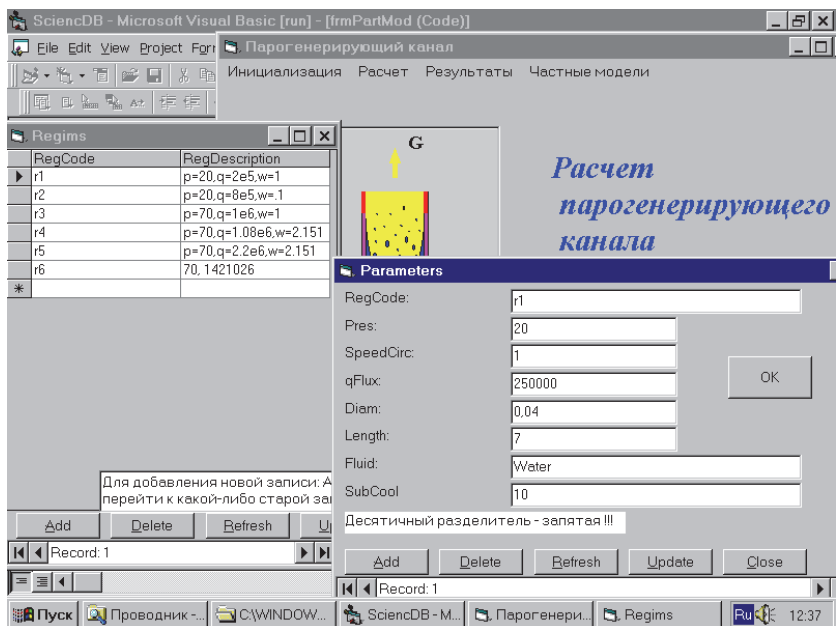


Рис. 6.11. Работа с базой данных Access

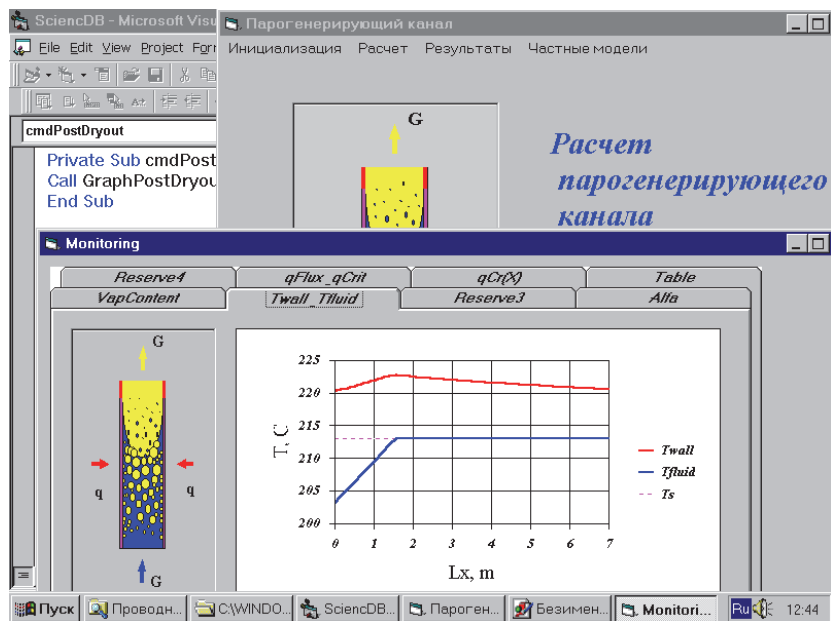


Рис. 6.12. Распределение температур при кипении недогретой жидкости

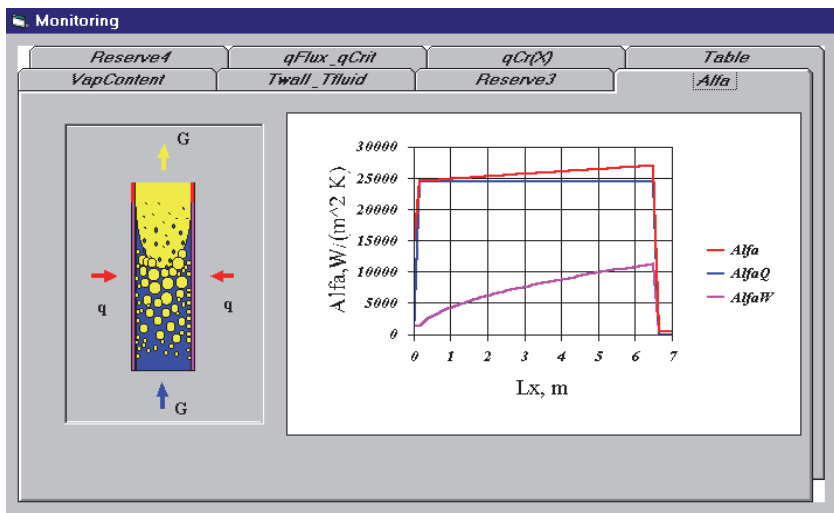


Рис. 6.13. Распределение коэффициента теплоотдачи по длине канала при кипении в условиях низкой скорости циркуляции

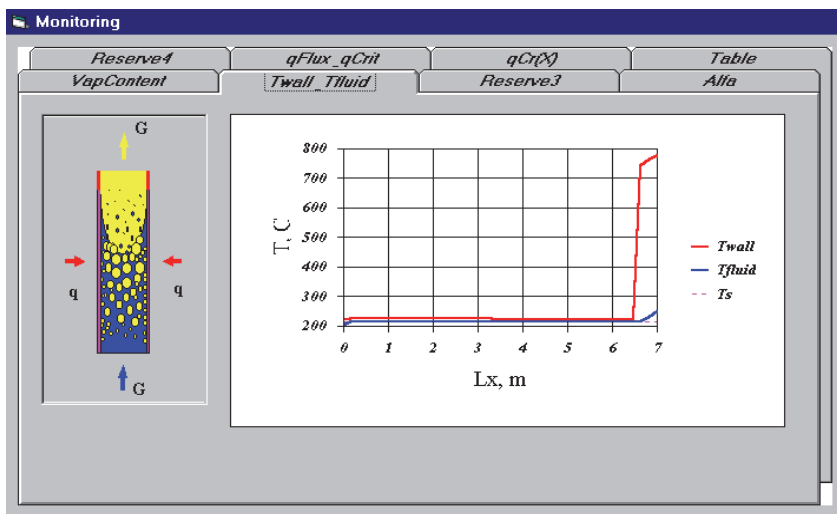


Рис. 6.14. Распределение температур стенки и жидкости при кипении в условиях низкой скорости циркуляции

Описанный выше алгоритм реализован также в пакете Mathcad [51].

Работа с Mathcad программой начинается с выбора записи из базы данных, содержащей входные параметры, или с дополнения базы новой записью (рис. 6.15).

Prof. Solodov A.P. MPEI(TU)

Boiling inside tube
Кипение в трубах

dbase

База данных

State :=

	0	1	2	3	4	5	6
0	"Fluid"	"CircRate,m/s"	"Pres, Pa"	"D, m"	"L,m"	"q,W/m^2"	"SubCool,K"
1	"Water"	1	$7 \cdot 10^6$	0.04	7	$2.5 \cdot 10^5$	10
2	"Water"	1	$2 \cdot 10^6$	0.08	7	$1 \cdot 10^6$	10
3	"Water"	1	$2.5 \cdot 10^6$	0.08	7	$1 \cdot 10^6$	10
4	"Water"	0.1	$2 \cdot 10^6$	0.04	7	$2.5 \cdot 10^5$	10
5	"Water"	1	$7 \cdot 10^6$	0.08	7	$1.5 \cdot 10^5$	30
6	"Water"	2.151	$7.1 \cdot 10^6$	0.08	7	$1.08 \cdot 10^6$	20
7	"Water"	2.151	$7 \cdot 10^6$	0.08	7	$2.238 \cdot 10^6$	20
8	"Water"	1	$1 \cdot 10^6$	0.08	7	$1 \cdot 10^6$	10
9	"Water"	1	$6 \cdot 10^5$	0.08	7	$1 \cdot 10^6$	20
10	"Water"	1	$1.5 \cdot 10^6$	0.08	7	$1 \cdot 10^6$	10
11	"Water"	1	$7 \cdot 10^6$	0.04	7	$1 \cdot 10^6$	10

Выбор записи из базы данных:

NofState :=

$$\begin{pmatrix} \text{Fluid} \\ w_{\text{circ}} \\ p_{\text{Pa}} \\ D_{\text{tube}} \\ L_{\text{tube}} \\ q \\ \delta t_{\text{subc}} \end{pmatrix} := \text{submatrix}(\text{State}, \text{NofState}, \text{NofState}, 0, 6)^T$$

$$\begin{pmatrix} \text{Fluid} \\ w_{\text{circ}} \\ p_{\text{Pa}} \\ D_{\text{tube}} \\ L_{\text{tube}} \\ q \\ \delta t_{\text{subc}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Water"} \\ 1 \\ 7 \times 10^6 \\ 0.04 \\ 7 \\ 1 \times 10^6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

dbase

Рис. 6.15. Обращение к базе данных для ввода параметров

Основная программа (рис. 6.16) сканирует канал по длине, диагностирует режимы и присваивает значения соответствующим логическим переменным (таким как blnBurnout, blnDryout, blnSuperheat), рассчитывает температуру потока и паросодержание, коэффициент теплоотдачи и температуру стенки.

```

Res :=
N ← NoStep
fm(x,y) ← 0
αq ← matrix(NoStep + 1, 1, fm)
(L ← αq, x ← L, Tw ← L, Tr ← L, qcr ← L, α ← L, αw ← L, αq ← L)
binSupHeat ← 0
for i ∈ 0...NoStep
  Li ←  $\frac{L_{tube}}{NoStep - i}$ 
  xi ←  $\frac{L_i}{L_{mas}} - Kut$ 
  qcr_i ← CHF(ppa, pw, xi)
  binBurnout ← (q > qcr_i)
  binDryout ← (xi > xcr)
  binCrisis ← binBurnout ∨ binDryout
  Tr_i ← Ts
  binSubCool ← (xi < 0)
  Tr_i ← (Ts - β_subcr) +  $\frac{q_i \cdot \pi \cdot D_{tube} \cdot L_i}{G \cdot c_{pl}}$  if binSubCool
  if xi ≥ 1
    Levap ← Li if (-binSupHeat)
    binSupHeat ← -1
    xi ← -1
    Tr_i ← Ts +  $\frac{q_i \cdot \pi \cdot D_{tube} \cdot (L_i - Levap)}{G \cdot c_{pv}}$ 
  binVapContact ← binCrisis ∨ binSupHeat
  if binVapContact
    "contact wall-vapor"
    αw_i ← αconv  $\left( \begin{array}{c} binCrisis \\ binSupHeat \end{array} \right)$ 
    αi ← αw_i
  if binSubCool

```

```

"subcooled liquid"
xi ← 0
αw_i ← αconv  $\left( \begin{array}{c} binCrisis \\ binSupHeat \end{array} \right)$ 
Tr_w_i ← Tr_i +  $\frac{q}{\alpha_w_i}$ 
if Tr_w_i > Ts
  "boiling of subcooled liquid"
  Tw ← Ts
  Tr_w ← root(q - (Tr_w - Tr_i)  $\sqrt{(\alpha_w_i)^2 + [C_{At} (Tr_w - Ts)]^2}$ , Tr_w)
  Tr_w_i ← Tr_w
  αi ←  $\frac{q}{Tr_w_i - Tr_i}$ 
otherwise
  "one phase subcooled liquid"
  αi ← αw_i
otherwise
  "contact wall-liquid, boiling"
  αq_i ← αpoolBoil
  αw_i ← αconv  $\left( \begin{array}{c} binCrisis \\ binSupHeat \end{array} \right)$ 
  αi ←  $\sqrt{(\alpha_q)^2 + (\alpha_w)^2}$ 
  Tr_w_i ← Tr_i +  $\frac{q}{\alpha_i}$ 
return (L, x, Tw, Tr, αw, αq, α, qcr)

```

Рис. 6.16. Кипение в трубах (основная программа)

$$x_{cr} := 1 - 0.86 \cdot \exp\left(\frac{-19}{\rho_w \cdot \sqrt{\frac{D_{tube}}{\rho_l \cdot \sigma}}}\right)$$

$$CHF(p_{ra}, \rho_w, x_{vap}) := \begin{cases} p_{Mpa} \leftarrow p_{ra} \cdot 10^{-6} \\ f \leftarrow 10.3 - 0.796 \cdot p_{Mpa} + 0.0167 \cdot p_{Mpa}^2 \\ m \leftarrow 1.2 \cdot [0.25 \cdot (0.1 \cdot p_{Mpa} - 1) - x_{vap}] \\ "MW/m^2;" \\ q_{cr} \leftarrow f \cdot (p_w \cdot 0.001)^m \cdot \exp(-1.5 \cdot x_{vap}) \\ Crct \leftarrow \left(\frac{0.008}{D_{tube}}\right)^{0.5} \text{ if } D_{tube} < 0.02 \\ Crct \leftarrow \left(\frac{0.008}{0.02}\right)^{0.5} \text{ otherwise} \\ "W/m^2;" \\ q_{cr} \leftarrow q_{cr} \cdot Crct \cdot 10^6 \\ q_{cr} \leftarrow q_{cr} \cdot 0.1 \text{ if } x_{vap} > x_{cr} \end{cases}$$

Рис. 6.17. Критический тепловой поток

$$\alpha_{conv}(\text{vec}) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{binCrisis} \\ \text{binSupHeat} \\ x_{vap} \end{pmatrix} \leftarrow \text{vec} \\ x_{vap} \leftarrow \max(x_{vap}, 0) \\ x_{vap} \leftarrow \min(1, x_{vap}) \\ \text{binVapContact} \leftarrow \text{binCrisis} \vee \text{binSupHeat} \\ \text{if binVapContact} \\ \begin{cases} Re_V \leftarrow \frac{\rho_w \cdot D_{tube}}{\rho_v \cdot \nu} \\ Nu \leftarrow 0.023 \cdot Re_V^{0.8} \cdot Pr_V^{0.43} \\ \alpha_{vap} \leftarrow Nu \cdot \frac{\lambda_v}{D_{tube}} \\ \alpha_{conv} \leftarrow \alpha_{vap} \cdot \sqrt{x_{vap} + (1 - x_{vap}) \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l}} \end{cases} \\ \text{otherwise} \\ \begin{cases} Re_l \leftarrow \frac{\rho_w \cdot D_{tube}}{\rho_l \cdot \nu_l} \\ Nu \leftarrow 0.023 \cdot Re_l^{0.8} \cdot Pr_l^{0.43} \\ \alpha_{lq} \leftarrow Nu \cdot \frac{\lambda_l}{D_{tube}} \\ \alpha_{conv} \leftarrow \alpha_{lq} \cdot \sqrt{1 + x_{vap} \cdot \left(\frac{\rho_l}{\rho_v} - 1\right)} \end{cases} \\ \alpha_{conv} \end{cases}$$

Рис. 6.18. Расчет α_{conv}

$$C_q := 0.075 \cdot \left[1 + 10 \left(\frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \cdot \left(\frac{\lambda_l^2}{v_l \sigma \cdot T_s} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\alpha_{PoolBoil} := C_q \cdot q^{\frac{2}{3}}$$

$$C_{\Delta t} := C_q^3$$

$$\alpha_{PoolBoil} = C_{\Delta t} \cdot \Delta t^2$$

Рис. 6.19. Расчет пузырькового кипения в большом объеме

Основная программа обращается к подпрограммам-функциям, рассчитывающим

- критический тепловой поток CHF (рис. 6.17) и критическое (граничное) паросодержание x_{cr} (6.22)–(6.26);
- коэффициент теплоотдачи α_{conv} (рис. 6.18) к двухфазному потоку при отсутствии пузырькового кипения (см. подробное описание методики в предыдущем пункте, уравнения (6.20), (6.21));
- коэффициент теплоотдачи $\alpha_{PoolBoil}$ (рис. 6.19) при пузырьковом кипении в большом объеме как меру вклада кипения в эффективный коэффициент теплоотдачи при кипении в потоке (см. (6.18)).

Блок “boiling of subcooled liquid” основной программы (рис. 6.16) обращается к встроенной функции “root” для решения нелинейного уравнения, определяющего температуру стенки при кипении недогретой жидкости (6.38).

В примере вычислений (рис. 6.20) имеет место кризис высыхания: на длине $L \approx 6$ м паросодержание достигает критического (граничного) значения, что означает высыхание пленки жидкости на стенке в режиме дисперсно-кольцевого течения.

В учебной компьютерной модели сделано допущение о примерном постоянстве давления вдоль канала.

Можно усовершенствовать компьютерную модель, добавив программный модуль для расчета гидравлического сопротивления двухфазного потока с учетом трения (см. соотношение (5.91) из гл. 5) и ускорения потока.

Такая доработка Mathcad программы может быть заданием для учебно-исследовательской работы.

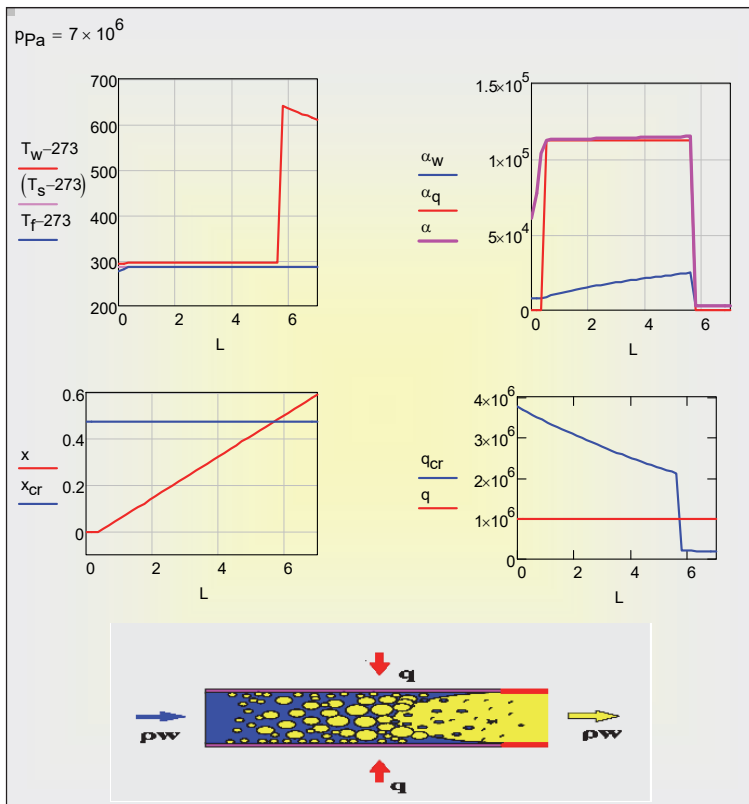


Рис. 6.20. Кризис высыхания

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое пузырьковое и пленочное кипение на поверхности в большом объеме?
2. Определите кривую кипения. Что такое кризис кипения I рода?
3. Запишите модель теплообмена при пузырьковом кипении. Приведите формулу Лабунцова.
4. Приведите алгоритм расчета теплообмена при кипении в трубах. Дайте понятие кризиса кипения II рода. Как рассчитать запас до кризиса кипения?
5. Опишите структуру компьютерной модели парогенерирующего канала.

Глава 7. ТЕПЛООБМЕН ПРИ КОНДЕНСАЦИИ

7.1. Общее описание процесса конденсации

Чистый (без неконденсирующихся примесей) насыщенный пар конденсируется на охлаждаемой стенке (рис. 7.1), температура которой t_w (wall – стенка) меньше температуры насыщения при заданном давлении:

$$t_w < t_s(p_s). \quad (7.1)$$

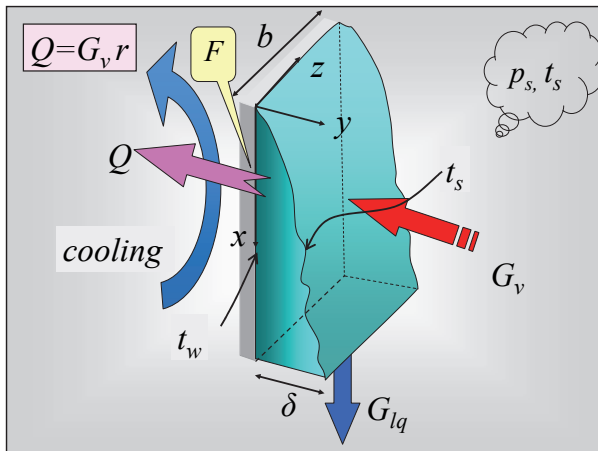


Рис. 7.1. Схема процесса конденсации

Если образующийся на холодной стенке конденсат смачивает ее поверхность, то получается *пленка* жидкости, стекающая под действием силы тяжести или увлекаемая быстродвижущимся паром. В таком случае говорят о *пленочной* конденсации пара. Если посредством специальных покрытий гидрофобизировать (сделать несмачиваемой) поверхность, то можно получить *капельную* конденсацию, отличающуюся высокой интенсивностью.

В дальнейшем рассматривается пленочная конденсация пара, обычно имеющая место на практике в конденсационных устройствах энергетических установок.

Чтобы сконденсировать пар в количестве G_v (*vapor* – пар), из конденсатора через поверхность теплопередачи F должен быть отведен тепловой поток Q :

$$Q = G_v r + (\text{теплота переохлаждения конденсата}), \quad (7.2)$$

где r – скрытая теплота конденсации, выделяющаяся на поверхности раздела фаз пар-жидкость и отводимая через пленку конденсата к охлаждаемой твердой поверхности. Величина в скобках учитывает небольшую добавку, получающуюся из-за переохлаждения конденсата при течении вдоль холодной стенки: $t_w < t_{lq} < t_s$, где t_{lq} – средняя температура конденсата.

В конечном счете, тепловой поток Q отводится к холодной жидкости, подаваемой из системы охлаждения конденсатора (рис. 7.1), а образующийся конденсат в количестве $G_{lq} = G_v$ поступает в конденсатосборник.

Мерой интенсивности процесса конденсации является коэффициент теплоотдачи α , вводимый как коэффициент пропорциональности между плотностью теплового потока и температурным напором в уравнении Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha (t_s - t_w), \quad (7.3)$$

где

- q – локальная плотность теплового потока, отводимого к стенке при конденсации пара;
- $(t_s - t_w)$ – локальный температурный напор при конденсации, разность между температурой t_s на поверхности раздела фаз, т.е. на поверхности пленки конденсата, и температурой стенки t_w ;
- α – локальный коэффициент теплоотдачи при конденсации.

Предваряя подробный анализ α , укажем, что эта величина обратна термическому сопротивлению конденсатной пленки, зависящему от ее толщины δ (рис. 7.1) и теплопроводности, как молекулярной, так и турбулентной (если течение конденсата происходит при турбулентном режиме, см. соотношения (7.22)).

На рисунке 7.1 показано, что конденсатная пленка стекает вниз по поверхности стенки под действием силы тяжести. В случае движущегося пара, пленка будет подвергаться также действию силы трения на поверхности раздела фаз. Относительная

величина и взаимная ориентация этих сил могут быть различными, в зависимости от конструкции конденсационного устройства. Далее будут рассмотрены отдельно два предельных случая:

- конденсация на *гравитационной пленке*, движущейся под действием силы тяжести;

- конденсация на *сдвиговой пленке*, движущейся под действием касательного напряжения трения на поверхности раздела фаз.

В свою очередь, течение пленки (гравитационной или сдвиговой) может быть ламинарным или турбулентным, в зависимости от расхода конденсата и его вязкости.

В результате, можно составить следующий список базовых процессов конденсации:

- ламинарная гравитационная пленка;
- турбулентная гравитационная пленка;
- ламинарная сдвиговая пленка;
- турбулентная сдвиговая пленка.

Характеристики течения пленки важны потому, что именно слой конденсата образует основное термическое сопротивление при конденсации чистого, без примесей инертных газов, пара. Далее подробно рассматриваются элементарные модели гидродинамики и теплообмена для указанных четырех базовых пленочных течений, а затем строится универсальная расчетная методика как интерполяция между соответствующими асимптотическими решениями.

Изложение теории поддерживается разработкой компьютерных моделей. Например, в учебной *одномерной дифференциальной модели* воздухоохлаждаемого конденсатора (п. 7.8 «Воздухоохлаждаемый конденсатор») рассчитывается *локальная теплопередача*:

$$q = \frac{(t_s - t_{cooling})}{\frac{1}{\alpha_{cooling}} + R_\lambda + \frac{1}{\alpha}}, \quad (7.4)$$

где

- q – локальная плотность теплового потока, отводимого к охлаждающей жидкости;

- $(t_s - t_{cooling})$ – полный локальный температурный напор, разность между температурой t_s на поверхности конденсатной пленки и температурой охлаждающей жидкости $t_{cooling}$;

- α – локальный коэффициент теплоотдачи при конденсации;
- $\alpha_{cooling}$ – локальный коэффициент теплоотдачи на стороне охлаждающей жидкости;

- R_λ – термическое сопротивление теплопроводности стенки.

Специфическая трудность при расчете такого теплообменника состоит в том, что локальный коэффициент теплоотдачи α при конденсации зависит от переменного по высоте поверхности и неизвестного заранее расхода конденсата G_{lq} (рис. 7.1). Замкнутое математическое описание получают, составляя и затем численно интегрируя *дифференциальное уравнение*, определяющее увеличение расхода конденсата в пленке вследствие конденсации пара на ее поверхности (см. далее уравнение (7.12)).

Заключает главу обобщенная модель гравитационной пленочной конденсации на поверхностях *произвольной* формы с учетом градиентов *капиллярного* давления.

Важная для практики задача тепломассообмена при конденсации из парогазовой смеси рассматривается в гл. 8.

7.2. Математическое описание пленочной конденсации

Уравнения баланса массы и энергии

Из общего описания процесса конденсации следует представление о пленке конденсата как некотором тонком слое, обладающем термическим сопротивлением, через которое к охлаждаемой стенке переносится теплота фазового превращения, выделяющаяся на поверхности раздела фаз пар–жидкость.

Рассмотрим подробнее потоки массы и энергии через характерные контрольные поверхности 1, 2, 3 и 4, показанные на рис. 7.2:

- 1) поверхность 1 расположена в паровом объеме бесконечно близко к границе раздела фаз пар–жидкость;
- 2) поверхность 2 расположена в пленке конденсата бесконечно близко к границе раздела фаз;
- 3) поверхность 3 расположена в пленке конденсата бесконечно близко к стенке;
- 4) поверхность 4 есть поперечное сечение пленки конденсата (δb).

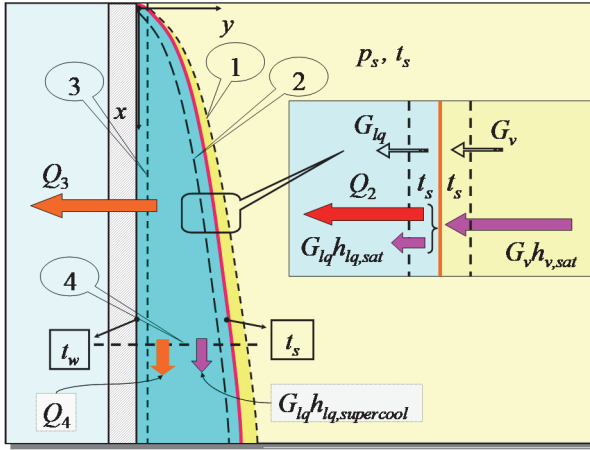


Рис. 7.2. Уравнения баланса массы и тепловой энергии

Применим уравнения баланса массы и тепловой энергии для контрольных объемов, ограниченных указанными контрольными поверхностями. Условимся считать размер b (рис. 7.1) по ширине пленки равным единице, так что все потоки будут рассчитываться на единицу ширины пленки.

Потоки через поверхность раздела фаз

Специальный контрольный объем, ограниченный поверхностями (1) и (2), бесконечно близкими к межфазной границе (рис. 7.2), имеет нулевую толщину и нулевую массу. Уравнения сохранения массы и энергии для такого контрольного объема сводятся к условию равенства потоков массы и энергии через (1) и (2): входящие и уходящие потоки должны быть одинаковыми.

Равенство потоков массы через (1) и (2) отражает тот очевидный факт, что расход конденсата G_{lq} , отводимого через (2) от поверхности раздела фаз, равен количеству пара G_v , подведенного к межфазной границе через (1) и сконденсировавшегося на ней, кг/(с·(м ширины пленки)):

$$G_{lq} = G_v \equiv G. \quad (7.5)$$

В записи потоков *тепловой энергии* необходимо учесть конвективные потоки энтальпии и кондуктивные *тепловые потоки*:

$$\underbrace{G_v h_{vs}}_{\substack{\text{Конвекция} \\ \text{через (1)}}} + \underbrace{Q_1}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (1)}}} = \underbrace{G_{lq} h_{ls}}_{\substack{\text{Конвекция} \\ \text{через (2)}}} + \underbrace{Q_2}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (2)}}}. \quad (7.6)$$

Кондуктивный поток Q_2 возникает вследствие переменности температуры в пленке конденсата и в общем случае обусловлен механизмом молекулярной и *турбулентной* теплопроводности. Следует подчеркнуть, что *турбулентный перенос* действительно возможен на «жидкой», подвижной поверхности раздела фаз, в отличие от «твердой» границы со стенкой. Кондуктивный поток Q_1 в паровой фазе следует считать нулевым, поскольку температура в чистом насыщенном паре постоянна (равна температуре насыщения t_s).

Замечая, что разность энтальпий пара h_{vs} и жидкости h_{ls} на линии насыщения есть скрытая теплота конденсации r , $r = h_{vs} - h_{ls}$, и учитывая равенство (7.5), получим:

$$Gr = Q_2. \quad (7.7)$$

Таким образом, теплота фазового превращения (левая часть (7.7)) отводится от поверхности раздела фаз в пленку конденсата (правая часть (7.7)) посредством теплопроводности (молекулярной и турбулентной).

Потоки в пленке конденсата

Запишем теперь тепловой баланс для контрольного объема, ограниченного поверхностями (2), (3) и (4):

$$\underbrace{G_{lq} h_{lq,s}}_{\substack{\text{Конвекция} \\ \text{через (2)}}} + \underbrace{Q_2}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (2)}}} = \underbrace{Q_3}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (3),} \\ \text{теплоотвод} \\ \text{к стенке}}} + \underbrace{Q_4}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (4)}}} + \underbrace{G_{lq} h_{lq,supercool}}_{\substack{\text{Конвекция через (1)}}}. \quad (7.8)$$

или после перегруппировки:

$$\underbrace{Q_3}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (3)}}} = \underbrace{Q_2}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (2)}}} + \left[\underbrace{G_{lq} h_{lq,s}}_{\substack{\text{Конвекция} \\ \text{через (2)}}} - \underbrace{G_{lq} h_{lq,supercool}}_{\substack{\text{Конвекция через (4)}}} \right] - \left[\underbrace{Q_4}_{\substack{\text{Кондукция} \\ \text{через (4)}}} \right]. \quad (7.9)$$

Ниже, в конце параграфа, подробно показано, что члены в квадратных скобках пренебрежимо малы. Поэтому:

$$Q_3 \approx Q_2, \quad (7.10)$$

т.е. кондуктивный поток практически постоянен по толщине пленки.

Объединяя (7.7) и (7.10), получают:

$$Gr = Q_2 \approx Q_3 \equiv Q. \quad (7.11)$$

Таким образом, теплота фазового перехода, выделяющаяся на поверхности раздела фаз, переносится к охлаждаемой стенке транзитом через пленку конденсата посредством кондукции, т.е. посредством молекулярной и, при турбулентном режиме течения пленки, турбулентной теплопроводности. Эта формулировка является основой для записи уравнения переноса энергии в пленке конденсата в следующем параграфе (7.18).

Дифференциальное уравнение расхода в пленке

Соотношение (7.11) между расходом конденсата и тепловым потоком может быть представлено также в дифференциальной форме (рис. 7.3):

$$\frac{dG(x)}{dx} = j(x) = \frac{q(x)}{r}, \quad (7.12)$$

где j , кг/(м²·с), – скорость конденсации (локальная плотность поперечного потока массы) и q , Вт/м² – локальная плотность теплового потока через пленку конденсата принимаются положительными величинами, отнесенными к единице поверхности стенки. Расход конденсата G , кг/(м·с), как и соответствующая (7.11) величина теплового потока Q , Вт/м, берутся в расчете на единицу ширины пленки b (рис. 7.1).

Уравнение (7.12) является дифференциальным уравнением массового баланса для конденсата и определяет скорость увеличения расхода жидкости в пленке вследствие конденсации пара на ее поверхности (рис. 7.3).

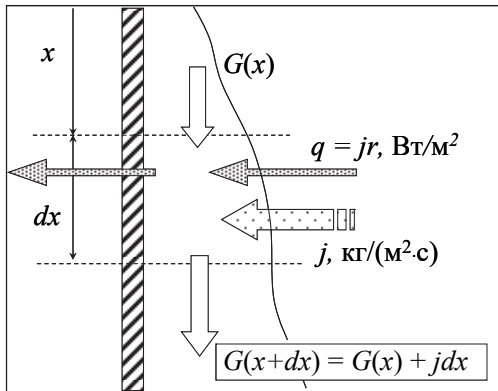


Рис. 7.3. Увеличение расхода конденсата

Модификация этого уравнения рассматривается в п. 7.9 «Управление расходом конденсата в пленке».

Обобщение одномерного уравнения (7.12) в случае многомерной задачи конденсации на произвольной поверхности см. в п.7.12, уравнение (7.165).

Пренебрежимо малые эффекты

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена оценкам порядка величин в уравнении (7.9). Некоторыми составляющими баланса (7.9) можно пренебречь, если учесть реальные соотношения между величинами:

1) теплота переохлаждения конденсата мала по сравнению с теплотой фазового перехода:

$$\frac{h_{lq,s} - h_{lq,supercool}}{r} \cong \frac{c_{p,lq}(t_s - t_w)}{r} \equiv Ku \ll 1, \quad (7.13)$$

где Ku – критерий фазового превращения (критерий Кутателадзе)

2) толщина пленки δ мала по сравнению с протяженностью x поверхности конденсации:

$$\frac{\delta}{x} \ll 1. \quad (7.14)$$

В справедливости первого утверждения можно убедиться, подставляя типичные значения для конденсации водяного пара при невысоких давлениях:

$$Ku = \frac{4000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг К}} \cdot 10\text{К}}{2000000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = 0,02 \ll 1.$$

При тех же условиях и высоте поверхности примерно 1м, толщина пленки, согласно расчетам и измерениям, будет величиной порядка 0,1 мм, т.е. меньше протяженности поверхности на несколько порядков.

Сопоставляя теперь в правой части (7.9) кондуктивный поток ($Q_2 = G_v r$) и конвективный перенос (величину в квадратной скобке), приходят к выводу о пренебрежимо малом вкладе конвективного переноса теплоты в пленке конденсата при условии (7.13):

$$\frac{G_{lq}}{G_v} \left(\frac{h_{lq,s} - h_{lq,supercool}}{r} \right) \cong \frac{c_{p,lq} (t_s - t_w)}{r} \equiv Ku \ll 1. \quad (7.15)$$

Итак, в качестве конструктивного вывода для дальнейшего моделирования принимается следующее утверждение: в *тонкой* пленке при условии $Ku \ll 1$ преобладает *кондуктивный* перенос тепла, а конвективные эффекты пренебрежимо малы (рис. 7.4).

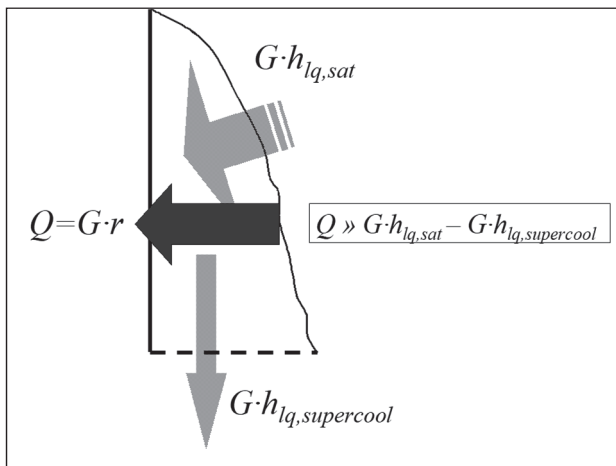


Рис. 7.4. Теплопроводность и конвекция в пленке

Тепловой (кондуктивный) поток Q_4 (рис. 7.2) через сечение пленки в *продольном* (параллельном стенке) направлении для *тонкой* пленки конденсата также оказывается пренебрежимо малой величиной, поскольку *продольные* градиенты температуры пренебрежимо малы по сравнению с *поперечными*:

$$\frac{\delta}{x} \ll 1 \Rightarrow \frac{t_s - t_w}{x} \ll \frac{t_s - t_w}{\delta}. \quad (7.16)$$

Для ламинарной пленки легко получить более конкретные оценки:

$$\frac{Q_4}{Q_2} \approx \frac{\lambda_{lq} \frac{t_s - t_w}{x} (\delta \cdot b)}{\lambda_{lq} \frac{t_s - t_w}{\delta} (x \cdot b)} = \left(\frac{\delta}{x} \right)^2 \ll 1. \quad (7.17)$$

Уравнение энергии для пленки конденсата

Соотношения (7.10) и соответствующую словесную формулировку: теплота фазового перехода, выделяющаяся на поверхности раздела фаз, переносится к охлаждаемой стенке *транзитом* через пленку конденсата посредством молекулярной и турбулентной теплопроводности (рис. 7.5), можно записать следующим образом в форме закона теплопроводности:

$$q_y = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial t}{\partial y} = \text{const по координате } y, \quad (7.18)$$

где q_y – нормальная к стенке составляющая плотности теплового потока, λ – молекулярная теплопроводность жидкой фазы (конденсата), λ_T – турбулентная теплопроводность, зависящая от скорости, толщины пленки, расстояния y от стенки (для расчета λ_T должна быть привлечена подходящая модель турбулентности).

Соотношение (7.18) является определяющим дифференциальным уравнением для распределения температуры $t(y)$ в пленке.

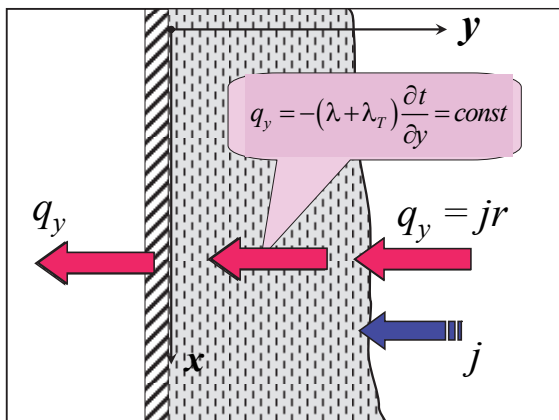


Рис. 7.5. Перенос теплоты в тонкой пленке конденсата

Температура на поверхности раздела фаз ($y = \delta$) принимается равной температуре насыщения t_s при заданном давлении. Мы предполагаем, что выполняются условия термодинамического равновесия фаз, и пренебрегаем газокинетическим (фазовым) термическим сопротивлением. Обычно для неметаллических теплоносителей и при не слишком низких давлениях в конденсационном аппарате эти допущения оправданы. В случае необходимости может быть введена соответствующая поправка (п. 6.5 гл. 6).

Цель последующих вычислений – установление связи между локальным температурным напором ($t_s - t_w$) и локальной плотностью теплового потока q_y .

Термическое сопротивление пленки конденсата

Запишем (7.18) в форме дифференциального уравнения с разделенными переменными:

$$-q_y \cdot \left(\frac{dy}{\lambda + \lambda_T} \right) = dt. \quad (7.19)$$

Перепад температуры dt в элементарном слое dy равен произведению потока q_y на термическое сопротивление элементарного слоя dy (величину в круглых скобках).

Интегрируя по толщине пленки (по координате y) с учетом постоянства q_y , получим:

$$\begin{aligned} (-q_y) \cdot \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda + \lambda_T} = t_s - t_w; \quad \Rightarrow \quad (-q_y) \cdot R_{Film} = t_s - t_w; \\ R_{Film} = \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda + \lambda_T}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где R_{Film} – термическое сопротивление пленки конденсата, $t_s - t_w$ – перепад температур в пленке конденсата. Соотношения (7.20) указывают способ вычисления термического сопротивления пленки в форме интеграла.

Величина q_y при конденсации отрицательна в выбранной системе координат (рис. 7.5), что неудобно в практических расчетах. Для величины с обратным знаком (т.е. потока к стенке), обозначенной ранее (7.12) как q , $q \equiv -q_y$, соотношения (7.20) переписываются следующим образом:

$$q = \frac{t_s - t_w}{R_{Film}}. \quad (7.21)$$

То же можно представить в форме уравнения Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha (t_s - t_w),$$

где $(t_s - t_w)$ – температурный напор при конденсации, α – коэффициент теплоотдачи при конденсации. Сопоставляя две последние формулы, получают:

$$\alpha = \frac{1}{R_{Film}}, \quad R_{Film} = \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda + \lambda_T}. \quad (7.22)$$

Итак, коэффициент теплоотдачи при конденсации есть обратная величина термического сопротивления пленки как *плоского слоя толщиной δ* . Это универсальный результат для задач пленочной конденсации.

Вычисление термического сопротивления R_{Film} производится элементарно для ламинарной пленки ($\lambda_T = 0$, $\lambda = \text{const}$): $R_{Film} = \delta / \lambda$. Ясно, что распределение температуры по толщине ламинарной пленки будет линейным, как в задаче о теплопроводности плоской стенки.

В случае турбулентной пленки вычисление R_{Film} становится сложной проблемой, требующей привлечения соответствующей модели турбулентного переноса для расчета λ_T как некоторой функции от координаты y .

Для того чтобы воспользоваться формулами (7.22) необходимо знать толщину стекающей пленки конденсата δ . Следовательно, необходимо рассмотреть гидродинамическую задачу о течении пленки жидкости.

Основные допущения теории тонких пленок конденсата

Особенности гидродинамики и теплопереноса в жидкой фазе при пленочной конденсации обобщаются в форме модели *тонкой пленки* конденсата, согласно которой:

- имеет место безинерционное течение в пленке, т.е. равномерное, без ускорений, течение под действием уравновешивающих друг друга актуальных сил, таких как гравитация и вязкое трение;
- давление постоянно по сечению пленки; оно будет таким же, как в паровом объеме, если пренебречь эффектом лапласовского давления, связанного с кривизной поверхности раздела;
- течение в пленке считается *параллельным* стенке; поперечные (нормальные к стенке) составляющие скорости принимаются равными нулю;
- продольная теплопроводность в пленке пренебрежимо мала; точно так же малы нормальные вязкие напряжения в поперечном сечении пленки;
- поперечный перенос теплоты и импульса определяется кондукцией: соответственно, молекулярной и турбулентной теплопроводностью, молекулярной и турбулентной вязкостью;
- для криволинейных стенок обычно принимают, что толщина пленки мала по сравнению с радиусом кривизны твердой поверхности.

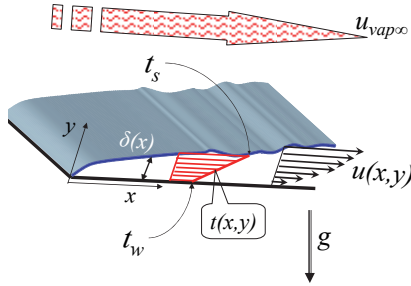


Рис. 7.6. Движение пленки конденсата

На рисунке 7.6 мы акцентируем внимание на движущих силах (гравитации и динамическом воздействии потока пара) и распределениях скорости и температуры в пленке. Благодаря перечисленным выше свойствам пленочной модели, удастся получить *локальные соотношения*, связывающие

- толщину пленки δ с плотностью теплового потока, что уже сделано в предыдущих пунктах (7.21), (7.22),
- толщину пленки δ со средней скоростью (или расходом) в пленке, что является главной задачей следующего пункта.

Уравнение движения пленки конденсата

Движение в *тонкой* пленке считается безынерционным, т.е. равномерным, без ускорений. Следовательно, сумма сил гравитации и трения, действующих на контрольный объем (рис. 7.7), должна быть равна нулю.

Специальный контрольный объем выходит своей правой гранью на поверхность раздела фаз, где задано *напряжение трения* τ_s , принимаемое в качестве внешнего параметра задачи. На схеме с вертикальной стенкой (рис. 7.7) сила тяжести направлена вертикально, вдоль движения пленки (для наклонной поверхности следует записать соответствующую проекцию, как показано далее на рис. 7.8). Внешняя область заполнена неподвижным или движущимся с равномерной скоростью вдоль стенки насыщенным паром с заданными постоянными параметрами.

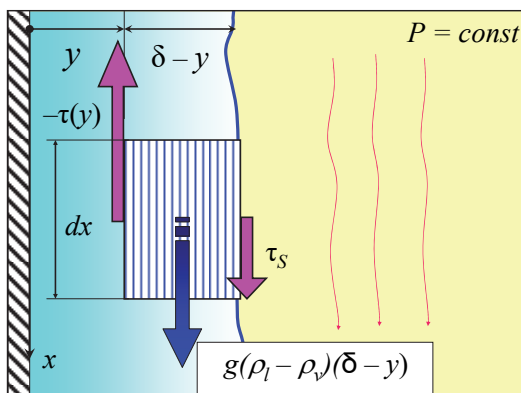


Рис. 7.7. К формулировке уравнения движения пленки (контрольный объем отмечен вертикальной штриховкой)

Если *плотность* пара ρ_v составляет заметную величину по сравнению с плотностью жидкости ρ_l , то следует учесть Архимедову силу, «выталкивающую» пленку конденсата, погруженную в пар.

Объемная сила, т.е. сила, действующая на *единицу объема* пленки, есть вес конденсата ($g\rho_l$), уменьшенный на величину Архимедовой силы, равной весу ($g\rho_v$) «вытесненного» пара:

$$g\rho_l - g\rho_v = g(\rho_l - \rho_v). \quad (7.23)$$

Записывая для выделенного контрольного объема $(\delta - y)(b dx)$ сумму проекций действующих сил на ось x и приравнявая ее нулю, получим:

$$g_x(\rho_l - \rho_v)(\delta - y)(b dx) + \tau_s(b dx) + [-\tau(y)](b dx) = 0. \quad (7.24)$$

Касательное напряжение в пленке $\tau(y)$, Н/м^2 определяется законом вязкого трения Ньютона с эффективной вязкостью, равной сумме молекулярной и турбулентной составляющих:

$$\tau(y) = (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy};$$

u – скорость жидкости в пленке, параллельная стенке (рис. 7.6).

После сокращений, подстановки закона трения и перегруппировки, уравнение (7.24) переписывается следующим образом:

$$\tau(y) \equiv (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy} = g_x (\rho_l - \rho_v) (\delta - y) + \tau_s. \quad (7.25)$$

Для наклонной поверхности проекция силы тяжести g_x записывается как

$$g_x = g \sin(\varphi), \quad (7.26)$$

где φ – угол наклона к горизонту (рис. 7.8).

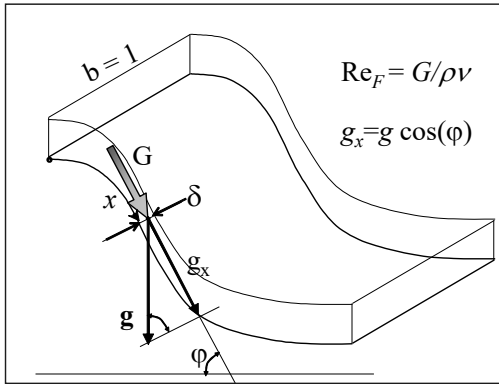


Рис. 7.8. Тонкая гравитационная пленка конденсата, стекающая по криволинейному профилю (цилиндрической поверхности с горизонтальной образующей b и криволинейной направляющей x)

Если поверхность плоская, то угол наклона фиксирован и g_x есть постоянная величина, не зависящая от координаты. Для вертикальной поверхности $\varphi = \pi/2$ и $g_x = g = 9.8 \text{ м/с}^2$ (рис. 7.7).

Соотношение (7.25) является *определяющим дифференциальным уравнением для распределения скорости* в тонкой пленке конденсата. Совместно с уравнением энергии (7.18) оно составляет основу математического описания задач пленочной конденсации.

Уравнение движения (7.25) интегрируют при граничном условии на стенке (условии прилипания):

$$u(y = 0) = 0.$$

7.3. Гравитационная ламинарная пленка конденсата

Уравнения энергии и движения для ламинарной пленки

Уравнения энергии и движения (7.27), (7.28) для ламинарной гравитационной пленки следуют из общих соотношений (7.18), (7.25), если:

- положить равными нулю коэффициенты турбулентного переноса λ_T и μ_T
- положить равным нулю трение на поверхности раздела фаз τ_S :

$$q \equiv \lambda \frac{dt}{dy} = \text{const}; \quad t(y=0) = t_w; \quad t(y=\delta) = t_s; \quad (7.27)$$

$$\tau = \mu_l \frac{du}{dy} = g_x \rho_l \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right) (\delta - y); \quad u(y=0) = 0. \quad (7.28)$$

Условие отсутствия динамического взаимодействия с паром $\tau_S = 0$

$$\tau(y=\delta) = 0; \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\delta} = 0$$

учтено при записи уравнения движения (7.28). Действительно, при подстановке в (7.28) $y = \delta$ получается нулевое трение и нулевой градиент скорости на поверхности пленки.

Коэффициент теплоотдачи как термическая проводимость ламинарной пленки конденсата

Мы уже занимались интегрированием уравнения энергии (7.18) и можем воспользоваться выведенными выше формулами (7.22), чтобы быстро получить искомым результат для ламинарной пленки. Положим в (7.22) $\lambda_T = 0$; $\lambda \approx \text{const}$ (молекулярная теплопроводность конденсата λ обычно слабо зависит от температуры).

Тогда

$$\alpha = \frac{1}{R_{Film}}; \quad R_{Film} = \int_0^{\delta} \frac{dy}{\lambda + \lambda_T} = \frac{\delta}{\lambda} \quad (7.29)$$

и, следовательно:

$$\alpha = \frac{\lambda_{lq}}{\delta}. \quad (7.30)$$

Итак, локальный коэффициент теплоотдачи для *ламинарной* пленки есть термическая проводимость, или обратная величина термического сопротивления пленки *как плоского слоя толщиной* δ с теплопроводностью λ_{lq} .

Согласно (7.27), градиент температуры постоянен по толщине пленки, если $\lambda_{lq} = \text{const}$. Поэтому распределение температуры будет линейным, как для классической задачи о теплопроводности плоской стенки с постоянным коэффициентом теплопроводности. Благодаря этой аналогии с плоской стенкой, мы можем воспользоваться известным результатом и в случае, когда зависимость $\lambda_{lq}(t)$ существенна: в качестве расчетного значения в (7.30) следует взять среднеинтегральное значение в интервале температур $(t_w \div t_s)$.

Профиль скорости, расход, число Рейнольдса, толщина ламинарной гравитационной пленки

Необходимую для применения формулы (7.30) информацию о толщине пленки δ получают при интегрировании уравнения движения (7.28). Мы выполним основные операции в пакете Mathcad в режиме символьных вычислений (рис. 7.9). Предварительно введем число Рейнольдса для пленки, построенное по средней скорости u_m в поперечном сечении пленки и толщине пленки δ :

$$\text{Re}_F \equiv \frac{u_m \delta}{\nu} \equiv \frac{\rho u_m \delta}{\rho \nu} \equiv \frac{G}{\rho \nu}. \quad (7.31)$$

Величина Re_F задается расходом конденсата G , кг/(м·с) в рассматриваемом сечении пленки x (расход G берется в расчете на единицу ширины пленки)..

Целью последующих расчетов является установление зависимости толщины пленки δ от расхода конденсата G с тем, чтобы применить далее соотношение (7.30) для локальной теплоотдачи. Опирируя с безразмерными величинами, мы намереваемся установить зависимость *нормированной* толщины пленки от числа Re_F и, далее, получить критериальное соотношение вида $\text{Nu} = f(\text{Re}_F)$. Подходящая модификация числа Нуссельта Nu как безразмерного коэффициента теплоотдачи при конденсации будет введена ниже (7.35).

Equation of film motion:	$du = \frac{g_x}{\nu} \cdot \Delta\rho_r \cdot (\delta - y) \cdot dy$	$\Delta\rho_r = 1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}$
Termwise integration		u - distribution
	$\int_0^u 1 du = \int_0^y \left(\frac{g_x}{\nu} \cdot \Delta\rho_r \right) \cdot (\delta - y) dy$	collect, y $\rightarrow u = -\frac{g_x \cdot \Delta\rho_r \cdot y \cdot (y - 2 \cdot \delta)}{2 \cdot \nu}$
u - distribution as Mathcad function:	$u(y) := \frac{g_x}{\nu} \cdot \Delta\rho_r \cdot \delta \cdot y - \frac{1}{2} \cdot \frac{g_x}{\nu} \cdot \Delta\rho_r \cdot y^2$	
Condensate flow:	$G := \int_0^\delta \rho \cdot u(y) dy$	$G \rightarrow \frac{\rho \cdot \delta^3 \cdot g_x \cdot \Delta\rho_r}{3 \cdot \nu}$
Film Reynolds number:	$Re_F := \frac{G}{\rho \cdot \nu}$	$Re_F \rightarrow \frac{\delta^3 \cdot g_x \cdot \Delta\rho_r}{3 \cdot \nu^2}$

Рис. 7.9. Профиль скорости, расход и число Рейнольдса для ламинарной гравитационной пленки (символьные вычисления в Mathcad)

Сначала записывается дифференциальное уравнение движения (7.28) в форме с разделенными переменными. Затем производится почленное интегрирование левой и правой частей в режиме символьных (аналитических) преобразований. Оператор collect собирает члены с одинаковыми степенями переменной y . В результате получается параболическое распределение скорости в пленке. Далее определяется расход конденсата в пленке G как интеграл от скорости по поперечной координате y . В заключение, Mathcad выполняет подстановку выражения для расхода в формулу (7.31) для числа Рейнольдса пленки.

В результате вычислений в Mathcad (рис. 7.9), получается формула, устанавливающая связь числа Рейнольдса с нормированной (безразмерной) толщиной пленки:

$$\text{Re}_F = \frac{1}{3} \left(\frac{g \delta^3}{\nu^2} \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right) \right) \left(\frac{g_x}{g} \right) \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{l_g} \right)^3 \left(\frac{g_x}{g} \right);$$

$$l_g \equiv \left(\frac{\nu^2}{g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)} \right)^{1/3}. \quad (7.32)$$

Введенный масштаб l_g называют вязкостно-гравитационной длиной; эта величина определяет характерное значение толщины пленки в условиях *вязкостно-гравитационного* течения при $\text{Re}_F \sim 1$. Влияние угла наклона поверхности учитывается множителем $g_x/g \leq 1$; для наклонной поверхности расход G и Re_F меньше, чем для вертикальной (при одинаковой толщине пленки).

Из (7.32) получаем для безразмерной толщины пленки:

$$\frac{\delta}{l_g} = \left(\frac{3 \text{Re}_F}{(g_x/g)} \right)^{1/3}; \quad \text{Re}_F \equiv \frac{u_m \delta}{\nu} \equiv \frac{G}{\rho \nu}. \quad (7.33)$$

Итак, если известен расход конденсата (и, следовательно, число Рейнольдса пленки), а также наклон φ элемента поверхности (рис. 7.8), то толщина гравитационной ламинарной пленки однозначно определена формулой (7.33). Это главный результат анализа гидродинамики ламинарной гравитационной пленки.

Расчет локальной теплоотдачи для ламинарной гравитационной пленки

Выражение (7.33) для толщины пленки подставляется в формулу (7.30) для коэффициента теплоотдачи, что дает:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{\lambda (g_x/g)^{1/3}}{l_g (3 \text{Re}_F)^{1/3}}, \quad (7.34)$$

или, в безразмерной форме:

$$\text{Nu}_{l_g} \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = \frac{(g_x/g)^{1/3}}{(3 \text{Re}_F)^{1/3}}; \quad \text{Re}_F \equiv \frac{G}{\rho \nu} = \frac{\int_0^x q dx}{r \rho \nu}. \quad (7.35)$$

Уравнения (7.34), (7.35) являются основным результатом теоретического анализа конденсации на ламинарной гравитационной пленке, стекающей по наклонной плоской поверхности (напомним, что g_x – проекция ускорения силы тяжести на направление движения пленки).

Для вертикальных поверхностей, в том числе вертикальных труб, $g_x/g = 1$, поэтому:

$$\text{Nu}_{l_g} \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = \frac{1}{(3\text{Re}_F)^{1/3}} = \frac{0,693}{\text{Re}_F^{1/3}}. \quad (7.36)$$

Подчеркнем важное положительное свойство расчетных соотношений (7.35), (7.36). Это *локальные* соотношения, связывающие *местные значения* безразмерного коэффициента теплоотдачи и числа Рейнольдса пленки. Формулы (7.35), (7.36) применимы независимо от того, какие граничные условия заданы на стенке: постоянного теплового потока, или постоянного температурного напора, или какие-либо распределения по продольной координате x .

Обсудим далее вопрос об определении числа Re_F через тепловые характеристики конденсационного устройства. В рамках теоретического анализа собственно процесса конденсации достаточно предположить, что задано некоторое распределение локальной плотности теплового потока $q(x)$ как граничное условие на стенке. Тогда, учитывая, что расход конденсата G связан с тепловым потоком Q соотношением (7.7), получим из (7.31):

$$\text{Re}_F = \frac{G}{\rho v} = \frac{Q}{r \rho v} = \frac{\int_0^x q(x) dx}{r \rho v} = \frac{q_m x}{r \rho v}, \quad (7.37)$$

где q_m – среднее значение плотности теплового потока на поверхности протяженностью x по направлению стекания пленки конденсата.

В общем случае следует использовать дифференциальное представление ((7.12), рис. 7.3) связи между расходом конденсата и тепловым потоком через теплопередающую поверхность конденсатора:

$$\frac{dG(x)}{dx} = j(x) = \frac{q(x)}{r}, \quad (7.38)$$

где локальная плотность теплового потока $q(x)$ в конденсационном устройстве может быть выражена посредством уравнения теплопередачи (см. пример такого расчета в п. 7.8 Воздухоохлаждаемый конденсатор).

Напомним, что величины G , кг/(м·с), и Q , Вт/(м), берутся в расчете на единицу ширины пленки b (рис. 7.1), а j , кг/(м²·с), и q , Вт/м², есть соответственно плотности потоков массы и теплоты, отнесенные к единице поверхности стенки.

Согласно уравнению (7.38), увеличение расхода конденсата в пленке происходит благодаря конденсации пара на ее поверхности. Возможны и другие причины изменения расхода. Например, при конденсации быстродвижущегося пара может происходить так называемый капельный унос (срыв) жидкости с поверхности пленки. Обратная картина наблюдается при конденсации из парокapельного потока, когда капли жидкости оседают на поверхности пленки. В таких специальных случаях уравнение материального баланса (7.38) должно быть соответствующим образом модифицировано, чтобы правильно рассчитать расход конденсата $G(x)$ в пленке и затем число Рейнольдса по формуле (7.31).

Еще один пример, связанный с отсосом конденсата, рассмотрен в п. 7.9 Управление расходом конденсата в пленке.

Обобщение одномерного уравнения (7.38) на многомерную задачу конденсации на произвольной поверхности см. в п.7.12, уравнение (7.165).

Поправки

Экспериментальные исследования подтверждают полученные теоретические зависимости (7.35), (7.36). Однако рекомендуется поправка на неучтенный в теории эффект волновых возмущений на поверхности раздела фаз. П.Л.Капица, занимавшийся этим вопросом в связи с течениями пленок жидкого гелия, оценил поправку примерно в 20% в сторону увеличения коэффициента теплоотдачи. Физический эффект состоит в том, что во впадинах волн, там где толщина пленки уменьшается, выигрыш от увеличения скорости конденсации получается больше, чем проигрыш на выступах волн. Полезно представить себе здесь характер зависимости $\alpha(\delta)$ по (7.30).

По рекомендациям Д.А.Лабунцова, введем волновую поправку к теоретическим формулам (7.35), (7.36) как дополнительный множитель:

$$\varepsilon_v = \text{Re}_F^{0,04}; \quad (\text{Re}_F > 1). \quad (7.39)$$

В общем случае при расчетах по теоретическим формулам (7.35), (7.36) необходимо учесть зависимость физических параметров от температуры. В поперечном сечении пленки температура конденсата изменяется в пределах $t_w \div t_s$ и соответствующие изменения вязкости, теплопроводности и, возможно, других свойств могут быть заметными.

Разумным решением для коэффициента теплопроводности будет выбор среднеинтегрального значения в интервале температур $t_w \div t_s$ или приближенно, среднеарифметического значения. Основанием для такой рекомендации является точное решение одномерных стационарных задач теплопроводности (таких как (7.27)) с переменным коэффициентом теплопроводности.

Для динамической вязкости рекомендуется усреднение с весом, причем значение при температуре стенки берется с большим весовым коэффициентом:

$$\mu = \frac{3\mu_w + \mu_s}{4}, \quad (7.40)$$

где индекс w означает «при температуре стенки», а индекс s – при температуре насыщения. Вязкость жидкости у стенки важнее, потому что напряжение трения достигает максимума на стенке (при $y = 0$, см. уравнение (7.28)).

Значение скрытой теплоты конденсации r определяется по температуре насыщения.

Общую картину формирования пленки конденсата, стекающей вниз по вертикальной поверхности под действием силы тяжести (7.1), можно описать следующим образом. Толщина пленки увеличивается вследствие конденсации пара на ее поверхности. Режим течения пленки зависит от значения числа Рейнольдса Re_F , которое растет вниз по поверхности вместе с расходом G стекающего конденсата (см. (7.31)). Ламинарное течение с гладкой поверхностью пленки наблюдается при $\text{Re}_F < 5$. В интервале $5 < \text{Re}_F < 400$ ламинарное течение сопро-

вождается волнообразованием. Когда число Рейнольдса превосходит критическое значение, равное примерно 400, наблюдается переход к *турбулентному режиму*.

Графическое представление критериального уравнения (7.36) для ламинарного режима, а также скорректированного уравнения с учетом фактора волнового движения пленки (7.39) показаны на рис. 7.10. Объяснение убывающей зависимости числа Нуссельта от числа Рейнольдса для ламинарной пленки содержится в уравнении (7.30) и функциональных связях величин δ , G , Re_F , полученных в Mathcad-документе на рис. 7.9.

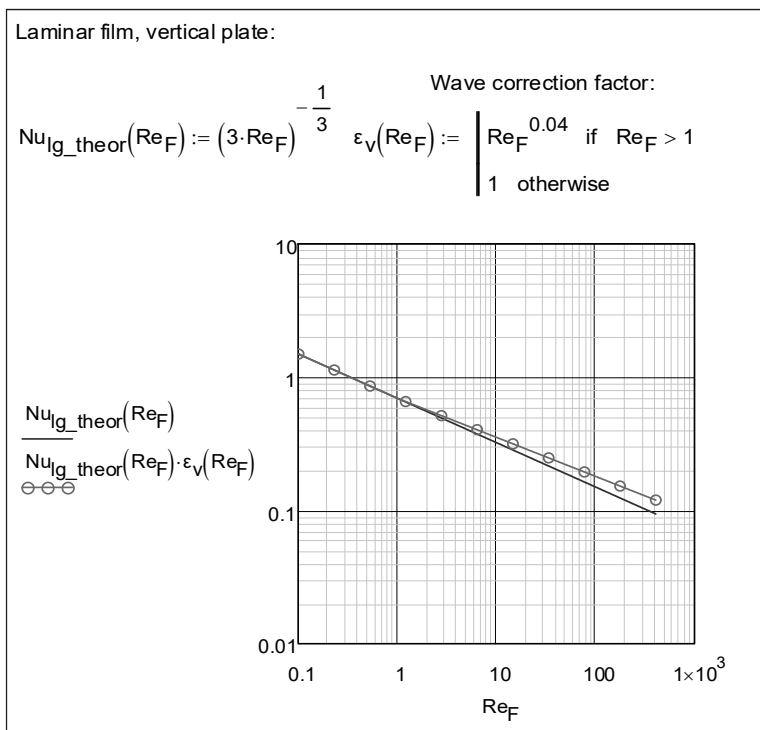


Рис. 7.10. Критериальное уравнение для теплоотдачи ламинарной гравитационной пленки

Средняя теплоотдача на вертикальных поверхностях

Для приближенных расчетов конденсаторов применяют методику, основанную на *средних значениях* величин. Средний ко-

эффицент теплоотдачи при конденсации α_m (индекс m означает средний, *mean*) вводится уравнением Ньютона–Рихмана

$$Q = \alpha_m (t_s - t_w)_m F, \quad (7.41)$$

где $(t_s - t_w)_m$ – средний температурный напор при конденсации, т.е. средняя разность температур поверхности пленки конденсата и стенки.

Уравнение теплопередачи для конденсатора записывается как

$$Q = \frac{(t_s - t_{cool})_m}{\frac{1}{\alpha_{cool,m}} + R_\lambda + \frac{1}{\alpha_m}} F, \quad (7.42)$$

где $(t_s - t_{cool})_m$ – средний температурный напор в конденсаторе, т.е. средняя разность между температурой на поверхности конденсатной пленки и температурой охлаждающей жидкости.

Следует иметь в виду, что при расчете по *средним* величинам трудно учесть особенности конструкций и режимов работы различных типов конденсаторов. Поэтому при разработке точных моделей предпочтительным является расчет по *локальным* соотношениям (7.3), (7.4) с последующим интегрированием по всей теплопередающей поверхности F . Применяют также *позонный* метод расчета, когда осреднение производится для отдельных характерных зон, на которые подразделяется конденсатор.

Осредненные значения коэффициента теплоотдачи α_m , плотности теплового потока q_m , температурного напора Δt_m вводятся соотношениями:

$$\alpha_m = \frac{q_m}{\Delta t_m}; \quad q_m = \frac{1}{l} \int_0^l q \cdot dx; \quad \Delta t_m = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta t \cdot dx, \quad (7.43)$$

где l – протяженность поверхности конденсации по направлению течения пленки, для вертикальных поверхностей – высота.

Проведем вычисления для простейшего случая, когда плотность теплового потока сохраняется постоянной по всей протяженности поверхности теплоотдачи, $q = \text{const}$, $q_m = q$.

Раскроем уравнение (7.35) относительно локального коэффициента теплоотдачи α , учитывая постоянство g_x/g для вертикальных поверхностей или наклонных плоскостей:

$$\alpha = C \cdot (q x)^{-1/3}, \quad (7.44)$$

и запишем далее явное выражение для изменения локального температурного напора в зависимости от координаты x :

$$\Delta t = \frac{q}{\alpha} = \frac{q}{C \cdot (qx)^{-1/3}} = \frac{q^{4/3}}{C} x^{1/3}. \quad (7.45)$$

Теперь можно осреднить температурный напор:

$$\Delta t_m = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta t \cdot dx = \frac{1}{l} \frac{q^{4/3}}{C} \int_0^l x^{1/3} \cdot dx = \frac{3}{4} \frac{q}{C \cdot (ql)^{-1/3}} = \frac{3}{4} \left(\frac{q}{\alpha_{x=l}} \right). \quad (7.46)$$

и найти среднее значение коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha_m = \frac{q_m}{\Delta t_m} = \frac{q}{\frac{3}{4} \left(\frac{q}{\alpha_{x=l}} \right)} = \frac{4}{3} \alpha_{x=l}. \quad (7.47)$$

Следовательно, для средней теплоотдачи в критериальной форме следует применить соотношение (7.35) с коэффициентом $4/3$:

$$\text{Nu}_{l_g, m} \equiv \frac{\alpha_m l_g}{\lambda} = \frac{4}{3} \frac{(g_x / g)^{1/3}}{(3 \text{Re}_F)^{1/3}} = 0,924 \frac{(g_x / g)^{1/3}}{\text{Re}_F^{1/3}}; \quad (7.48)$$

$$\text{Re}_F \equiv \frac{G}{\rho \nu} = \frac{q_m l}{r \rho \nu}.$$

Для вертикальных поверхностей, в том числе вертикальных труб, $g_x/g = 1$, поэтому:

$$\text{Nu}_{l_g, m} \equiv \frac{\alpha_m l_g}{\lambda} = \frac{4}{3} \frac{1}{(3 \text{Re}_F)^{1/3}} = \frac{0,924}{\text{Re}_F^{1/3}}. \quad (7.49)$$

Формулы (7.48), (7.49) для средней теплоотдачи получены выше при условии $q = \text{const}$. Однако они оказываются справедливыми для любого распределения плотности теплового потока вдоль поверхности $q(x)$. Действительно, в общем случае уравнение (7.44) запишется как

$$\alpha(x) = C \cdot (Q(x))^{-1/3} = f(Q(x)), \quad (7.50)$$

где полный тепловой поток $Q(x)$ на участке $0 \div x$ и локальная плотность теплового потока $q(x)$ связаны очевидными соотношениями:

$$Q(x) = \int_0^x q(x) dx; \quad q(x) = \frac{dQ(x)}{dx}. \quad (7.51)$$

Последнее равенство в цепочке формул (7.50) акцентирует внимание на том, что местная теплоотдача в точке x зависит только от полного теплового потока $Q(x)$ и не зависит от того, каким конкретно было распределение $q(x)$ на участке $0 \div x$. Почти очевидно, что то же можно сказать о средней теплоотдаче. Вычисления подтверждают это:

$$\alpha_m = \frac{q_m}{\Delta t_m} = \frac{\frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx}{\frac{1}{l} \int_0^l q dx} = \frac{\int_0^l q(x) dx}{\int_0^l \frac{q(x) dx}{f(Q(x))}} = \frac{Q(l)}{\int_0^{Q(l)} \frac{dQ}{f(Q)}} = f_m(Q(l)). \quad (7.52)$$

Итак, для расчета средней теплоотдачи при ламинарной гравитационной конденсации на вертикальных поверхностях (и на наклонных плоскостях) используют формулу (7.48), независимо от характера распределения теплового потока (или температурного напора) по поверхности конденсации. Поправка на волновое течение остается практически такой же как для локальной теплоотдачи (7.39). Температурная зависимость теплофизических свойств приближенно учитывается как описано ранее.

Соотношение (7.48) для вертикальных поверхностей и наклонных плоскостей можно представить как зависимость среднего коэффициента теплоотдачи от среднего температурного напора. Для этого следует сделать подстановку $q_m \leftarrow \alpha_m \Delta t_m$. В результате простых преобразований получим для поверхности протяженностью l :

$$\alpha_m = 0,943 \left(\frac{\lambda_l^3 r g (\rho_l - \rho_v)}{\Delta t_m \nu_l l} \right)^{1/4} \left(\frac{g_x}{g} \right)^{1/4}. \quad (7.53)$$

Согласно (7.53), для ламинарной гравитационной пленки средняя теплоотдача убывает с ростом температурного напора: $\alpha_m \sim (\Delta t_m)^{-1/4}$. Средний тепловой поток q_m возрастает по закону

$q_m = \alpha_m \Delta t_m \sim (\Delta t_m)^{-3/4}$, т.е. несколько медленнее, чем пропорционально температурному напору.

Чем холоднее стенка (чем меньше ее температура t_w при фиксированной температуре насыщения), тем больше пара конденсируется за единицу времени, но интенсивность теплоотдачи α_m несколько уменьшается из-за увеличивающегося термического сопротивления пленки конденсата.

Пример расчета в пакете Mathcad

Проведем вычисления в пакете Mathcad по полученным выше теоретическим формулам (7.36) и (7.49) для конкретного примера, с исходными данными, представленными на рис. 7.11.

Input				
$g := 9.8 \frac{m}{s^2}$		$g = 9.8 m \cdot s^{-2}$		
$p_s := 1 \text{ bar}$		$p_s = 1 \times 10^5 \cdot \text{Pa}$		
$d_{\text{vert_tube}} := 30 \text{ mm}$		$d_{\text{vert_tube}} = 0.03 \text{ m}$		
$L_{\text{vert_tube}} := 2 \text{ m}$		$L_{\text{vert_tube}} = 2 \text{ m}$		
$q := 100000 \cdot \frac{W}{m^2}$		$q = 1 \times 10^5 m^{-2} \cdot W$		
To calculate are:				
$\alpha_{\text{mean}}, \frac{W}{m^2 \cdot K}$	$t_{w_mean}, ^\circ C$	$\alpha(x)$	$t_w(x)$	$\delta(x)$
Saturation temperature and properties on saturation curve				
$T_s := (100 + 273.15) K$		$T_s = 373.15 K$		
$\rho_{lq} := 958.4 \frac{kg}{m^3}$		$\rho_{lq} = 958.4 m^{-3} \cdot kg$		
$\nu_{lq} := 0.295 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}$		$\nu_{lq} = 2.95 \times 10^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$		
$\lambda_{lq} := 0.683 \frac{W}{m \cdot K}$		$\lambda_{lq} = 0.68 m^{-1} \cdot K^{-1} \cdot W$		
$r := 2.26 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}$		$r = 2.26 \times 10^6 m^2 \cdot s^{-2}$		

Рис. 7.11. Расчет конденсации на вертикальной трубе: исходные данные и физические параметры

Предполагается рассчитать среднюю теплоотдачу при конденсации водяного пара атмосферного давления на вертикальной трубе при заданном значении плотности теплового потока, а также распределения локального коэффициента теплоотдачи и других величин по высоте трубы.

В конденсаторах энергетических установок конденсация происходит при низких давлениях, так что $\rho_v \ll \rho_l$ и $(1 - \rho_v / \rho_l) \rightarrow 1$ в выражении для l_g (7.32). В числовом примере для воды при атмосферном давлении:

$$1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} = 1 - \frac{0,598}{958,4} = 1 - 0,0006 \approx 1.$$

Расчет среднего коэффициента теплоотдачи, средней температуры поверхности и расхода конденсата показан на рис. 7.12.

Следует обратить внимание на то, как осуществляется идентификация режима течения пленки конденсата. Поскольку это учебный пример и соотношения для турбулентного режима на данном этапе изучения предмета еще не получены, при превышении критического значения числа Рейнольдса пленки будет выдаваться предупреждение «Unknown» (коэффициент теплоотдачи неизвестен).

В профессиональной вычислительной программе вместо этого предупреждения должен находиться соответствующий модуль программы для турбулентного режима.

Распределения локального коэффициента теплоотдачи и толщины пленки по высоте поверхности при ламинарном режиме показаны на рис. 7.13

Коэффициент теплоотдачи убывает вниз по поверхности вследствие утолщения пленки (7.30) при конденсации все новых количеств пара на ее поверхности. Связь между величинами расхода конденсата G , толщины пленки δ и числа Рейнольдса пленки Re_F получена выше (рис. 7.9).

Calculations of averaged values

$$Re_{F_cr} := 400 \quad \varepsilon_v(Re_F) := \begin{cases} Re_F^{0.04} & \text{if } 1 < Re_F < Re_{F_cr} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Re_F := \frac{q \cdot L_{vert_tube}}{r \cdot \rho_{lq} \cdot v_{lq}} \quad Re_F = 313.01$$

$$Nu_{lg_mean} := \begin{cases} \text{if } Re_F < Re_{F_cr} & Nu_{lg_mean} = 0.17 \\ \quad \begin{cases} \text{"Laminar film"} \\ \quad -\frac{1}{3} \\ 0.924 \cdot Re_F \cdot \varepsilon_v(Re_F) \end{cases} & \\ \text{"Unknown"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$l_g := \left(\frac{v_{lq}^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad l_g = 0.02 \cdot \text{mm}$$

$$\alpha_{mean} := Nu_{lg_mean} \cdot \frac{\lambda_{lq}}{l_g} \quad \alpha_{mean} = 5.65 \times 10^3 \text{ m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{W}$$

$$\Delta T_{mean} := \frac{q}{\alpha_{mean}} \quad \Delta T_{mean} = 17.7 \text{ K}$$

$$T_{w_mean} := T_s - \Delta T_{mean} \quad T_{w_mean} = 355.45 \text{ K}$$

K -> °C as function and as Postfix Operator °C

$$^{\circ}\text{C}(T_Kelvin) := \frac{T_Kelvin}{\text{K}} - 273.15 \quad T_{w_mean} \text{ } ^{\circ}\text{C} = 82.3 \quad \text{Use } \boxed{\text{xf}}$$

$$G := \frac{q \cdot (\pi d_{vert_tube} \cdot L_{vert_tube})}{r} \quad G = 8.34 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Рис. 7.12. Расчет среднего коэффициента теплоотдачи при ламинарной конденсации на вертикальной трубе

Distributions

ORIGIN = 1

$$k_{\max} := 10 \quad k := 1 \dots k_{\max} \quad x_k := \frac{L_{\text{vert_tube}}}{k_{\max}} \cdot k$$

$$Re_F := \frac{q}{\Gamma \cdot \rho_{lq} \cdot v_{lq}} \cdot x$$

local computation:

$$Nu_{lg}(Re_F) := \begin{cases} \text{"Laminar film"} \\ \frac{1}{0.693 \cdot Re_F^3} \cdot \epsilon_v(Re_F) \end{cases} \quad \text{if } Re_F < Re_{F_cr}$$

$$\text{"Unknown"} \quad \text{otherwise}$$

$$Nu_{lg} := \overrightarrow{Nu_{lg}(Re_F)}$$

$$\alpha := Nu_{lg} \cdot \frac{\lambda_{lq}}{l_g}$$

$$T_w := T_s - \frac{q}{\alpha}$$

$$\delta_F := \overrightarrow{\delta(Re_F)}$$

$$\delta(Re_F) := \begin{cases} \text{"Laminar film"} \\ l_g \cdot (3 \cdot Re_F)^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad \text{if } Re_F < Re_{F_cr}$$

$$\text{"Unknown"} \quad \text{otherwise}$$

x =	Re _F =	Nu _{lg} =	α =	T _w °C =	δ _F =
0.2] m	31.3	0.25	8.32·10 ³	87.99	9.41·10 ⁻⁵ m
0.4	62.6	0.21	6.79·10 ³	85.28	1.19·10 ⁻⁴
0.6	93.9	0.18	6.03·10 ³	83.42	1.36·10 ⁻⁴
0.8	125.2	0.17	5.54·10 ³	81.96	1.49·10 ⁻⁴
1	156.5	0.16	5.19·10 ³	80.74	1.61·10 ⁻⁴
1.2	187.8	0.15	4.92·10 ³	79.68	1.71·10 ⁻⁴
1.4	219.1	0.14	4.7·10 ³	78.74	1.8·10 ⁻⁴
1.6	250.4	0.14	4.52·10 ³	77.89	1.88·10 ⁻⁴
1.8	281.71	0.13	4.37·10 ³	77.11	1.96·10 ⁻⁴
2	313.01	0.13	4.24·10 ³	76.39	2.03·10 ⁻⁴

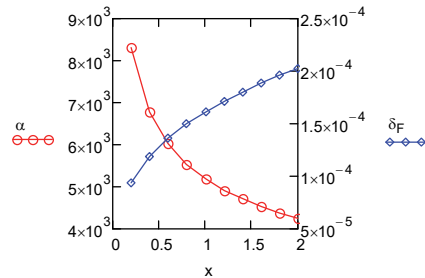
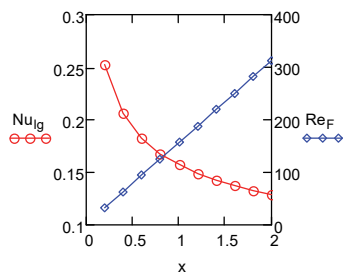


Рис. 7.13. Распределения по высоте трубы

В рассмотренном учебном примере с целью упрощения вычислений было поставлено граничное условие $q = \text{const}$. На практике простые условия вида $q = \text{const}$ или $\Delta t = \text{const}$ реализуются только с той или иной степенью приближения, а иногда бывают далеки от действительности. Как проводить расчеты в реальных условиях, показано в п. 7.8 «Воздухоохлаждаемый конденсатор».

Подчеркнем, что расчетные формулы для локальной теплоотдачи вида (7.35), (7.36) применимы при любых граничных условиях. Формула (7.49) для средней теплоотдачи на вертикальной поверхности при ламинарном режиме также справедлива независимо от вида граничных условий.

Конденсация на горизонтальной трубе. Одиночная горизонтальная труба

Выше уже получены формулы (7.33) для толщины пленки и (7.34) для локального коэффициента теплоотдачи, которые можно применить и в случае конденсации на поверхности горизонтальной трубы (рис. 7.14).

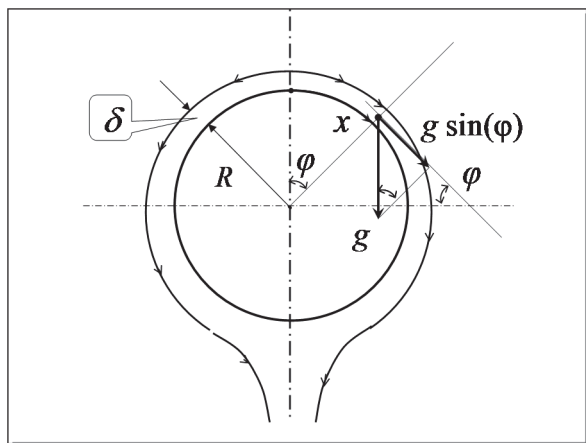


Рис. 7.14. Конденсация на горизонтальной трубе

Перепишем указанные формулы, учитывая, что проекция силы тяжести на направление течения пленки g_x и угол φ наклона элемента поверхности конденсации следующим образом изменя-

ются с координатой x , отсчитываемой по окружности трубы радиусом R (рис. 7.14):

$$\frac{g_x}{g} = \sin(\varphi); \quad \varphi = \frac{x}{R}. \quad (7.54)$$

В результате вместо (7.33) и (7.34) получим:

$$\frac{\delta}{l_g} = \left(\frac{3 \operatorname{Re}_F}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3}; \quad (7.55)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{\lambda (\sin(\varphi))^{1/3}}{l_g (3 \operatorname{Re}_F)^{1/3}}, \quad (7.56)$$

где число Рейнольдса пленки Re_F считается заданной величиной, определяемой тепловым потоком q на стенке (см. (7.31)):

$$\operatorname{Re}_F = \frac{\int_0^x q dx}{r\rho\nu} = \frac{R \int_0^\varphi q d\varphi}{r\rho\nu}. \quad (7.57)$$

При внимательном рассмотрении формулы (7.55) обнаруживается особенность в самой верхней точке $x = 0$, $\varphi = 0$, где число Рейнольдса (числитель) и $\sin(\varphi)$ (знаменатель) одновременно обращаются в ноль. Эта неопределенность раскрывается следующим образом.

Подставляя (7.57) в (7.55) и группируя величины, получают:

$$\frac{\delta}{l_g} = \left(\frac{3R}{r\rho\nu} \right)^{1/3} \left(\frac{\int_0^\varphi q d\varphi}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3} \Rightarrow \delta = C \left(\frac{\int_0^\varphi q d\varphi}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3} \quad (7.58)$$

Дальнейший анализ проводится в Mathcad (рис. 7.15) в режиме символьных вычислений.

$$\delta(\phi) := C \cdot \left(\frac{\int_0^\phi q(\psi) d\psi}{\sin(\phi)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \delta(\phi) \rightarrow C \cdot q(0)^{\frac{1}{3}}$$

$$d\delta(\phi) := \frac{d}{d\phi} \delta(\phi) \quad d\delta(\phi) \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{C}{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{q(\phi)}{\sin(\phi)} - \frac{\int_0^\phi q(\psi) d\psi}{\sin(\phi)^2} \cdot \cos(\phi) \right) \cdot \left(\frac{\int_0^\phi q(\psi) d\psi}{\sin(\phi)} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} d\delta(\phi) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{C}{\frac{2}{3}} \cdot \left. \frac{d}{dt} q(t) \right|_{t \leftarrow 0}$$

Рис. 7.15. Исследование решения в особой точке $\phi = 0$

В первом блоке вычислений (рис. 7.15) при предельном переходе $\phi \rightarrow 0$ получается, что если в верхней точке $\phi = 0$ локальный тепловой поток трубы конечен, то и *толщина пленки имеет конечное значение*. Во втором блоке сначала определяется производная от толщины пленки по координате, а затем вновь вычисляется предел в нулевой точке. Видно, что если производная от локальной плотности теплового потока $dq(\phi)/d\phi$ нулевая, то и производная от толщины пленки $d\delta(\phi)/d\phi$ нулевая. Полученные условия для точки $\phi = 0$ согласуются с симметрией относительно вертикальной оси, а также с физическими соображениями, согласно которым при пленочной конденсации, в условиях хорошего смачивания, следует считать поверхность пленки конденсата гладкой ($d\delta / d\phi = 0$), благодаря действию поверхностного натяжения.

Перейдем к расчету средней теплоотдачи. Предварительно выпишем расчетные соотношения для локальной теплоотдачи горизонтальной трубы при условии $q = \text{const}$.

Из (7.55)–(7.57) следует (графическое представление рис. 7.16):

$$q = \text{const}: \text{Re}_F = \frac{q \cdot x}{r \rho \nu} = \frac{q \cdot R}{r \rho \nu} \varphi; \quad (7.59)$$

$$\frac{\delta}{l_g} = \left(3 \frac{qR}{r \rho \nu} \right)^{1/3} \left(\frac{\varphi}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3}; \quad (7.60)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{l_g} \frac{1}{\left(3 \frac{qR}{r \rho \nu} \right)^{1/3} \left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \right)^{1/3}}; \quad \alpha_{\varphi=0} = \frac{\lambda}{l_g} \frac{1}{\left(3 \frac{qR}{r \rho \nu} \right)^{1/3}}. \quad (7.61)$$

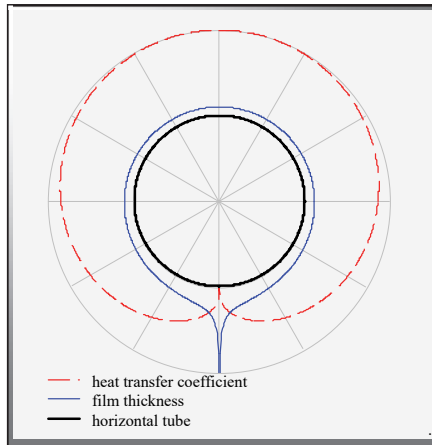


Рис. 7.16. Распределение толщины пленки конденсата и коэффициента теплоотдачи по окружности горизонтальной трубы

Осредним теплоотдачу при $q = \text{const}$ по соотношениям:

$$\alpha_m = \frac{q_m}{\Delta t_m}; \quad q_m = q = \text{const}; \quad \Delta t_m = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta t \cdot dx = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{q}{\alpha} \cdot dx. \quad (7.62)$$

После подстановок получим (подробные вычисления см. рис. 7.17):

$$\alpha_m = \alpha_{\varphi=0} \frac{\pi}{\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \right)^{-1/3} d\varphi} = 0,6997 \alpha_{\varphi=0}; \quad (7.63)$$

$\pi = 3.142$

$$\alpha(\varphi) := \alpha_0 \left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \Delta t(\varphi) := \frac{q}{\alpha(\varphi)}$$

$$\alpha_m := \frac{q}{\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta t(\varphi) d\varphi} \text{ simplify } \rightarrow \frac{\pi \cdot \alpha_0}{\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \right)^{\frac{-1}{3}} d\varphi} \quad \alpha_m \text{ float, 6 } \rightarrow 0.699674 \alpha_0$$

Рис. 7.17. Осреднение коэффициента теплоотдачи для горизонтальной трубы

Подстановка $\alpha_{\varphi=0}$ из (7.61) в (7.63) после простых преобразований приводит к формуле для средней теплоотдачи при конденсации на горизонтальной трубе при ламинарном течении пленки:

$$\text{Nu}_{l_g, m} \equiv \frac{\alpha_m l_g}{\lambda} = \frac{0,7105}{\text{Re}_F^{1/3}}; \quad (7.64)$$

$$\text{Re}_F \equiv \frac{G_{half}}{\rho \nu} = \frac{q_m \pi R}{r \rho \nu},$$

где число Рейнольдса пленки определяется расходом конденсата на половине (*half*) трубы, разрезанной осевой вертикальной плоскостью.

Выполнив в (7.64) замену $q_m \leftarrow \alpha_m \Delta t_m$, получают зависимость среднего коэффициента теплоотдачи от среднего температурного напора для горизонтальной трубы:

$$\alpha_m = 0,691 \left(\frac{\lambda^3 r g \rho}{\Delta t_m \nu D} \right)^{1/4}. \quad (7.65)$$

Напомним, что осреднение проведено для случая $q = \text{const}$. Если принять *температурный напор* постоянным вдоль поверхности конденсации, то числовой коэффициент будет другим: 0,728 вместо 0,691. Это различие невелико и составляет примерно 5%.

Натекание конденсата в пучке труб

Промышленные конденсаторы обычно выполняются в виде пучков горизонтальных труб. Конденсат с выше расположенных труб попадает на нижние. Эффект натекания в первом приближении можно учесть, определяя число Рейнольдса пленки через суммарный расход натекающего конденсата и дополнительно образующегося на данной трубке конденсата. Такая модель, по видимому, будет приемлема при близко расположенных по высоте горизонтальных трубках, когда эффектами ускорения при свободном падении конденсата в межтрубном пространстве и дополнительной конденсацией еще можно пренебречь.

Формулы (7.55) и (7.56) для расчета локальных величин применимы без изменений:

$$\frac{\delta}{l_g} = \left(\frac{3 \text{Re}_F}{\sin(\varphi)} \right)^{1/3}; \quad (7.66)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{\lambda (\sin(\varphi))^{1/3}}{l_g (3 \text{Re}_F)^{1/3}}, \quad (7.67)$$

в то время как вместо (7.57) для числа Рейнольдса пленки Re_F теперь следует записать:

$$\text{Re}_F = \text{Re}_{F,\text{influx}} + \text{Re}_{F,\text{eigen},\varphi}; \quad \text{Re}_{F,\text{eigen},\varphi} = \frac{R \int_0^\varphi q d\varphi}{r \rho \nu}, \quad (7.68)$$

где $Re_{F,\text{influx}}$ определяется расходом натекающего конденсата, $Re_{F,\text{eigen},\varphi}$ – собственной конденсацией на участке $0-\varphi$ данной трубы. Напомним, что расходы конденсата берутся для половины поверхности труб, разрезанных осевой вертикальной плоскостью симметрии, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Осредним теплоотдачу трубы с натеканием при $q = \text{const}$ по соотношениям (7.62). Предварительно получим явные формулы для локальной теплоотдачи при $q = \text{const}$.

Формула (7.68) для суммарного числа Рейнольдса пленки на участке $0-\varphi$ переписется в следующем виде:

$$q = \text{const}: \quad Re_F = Re_{F,\text{influx}} + Re_{F,\text{eigen}} \frac{\varphi}{\pi}; \quad Re_{F,\text{eigen}} = \frac{q \cdot \pi R}{r \rho \nu}, \quad (7.69)$$

где $Re_{F,\text{eigen}}$ определяется конденсацией на половине профиля $0 - \pi$ данной трубы. После подстановки (7.69) в (7.67) получают для локальной теплоотдачи структурированную формулу с выделенной зависимостью от угла φ :

$$Nu_l \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = \frac{1}{\left(Re_{F,\text{influx}} + Re_{F,\text{eigen}} \right)^{1/3}} \frac{\sin(\varphi)^{1/3}}{\left(3 \frac{\text{Influx} + \frac{\varphi}{\pi}}{\text{Influx} + 1} \right)^{1/3}}, \quad (7.70)$$

где параметр Influx введен как отношение характерных чисел Рейнольдса:

$$\text{Influx} \equiv \frac{Re_{F,\text{influx}}}{Re_{F,\text{eigen}}}. \quad (7.71)$$

Распределение локального коэффициента теплоотдачи и толщины пленки для горизонтальной трубы с натеканием показано на рис. 7.18.

Сопоставить локальные распределения для одиночной трубы и для трубы в пучке (с натеканием) можно, сравнивая рис. 7.16, 7.18. В рамках принятой модели, наблюдается уменьшение теплоотдачи из-за увеличения толщины пленки конденсата.

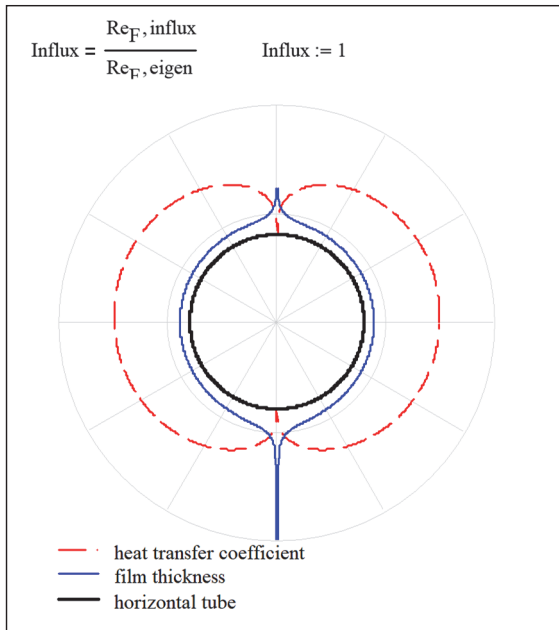


Рис. 7.18. Распределение толщины пленки и коэффициента теплоотдачи по окружности горизонтальной трубы при натекании конденсата

Располагая уравнением (7.70) для локального распределения, проведем осреднение коэффициента теплоотдачи с учетом натекания. Необходимые вычисления выполнены в Mathcad (рис. 7.19). Способ осреднения указан уравнениями (7.62).

Результат осреднения выражается соотношением:

$$\text{Nu}_{l_g, m} \equiv \frac{\alpha_m l_g}{\lambda} = \frac{K_{mean}(\text{Influx})}{\left(\text{Re}_{F, \text{influx}} + \text{Re}_{F, \text{eigen}}\right)^{1/3}}. \quad (7.72)$$

Коэффициент K_{mean} является функцией от Influx, т.е. отношения характерных чисел Рейнольдса для натекающего конденсата и собственного конденсата, образующегося на рассматриваемой трубе. При нулевом значении Influx получается 0,711 как в формуле (7.64) для одиночной трубы (без натекания). При больших значениях Influx получается асимптотическое значение 0,518; в этом случае дополнительная конденсация мала по сравнению с натеканием, что возможно в самых нижних рядах труб.

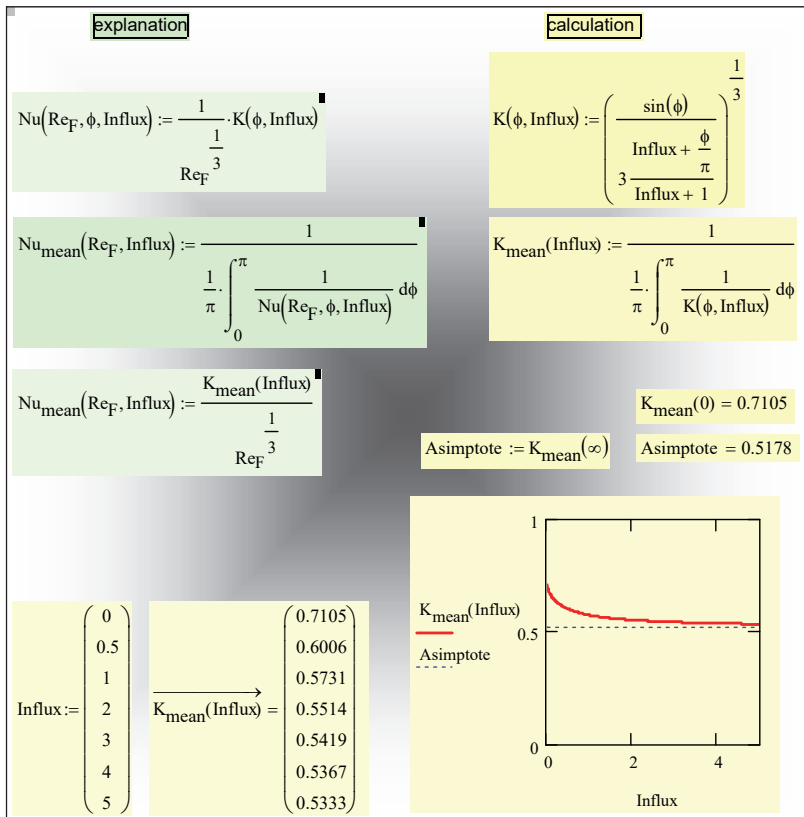


Рис. 7.19. Осреднение коэффициента теплоотдачи по окружности трубы при натекании конденсата

Наблюдаемая в реальных конденсационных пучках картина может заметно отличаться от простой схемы, принятой выше. Эффекты гидродинамической неустойчивости и поверхностного натяжения приводят к *капельному* орошению нижележащих труб. Бомбардировка падающими каплями может несколько интенсифицировать теплоперенос, а не просто уменьшить его вследствие роста средней толщины пленки конденсата.

Существуют две причины, оправдывающие анализ простейшей схемы с плавным натеканием.

Во-первых, рассмотренная модель дает возможный нижний предел интенсивности конденсации на пучках горизонтальных труб, реализуемый при тесном расположении труб по вертикали. С этим пределом могут быть сопоставлены экспериментальные данные и усовершенствованные модельные представления.

Во-вторых, результирующие соотношения простейшей модели указывают на основную структуру возможных моделей: число Нуссельта отыскивается как некоторая функция от *суммарного* числа Рейнольдса пленки, накопленного при конденсации на выше расположенных трубах. Например, одно из рекомендуемых в справочной литературе эмпирических расчетных соотношений для средней теплоотдачи любой трубы в пучке выглядит так же, как исходная формула для одиночной трубы (7.64), однако число Re_F рассчитывается по суммарному расходу конденсата:

$$Nu_{lgm} \equiv \frac{\alpha_m l_g}{\lambda} = \frac{0,7105}{\left(Re_{F \text{ influx}} + Re_{F \text{ eigen}} \right)^{1/3}}. \quad (7.73)$$

Сопоставляя (7.73) с формулой (7.36) для *локальной* теплоотдачи вертикальной стенки, мы замечаем их практическую идентичность. Эту аналогию между соотношениями для пучков и вертикальных поверхностей распространяют на режимы в пучках с большими значениями накопленного числа Re_F , когда наступает переход к турбулентному течению пленки.

7.4. Сдвиговая ламинарная пленка

Если конденсация происходит на горизонтальной поверхности (рис. 7.20), то проекция силы тяжести на возможное направление движения (т.е. на ось x или ось z) будет нулевой. Так же обстоит дело с конденсацией в условиях невесомости, например, на спутнике. Обеспечить движение пленки в таких случаях может динамическое воздействие парового потока, движущегося вдоль поверхности. *Напряжение трения* τ_s на поверхности раздела фаз (рис. 7.20) принимается в качестве заданного внешнего параметра. Течение под действием касательного напряжения называют *сдвиговым*.

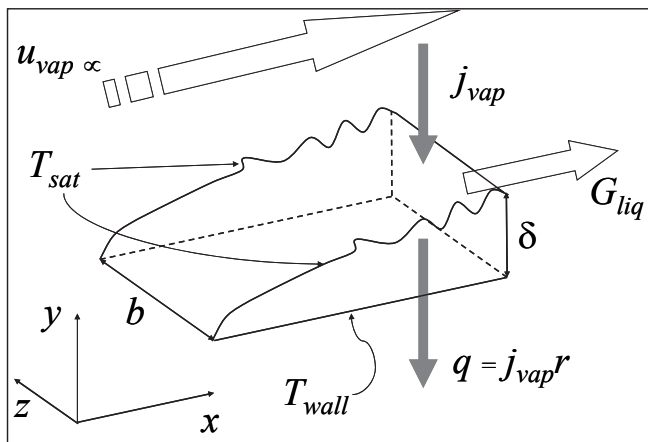


Рис. 7.20. Конденсация быстродвижущегося пара

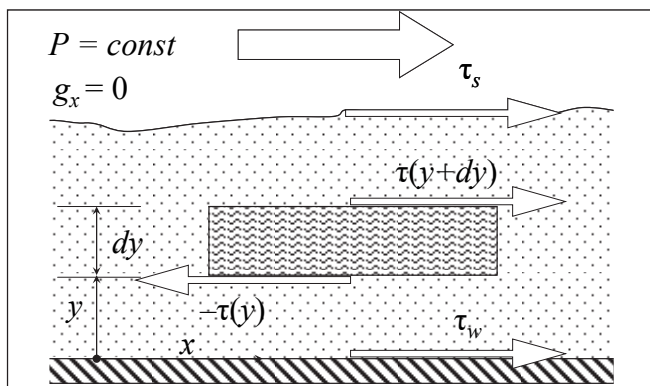


Рис. 7.21. Равновесие сил в сдвиговой пленке конденсата

Ранее полученное уравнение движения (7.25) приспособляется к рассматриваемому случаю, если положить $g = 0$, $\mu_t = 0$. Однако полезно повторить основные идеи вывода на конкретном примере.

Движение в тонкой пленке считается безинерционным, т.е. равномерным, без ускорений. Это значит, что сумма сил, действующих на контрольный объем в пленке (рис. 7.21), должна быть равна нулю. Давление в системе постоянно, проекция силы

тяжести на направление движения равна нулю, поэтому остаются только касательные напряжения, действующие на верхнюю и нижнюю грани:

$$\tau(y+dy) + [-\tau(y)] = 0.$$

Эта запись означает, что касательное напряжение постоянно по сечению сдвиговой пленки, т.е. уравнение движение для ламинарной сдвиговой пленки выглядит как

$$\tau(y) \equiv \mu \frac{du}{dy} = \text{const} = \tau_s. \quad (7.74)$$

Уравнение энергии (7.18) переписывается для ламинарной пленки в виде:

$$q_y = -\lambda \frac{dt}{dy} = \text{const}, \quad (7.75)$$

что дает линейный профиль температуры в пленке и уже известное выражение коэффициента теплоотдачи через термическую проводимость ламинарной пленки:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}, \quad (7.76)$$

где λ – коэффициент теплопроводности конденсата.

При интегрировании уравнения движения (7.74) получим линейный профиль скорости в пленке,

$$u(y) = \frac{\tau_s}{\rho \nu} y. \quad (7.77)$$

Такие же вычисления, как на рис. 7.9 для гравитационной пленки, но теперь с линейным профилем скорости, приводят к следующим выражениям для расхода конденсата и числа Рейнольдса пленки:

$$G = \rho u_m \delta = \frac{1}{2} \frac{\tau_s}{\nu} \delta^2; \quad (7.78)$$

$$\text{Re}_F = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\nu^2} \frac{\tau_s \delta^2}{\nu}. \quad (7.79)$$

Из (7.78) следует соотношение для толщины пленки:

$$\delta = \sqrt{2 \operatorname{Re}_F} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{\tau_s/\rho}}, \quad (7.80)$$

или в двух эквивалентных по содержанию безразмерных представлениях:

$$D \equiv \frac{\delta \sqrt{\tau_s/\rho}}{\nu} = \sqrt{2 \operatorname{Re}_F}; \quad \frac{\delta}{l_g} = \sqrt{2 \operatorname{Re}_F} \frac{1}{\frac{l_g \sqrt{\tau_s/\rho}}{\nu}}. \quad (7.81)$$

Таким образом, толщина ламинарной сдвиговой пленки увеличивается пропорционально корню квадратному из числа Рейнольдса пленки (или из расхода конденсата в пленке) и убывает обратно пропорционально безразмерному фактору трения на поверхности раздела фаз. Это главный результат анализа гидродинамики ламинарной сдвиговой пленки.

Для фактора трения вводится мнемоническое обозначение SSF («shear stress factor» – фактор сдвигового напряжения):

$$SSF \equiv \frac{l_g \sqrt{\tau_s/\rho}}{\nu}, \quad (7.82)$$

где τ_s – напряжение трения на поверхности раздела фаз, l_g – линейный масштаб для толщины пленки (7.32):

$$l_g \equiv \left(\frac{\nu^2}{g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)} \right)^{1/3},$$

по умолчанию, физические параметры, записанные без индекса, это свойства жидкой фазы (конденсата).

Подстановка (7.80) в (7.76) дает для локального коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \lambda \frac{\sqrt{\tau_s/\rho}}{\nu} \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}_F}},$$

или, в безразмерной форме:

$$\text{Nu}_{lg} \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2 \text{Re}_F}} \frac{l_g \sqrt{\tau_s / \rho}}{\nu} \equiv \frac{SSF}{\sqrt{2 \text{Re}_F}}. \quad (7.83)$$

Физические параметры в (7.83) – это свойства жидкой фазы (конденсата). Напряжение трения τ_s на поверхности пленки является заданным параметром задачи. Способ расчета этой величины через скорость пара обсуждается далее в разделе о сопротивлении двухфазного потока.

В асимптотическом случае *сильной* конденсации трение рассчитывается достаточно просто. В паровом потоке вблизи поверхности раздела фаз формируется *асимптотический* пограничный слой с сильным отсосом, для которого сопротивление трения выражается соотношением:

$$\tau = j u_{\text{vap} \infty} = \frac{q}{r} u_{\text{vap} \infty}. \quad (7.84)$$

Подстановка (7.84) в уравнение (7.83) для коэффициента теплоотдачи быстро движущегося пара приводит к следующему результату:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda_{lq}} = \sqrt{0,5} \sqrt{\frac{u_{\text{vap} \infty} x}{\nu_{lq}}}. \quad (7.85)$$

Эта формула совпадает с точностью до постоянного коэффициента со случаем однофазного течения жидкости со скоростью $u_{\text{vap} \infty}$.

7.5. Гравитационная турбулентная пленка конденсата

Уравнения энергии и движения для турбулентной пленки

Как это уже обсуждалось выше, течение пленки конденсата вниз по вертикальной поверхности под действием силы тяжести развивается следующим образом. Толщина пленки увеличивается вследствие конденсации пара на ее поверхности. Режим течения пленки зависит от значения Re_F , которое увеличивается вниз по поверхности вместе с расходом G стекающего конденсата. Лами-

нарное течение с гладкой поверхностью пленки наблюдается при $Re_F < 5$. В интервале $5 < Re_F < 400$ ламинарное течение сопровождается волнообразованием. Когда число Рейнольдса превосходит критическое значение, равное примерно 400, наблюдается переход к *турбулентному режиму*.

Уравнения для турбулентной гравитационной пленки следуют из общих соотношений (7.18), (7.25), если положить равным нулю трение на поверхности раздела фаз τ_s .

В результате получаются уравнения энергии и движения:

$$q \equiv (\lambda + \lambda_T) \frac{dt}{dy} = \text{const}; \quad t(y=0) = t_w; \quad t(y=\delta) = t_s; \quad (7.86)$$

$$\tau \equiv (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy} = \rho g (\delta - y); \quad (7.87)$$

$$u(y=0) = 0,$$

где y – нормальная к стенке координата, τ – касательное напряжение, q – плотность теплового потока по нормали к стенке, g – действующее значение силы тяжести, т.е. проекция ускорения силы тяжести на направление течения пленки. Дифференциальные уравнения (7.86) и (7.87) по структуре такие же, как и полученные ранее (7.27) и (7.28) для *ламинарной гравитационной пленки*, однако коэффициенты переноса – вязкость и теплопроводность – являются теперь некоторыми *эффективными* величинами и содержат как *молекулярную*, так и *турбулентную* составляющие.

Уравнение движения (7.87) описывает равномерное, безынерционное течение тонкой пленки в условиях равенства вязких напряжений и силы тяжести. На поверхности пленки ($y = \delta$) касательное напряжение равно нулю, что соответствует предположению об отсутствии динамического взаимодействия пара и пленки (пар неподвижен и разрезен).

Уравнение энергии (7.86) отражает ту особенность теплопереноса в тонкой пленке (по сравнению с обычным пограничным слоем), что тепловой поток по нормали к стенке является постоянной величиной, $q = \text{const}$ по y . Теплота фазового перехода, выделяющаяся на поверхности раздела фаз, транзитом переносится к стенке посредством *кондукции*, а конвективный перенос пренебрежимо мал.

К уравнениям движения (7.87) и энергии (7.86) должны быть добавлены замыкающие соотношения для турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности.

Безразмерные переменные

Введем характерные масштабы и безразмерные величины, которые используются при количественном описании турбулентности:

– динамическая скорость:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}; \quad (7.88)$$

– безразмерное расстояние от стенки:

$$Y = \frac{u_\tau y}{\nu}; \quad (7.89)$$

– безразмерная толщина пленки:

$$D = \frac{u_\tau \delta}{\nu}; \quad (7.90)$$

– безразмерная скорость течения в пленке:

$$U = \frac{u}{u_\tau}. \quad (7.91)$$

Из уравнения (7.87), записанного для $y = \delta$, следует выражение для напряжения трения на стенке через толщину пленки:

$$\tau_w = \rho g \delta, \quad (7.92)$$

справедливое для гравитационных пленок со свободной (не подверженной динамическому воздействию) поверхностью. Сопоставляя с определением (7.88), получаем выражение для динамической скорости в случае гравитационной пленки:

$$u_\tau = \sqrt{g\delta}. \quad (7.93)$$

Подстановка (7.93) в (7.89) дает полезное соотношение для двух различных форм безразмерного представления толщины гравитационной пленки:

$$D \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} = \sqrt{g\delta} \frac{\delta}{\nu} \equiv \sqrt{\frac{g\delta^3}{\nu^2}} \equiv \left(\frac{\delta}{l_g} \right)^{3/2}. \quad (7.94)$$

Коэффициенты турбулентного переноса в пленке конденсата

Для расчета коэффициентов турбулентного переноса в уравнениях движения (7.87) и энергии (7.86) необходимо использовать подходящую модель турбулентности. Начнем с простейшей модели, которая основывается на *газокинетической аналогии*. Молекулярный перенос осуществляется в процессе хаотического теплового движения, когда молекулы обмениваются энергией при столкновениях. Как метафору, этот образ используют для *турбулентного* переноса. В качестве частиц выступают громадные (по сравнению с молекулярными масштабами) объемы жидкости – хаотически перемещающиеся *турбулентные моли*. В некоторой степени это похоже на газовую смесь, содержащую некий компонент с очень большими молекулами.

Представление о порядке величин дают следующие оценки. Согласно элементарной газокинетической теории, имеем для молекулярной вязкости:

$$\nu \approx l w, \quad (7.95)$$

где w – скорость теплового движения молекул, т.е. примерно скорость звука, l – длина свободного пробега.

Эту же формулу можно принять для турбулентной вязкости, полагая w скоростью движения турбулентных молей, а l – длиной свободного пробега моля (турбулентным масштабом). На основе экспериментальных данных для турбулентных потоков:

$$w \approx 0,1 \cdot W; \quad l \approx 0,1 \cdot L; \quad \rightarrow \quad \nu_T \approx c_T W \cdot L; \quad c_T \approx 0,01,$$

где W и L – характерные значения скорости и поперечного размера потока.

Для турбулентной пленки конденсата характерными значениями W и L будут средняя скорость стекания пленки u_m и толщина пленки δ :

$$\nu_T \approx c_T u_m \delta, \quad (7.96)$$

где турбулентная константа c_T есть величина порядка 10^{-2} .

Эта оценка годится для развитого турбулентного потока на удалении от твердой стенки. Здесь турбулентные коэффициенты могут на несколько порядков превышать молекулярные характе-

ристики. Однако в непосредственной близости от твердых стенок, ограничивающих движение турбулентных молей, турбулентность подавляется вязкостью, так что остаются только молекулярные составляющие.

Основываясь на простейшей модели, можно сделать некоторые полезные предварительные оценки.

Из сопоставления (7.96) и (7.31) видно, что число Рейнольдса пленки может служить мерой интенсивности турбулентности:

$$\frac{v_T}{\nu} \approx c_T \frac{u_m \delta}{\nu} \approx c_T \text{Re}_F. \quad (7.97)$$

Динамическая скорость (7.88) имеет наглядную интерпретацию как мера пульсационной скорости в турбулентном потоке. Действительно, напряжение трения можно оценить как конвективный перенос импульса благодаря хаотическому движению с пульсационными скоростями u' :

$$\tau_T \approx \rho u' u'. \quad (7.98)$$

Сопоставляя (7.88) и (7.98), получаем:

$$u_\tau \approx u' \approx 0,1 \cdot u_m. \quad (7.99)$$

Теперь из (7.90) и (7.99) следует оценочное соотношение между турбулентной вязкостью и безразмерной толщиной пленки:

$$D \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} \approx \frac{u' \cdot (0,1 \cdot \delta)}{\nu} 10 \approx 10 \cdot \frac{v_T}{\nu} \rightarrow \frac{v_T}{\nu} \approx 0,1 \cdot D. \quad (7.100)$$

Формулы (7.96) и (7.99) показывают, что для больших чисел Рейнольдса Re_F (или для больших толщин пленки D) турбулентная вязкость будет на порядки превышать молекулярное значение. Совместное рассмотрение этих двух формул показывает также, что функциональная связь между Re_F и D при турбулентном течении пленки должна быть близка к линейной.

Основываясь на формуле (7.97) для турбулентной вязкости, можно предварительно оценить термическую проводимость конденсатной пленки следующим образом. В рамках элементарных моделей турбулентности полагают, что одни и те же турбулентные моли переносят и импульс, и тепловую энергию.

Поэтому коэффициенты турбулентного переноса теплоты и импульса принимают одинаковыми, а турбулентное число Прандтля – равным единице:

$$a_T = \nu_T; \quad \text{Pr}_T \equiv \frac{\nu_T}{a_T} = 1. \quad (7.101)$$

Простые тождественные преобразования формулы (7.97) с учетом (7.101),

$$\nu_T = a_T \equiv \frac{\lambda_T}{\rho c_p} \approx (c_T \text{Re}_F) \nu \equiv (c_T \text{Re}_F) a \text{Pr} \equiv (c_T \text{Re}_F) \frac{\lambda}{\rho c_p} \text{Pr},$$

приведут к следующему выражению для турбулентной теплопроводности:

$$\lambda_T \approx \lambda \cdot (c_T \text{Pr Re}_F). \quad (7.102)$$

Для пленки толщиной δ получим:

$$\alpha_{\text{out}} \approx \frac{\lambda_T}{\delta} \approx \frac{\lambda}{\delta} \cdot (c_T \text{Pr Re}_F). \quad (7.103)$$

Ясно, что при больших значениях числа Рейнольдса пленки Re_F , характерных для турбулентных потоков, коэффициент теплоотдачи будет значительно превышать величины, которые дает ламинарная теория (7.34).

Подчеркнем, что формула (7.103) служит только для иллюстрации эффектов турбулентного переноса в пленке. Она *не годится* для практических расчетов конденсации, поскольку не учитывает затухание турбулентности по мере приближения к твердой стенке. Формула (7.103) может быть полезна для оценки проводимости во *внешней* области пленки (на удалении от стенки), что и подчеркнуто мнемоническим индексом «*out*»; такие оценки могут потребоваться при расчете нагрева или охлаждения жидких пленок, стекающих по *адиабатической* стенке и контактирующих с горячим или холодным газом.

Для точных расчетов теплообмена при конденсации требуется более детальная модель, чем использованная выше для предварительных оценок. Д.А. Лабунцов (1960) применил в своей классической работе по конденсации на гравитационной турбулентной пленке исходное соотношение вида:

$$\text{N}_T \equiv \frac{\nu_T}{\nu} = f_\nu(Y, D). \quad (7.104)$$

согласно которому относительная турбулентная вязкость является функцией безразмерного расстояния от стенки Y и безразмерной толщины пленки D (рис. 7.22).

В разделе 7.6 о турбулентной сдвиговой пленке подробно рассматривается применение одной из базовых моделей турбулентности – Прандтлевской теории пути смешения, в которой распределение турбулентной вязкости выводится из более первичных модельных представлений.

Распределения скорости и температуры в форме интегралов

Используя соотношения предыдущего параграфа, нетрудно представить уравнение движения (7.87) в безразмерной форме:

$$dU = \frac{1 - \frac{Y}{D}}{1 + \frac{\nu_T}{\nu}} dY.$$

Благодаря структуре формулы (7.104) для турбулентной вязкости, получается дифференциальное уравнение с *разделенными* переменными. Интегрируя правую и левую части в согласованных пределах $0 \div Y$, $U(0) \div U(Y)$ и учитывая граничное условие прилипания на твердой стенке $U(0) = 0$, получают распределение скорости в пленке:

$$U(Y) = \int_0^Y \frac{1 - \frac{Y}{D}}{1 + \frac{\nu_T}{\nu}} dY. \quad (7.105)$$

Согласно определению (7.31), число Рейнольдса пленки вычисляется как расход конденсата через поперечное сечение пленки:

$$\text{Re}_F = \int_0^D U dY. \quad (7.106)$$

Это уравнение задает связь Re_F с безразмерной толщиной пленки D .

Уравнение энергии (7.86) в безразмерном виде записывается как уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dt(y)}{\left(\frac{q}{\rho c_p u_\tau}\right)} = \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}$$

и после интегрирования дает распределение температуры в пленке:

$$\frac{t(y) - t_w}{\left(\frac{q}{\rho c_p u_\tau}\right)} = \int_0^Y \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}. \quad (7.107)$$

Если проинтегрировать предыдущее уравнение в полных пределах,

$$\frac{t_s - t_w}{\left(\frac{q}{\rho c_p u_\tau}\right)} = \int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}, \quad (7.108)$$

то получится выражение для безразмерного коэффициента теплоотдачи в следующей форме:

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\tau} = \frac{1}{\int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}}. \quad (7.109)$$

Связь между двумя формами безразмерного коэффициента теплоотдачи (числами St и Nu) нетрудно получить, учитывая соотношение (7.94):

$$St \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\tau} \equiv \frac{Nu_{lg}}{Pr \cdot D^{1/3}}. \quad (7.110)$$

Для построения распределения температуры в сечении пленки удобная формула получается, если почленно поделить (7.107) на (7.108):

$$\Theta \equiv \frac{t(y) - t_w}{t_s - t_w} = \frac{\int_0^Y \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}}{\int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{v_T}{v}}}. \quad (7.111)$$

Аналогичные вычисления можно провести для профиля скорости (7.105), как это показано в следующем пункте.

Для завершения разработки теории гравитационной турбулентной пленки потребуется применение *численных методов*. Эта работа выполняется далее в математическом пакете Mathcad.

Расчет профиля скорости в турбулентной гравитационной пленке

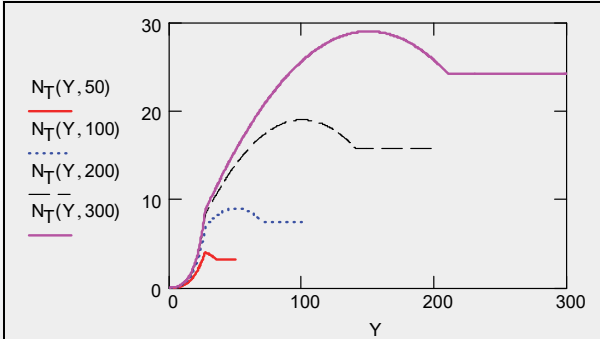
Основанное на экспериментальных данных распределение относительной турбулентной вязкости

$$N_T \equiv \frac{v_T}{\nu} = N_T(Y, D)$$

по толщине пленки имеет характерный вид кривой с максимумом (рис. 7.22). Серия кривых построена при различных значениях толщины пленки D . Виден существенный рост уровня турбулентности вместе с ростом толщины пленки. Как и следовало ожидать, на твердой стенке коэффициент турбулентного переноса обращается в ноль. На другой – свободной – границе пленки имеют место высокие значения турбулентной вязкости, что находит отражение также в экспериментально наблюдаемых сильных волновых возмущениях на поверхности раздела фаз. Из графиков видно, что имеется область постоянного значения вблизи этой границы, где значения турбулентной вязкости примерно такие, как предсказываются простейшей моделью турбулентности (7.100).

Профиль скорости в турбулентной гравитационной пленке определялся интегрированием по уравнению (7.105). На графике (рис. 7.22) кривые обращены вниз, чтобы соответствовать реальному направлению течения вниз по вертикальной поверхности (рис. 7.1). Вид профиля характерен для турбулентного потока: вблизи твердой стенки в пределах вязкого подслоя наблюдается резкое изменение скорости, а затем, в области развитой турбулентности – относительно небольшие изменения благодаря сильному поперечному перемешиванию (или, что то же самое, большой турбулентной вязкости). Касательная на поверхности пленки нулевая, как и должно быть для свободной поверхности без трения.

$$N_T(Y, D) := \begin{cases} N_T \leftarrow \left(1 - \frac{Y}{D}\right) \cdot \cosh(0.0695 \cdot Y)^2 - 1 & \text{if } Y > 0 \wedge Y \leq 26.7 \\ N_T \leftarrow \left[0.4 \cdot Y \cdot \left(1 - \frac{Y}{D}\right)\right] - 1 & \text{if } Y > 26.7 \wedge Y \leq 0.7 \cdot D \\ N_T \leftarrow 0.084 \cdot D - 1 & \text{if } Y > 0.7 \cdot D \wedge Y \leq D \end{cases}$$



$$U(Y, D) := \int_0^Y \frac{1 - \frac{Y}{D}}{1 + N_T(Y, D)} dY$$

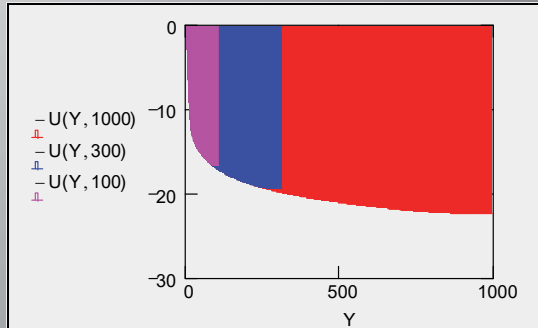


Рис. 7.22. Распределение турбулентной вязкости по толщине пленки и профиль скорости (безразмерные переменные и параметры: см. (7.89)–(7.91))

Расчет расхода конденсата в пленке

Вычисления (рис. 7.23) проведены по ранее выведенным формулам (7.105) и (7.106) для значений безразмерной толщины пленки D в интервале $100 \div 9000$.

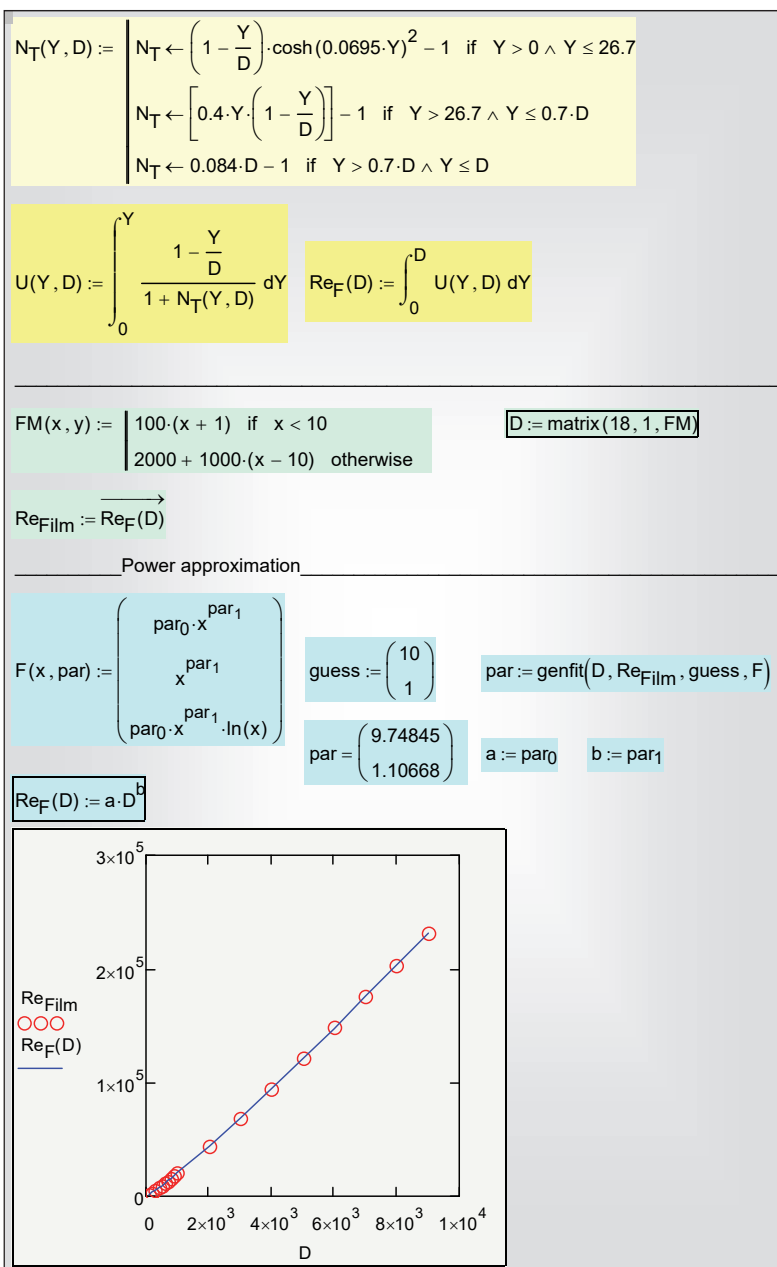


Рис. 7.23. Зависимость числа Рейнольдса от безразмерной толщины пленки

В результате получилась почти линейная зависимость $Re_F(D)$, как и предсказывалось элементарной моделью турбулентности (7.97), (7.100).

Аппроксимация результатов численного интегрирования в форме степенного одночлена (т.е. $Re_F(D) = a D^b$) получена посредством встроенной функции Mathcad genfit:

$$Re_F(D) = 9,748 D^{1,107}.$$

Это важный результат в гидродинамике гравитационной турбулентной пленки. Найденную зависимость можно применить для расчета расхода G_l , кг/(м с) в турбулентной гравитационной пленке, если задана ее толщина δ , м, или наоборот, для расчета толщины по заданному расходу. Необходимая связь между размерными и безразмерными величинами задается соотношениями (7.31), (7.94).

Далее функция $Re_F(D)$ используется при расчете локальной теплоотдачи для гравитационной турбулентной пленки конденсата.

Расчет локальной теплоотдачи

Вычисления (рис. 7.24) проводят по формулам (7.109) и (7.110) в интервале значения чисел Прандтля $0,1 \div 100$. Распределение турбулентной вязкости N_T приведено на рис. 7.22. Соотношение между числом Рейнольдса Re_F и толщиной пленки D (рис. 7.23) представлено в форме таблицы D–Re.

Как видно на графиках (рис. 7.24), в интервале $Pr = 1 \div 30$ для $Nu(Re, Pr)$ получаются простые степенные аппроксимации с наклоном примерно 0,25 (две средние кривые на рис. 7.24); за пределами этого интервала чисел Pr зависимость $Nu(Re, Pr)$ оказывается более сложной.

$$N_T(Y, D) := \begin{cases} N_T \leftarrow \left(1 - \frac{Y}{D}\right) \cdot \cosh(0.0695 \cdot Y)^2 - 1 & \text{if } Y > 0 \wedge Y \leq 26.7 \\ N_T \leftarrow \left[0.4 \cdot Y \cdot \left(1 - \frac{Y}{D}\right)\right] - 1 & \text{if } Y > 26.7 \wedge Y \leq 0.7 \cdot D \\ N_T \leftarrow 0.084 \cdot D - 1 & \text{if } Y > 0.7 \cdot D \wedge Y \leq D \end{cases}$$

$$Pr_T := 1$$

$$Pr := (0.1 \ 1 \ 10 \ 100)^T$$

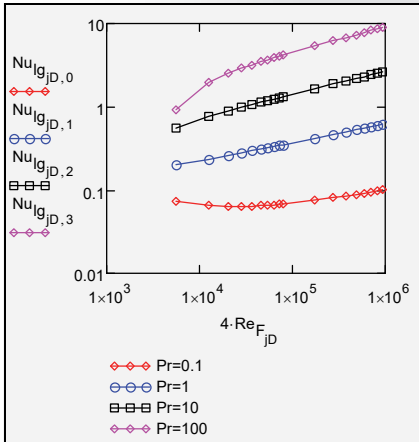
$$D := D_{Re}^{(0)}$$

$$Re_F := D_{Re}^{(1)}$$

$$St(jD, iPr) := \frac{1}{\int_0^{D_{jD}} \frac{1}{\frac{1}{Pr_{iPr}} + \frac{1}{Pr_T} \cdot N_T(Y, D_{jD})} dY}$$

$$jD := 0..17$$

$$Nu_{lg_{jD, iPr}} := St(jD, iPr) \cdot \left[Pr_{iPr} \cdot (D_{jD})^{\frac{1}{3}}\right]$$



100	1.393×10^3
200	3.187×10^3
300	5.111×10^3
400	7.12×10^3
500	9.193×10^3
600	1.132×10^4
700	1.348×10^4
800	1.568×10^4
900	1.791×10^4
1×10^3	2.017×10^4
2×10^3	4.386×10^4
3×10^3	6.886×10^4
4×10^3	9.471×10^4
5×10^3	1.212×10^5
6×10^3	1.482×10^5
7×10^3	1.756×10^5
8×10^3	2.033×10^5
9×10^3	2.314×10^5

Рис. 7.24. Расчет локальной теплоотдачи для турбулентной гравитационной пленки

Д.А. Лабунцов (1960) аппроксимировал результаты своих вычислений простой степенной формулой и указал диапазон ее применения:

$$\text{Nu}_{lg} = 0,023 \cdot (4 \text{Re}_F)^{0,25} \text{Pr}^{0,5}; \quad (7.112)$$

$$1 \leq \text{Pr} \leq 25; \quad 6 \cdot 10^3 \leq 4 \text{Re}_F \leq 2,8 \cdot 10^5.$$

Эта формула является общепринятой в практике инженерных расчетов теплоотдачи при конденсации для гравитационной турбулентной пленки. Она сопоставлена на рис. 7.25 с результатами прямых вычислений (программа на рис. 7.24).

Особенности, связанные с влиянием числа Прандтля на теплоперенос в пленках конденсата, обсуждаются в следующем пункте.

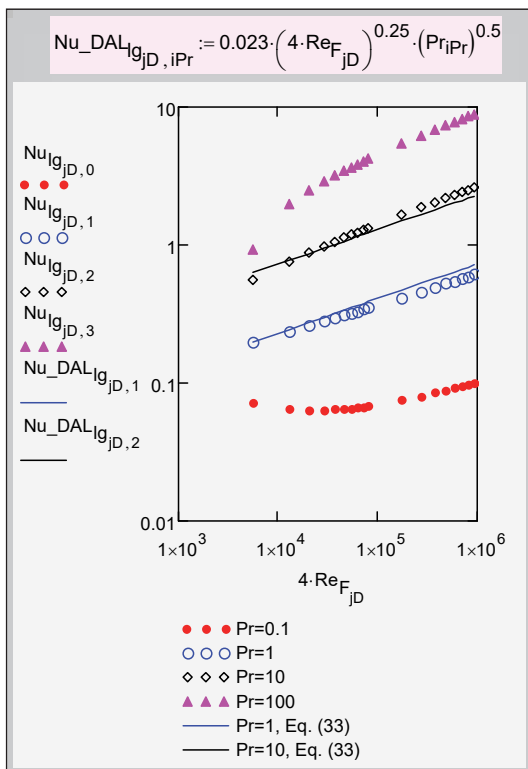


Рис. 7.25. Прямые вычисления и аппроксимация формулой Д.А. Лабунцова (7.112)

Исследование влияния числа Прандтля на теплоперенос в пленке конденсата

Число Прандтля задает отношение между молекулярными значениями кинематической вязкости и температуропроводности. Эти физические параметры ответственны за глубину проникания возмущений скорости и температуры во внутренние слои жидкости.

Проведем численный эксперимент и сопоставим распределения скорости и температуры при различных значениях числа Pr (рис. 7.26). Вычисления выполняются по формулам (7.105) и (7.111).

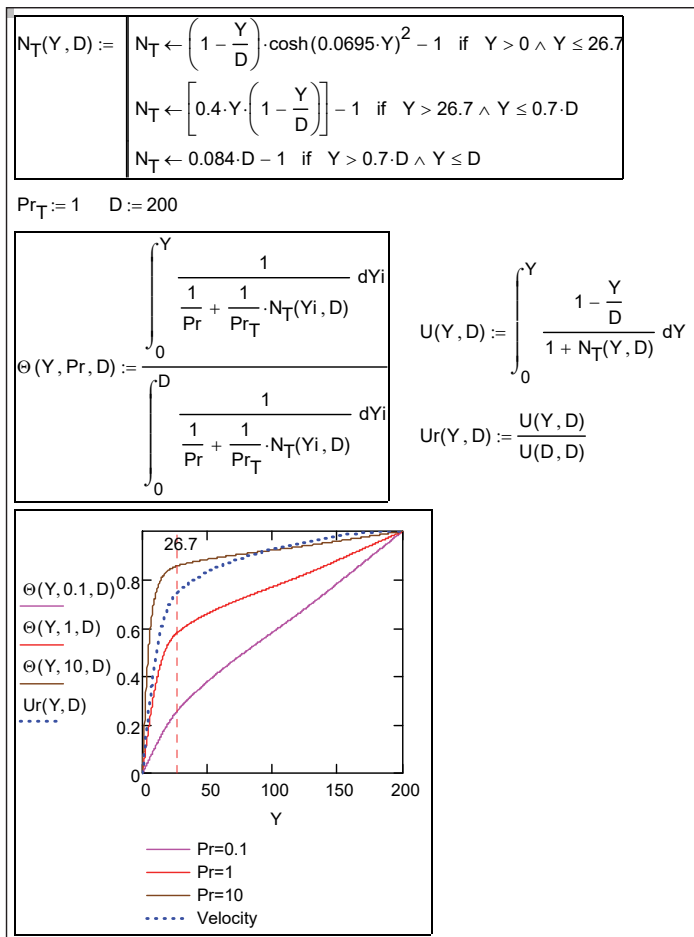


Рис. 7.26. Влияние числа Прандтля на профиль температуры в пленке

На графике с помощью вертикальной пунктирной линии отмечена граница между пристенным слоем с исчезающим уровнем турбулентности и внешним развитым турбулентным потоком в пленке. Профиль скорости, также построенный на графике, остается одинаковым для всех сравниваемых случаев.

- Для жидкости с $Pr = 1$ наблюдается примерно одинаковое, 50% на 50%, падение температуры в пределах двух указанных характерных слоев пленки.

- Для жидкости с относительно низкой теплопроводностью, $Pr = 10$, основное термическое сопротивление (90%) сосредоточено в пределах вязкого подслоя в непосредственной близости от стенки.

- Для высокотеплопроводной жидкости, $Pr = 0,1$, почти несущественно, имеется ли турбулентное перемешивание или нет – ее собственная молекулярная теплопроводность достаточно высока.

Теперь ясно, почему наблюдается некоторое падение теплоотдачи с ростом числа Рейнольдса в случае $Pr = 0,1$, т.е. в случае жидкости с *высокой теплопроводностью*: отрицательный эффект увеличения толщины пленки (вместе с ростом Re_F) сказывается сильнее, чем увеличение интенсивности турбулентности (рис. 7.24, 7.25).

Указанные особенности важны для правильного выбора способов интенсификации теплоотдачи при конденсации. Для *вязких низкотеплопроводных* жидкостей, по-видимому, должно быть эффективным применение пристенной искусственной шероховатости, разрушающей вязкий подслой, где сосредоточено основное термическое сопротивление турбулентной пленки конденсата.

7.6. Сдвиговая турбулентная пленка конденсата

Уравнения движения и энергии

Уравнения для *турбулентной сдвиговой* пленки следуют из общих соотношений (7.18), (7.25) если положить равным нулю ускорение силы тяжести, $g = 0$:

$$\tau \equiv (\mu + \mu_T) \frac{du}{dy} = \text{const} = \tau_S; \quad (7.113)$$

$$u(y=0) = 0;$$

$$q \equiv (\lambda + \lambda_T) \frac{dt}{dy} = \text{const}; \quad (7.114)$$

$$t(y=0) = t_w; \quad t(y=\delta) = t_s.$$

Уравнение движения (7.113) описывает равномерное, безинерционное течение под действием *постоянного по толщине пленки* касательного напряжения. Сдвиговая пленка конденсата – это слой постоянного напряжения.

Уравнение энергии (7.114) определяет распределение температуры при постоянной плотности теплового потока по толщине пленки. Как было показано выше, теплота фазового перехода, выделяющаяся на поверхности раздела фаз, транзитом, через пленку конденсата, переносится к стенке под действием градиента температуры.

Коэффициенты переноса – вязкость и теплопроводность – содержат как молекулярную, так и турбулентную составляющие.

В безразмерном виде, после простых преобразований, уравнения движения и энергии переписываются следующим образом:

$$\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right) \frac{dU}{dY} = 1. \quad (7.115)$$

$$\left(\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{1}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_T}{\nu}\right) \left(\frac{1}{\frac{q}{\rho c_p u_\tau}}\right) \frac{dt}{dY} = 1. \quad (7.116)$$

Безразмерные переменные в этих уравнениях такие же, как и в рассмотренной выше задаче о турбулентной гравитационной пленке (7.88)–(7.91).

Модель турбулентного переноса

К уравнениям движения и энергии должны быть добавлены замыкающие соотношения для турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности.

В модели пути смешения Прандтля (рис. 7.27) турбулентная вязкость определяется произведением длины пути смешения на пульсационную скорость:

$$\nu_T \approx l_m u', \quad (7.117)$$

аналогично тому как в элементарной газокинетической теории молекулярная вязкость газа определяется произведением длины свободного пробега молекул на скорость теплового движения. При описании турбулентности вместо хаотического движения молекул говорят о перемещениях *турбулентных молей*, т.е. макроскопических материальных объемов.

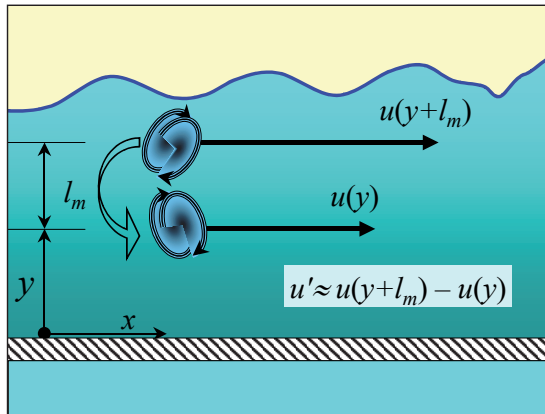


Рис. 7.27. Длина смешения и пульсации скорости

Пульсационную скорость можно оценить, моделируя турбулентное перемешивание так, как показано на рис. 7.27. Наблюдатель, находящийся на расстоянии y от стенки, фиксирует *пульсацию* скорости u' благодаря тому, что турбулентный моль, переместившийся сверху, приносит повышенное значение скорости с уровня $(y + l_m)$, где l_m – длина пути смешения, или длина свободного пробега турбулентного моля:

$$u' \approx u(y + l_m) - u(y) \approx \frac{\partial u}{\partial y} l_m. \quad (7.118)$$

Применяя формулу газокинетической аналогии (7.117), получают *формулу Прандтля* (7.119) для турбулентной вязкости:

$$\nu_T \approx l_m u' \approx l_m \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} l_m \right) = l_m^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.119)$$

или, в безразмерном виде:

$$\frac{v_T}{\nu} \approx L_m^2 \frac{\partial U}{\partial Y}; \quad L_m \equiv \frac{l_m u_\tau}{\nu}; \quad Y \equiv \frac{y u_\tau}{\nu}; \quad U \equiv \frac{u}{u_\tau}. \quad (7.120)$$

Формула Прандтля (7.120) связывает турбулентную вязкость с градиентом скорости и длиной смешения и, таким образом, является замыкающим соотношением к уравнению движения (7.115).

Рассматривая эти два уравнения как систему с двумя неизвестными – турбулентной вязкостью и градиентом скорости и исключая градиент скорости, получают алгебраическое уравнение для турбулентной вязкости в *слое постоянного напряжения*:

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{v_T}{\nu}\right) \frac{dU}{dY} = 1 \\ \frac{v_T}{\nu} \approx L_m^2 \frac{\partial U}{\partial Y} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_T}{\nu} \approx L_m^2 \frac{1}{1 + \frac{v_T}{\nu}} \Rightarrow \left(\frac{v_T}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{v_T}{\nu}\right) - L_m^2 = 0 \quad (7.121)$$

с решением:

$$\frac{v_T}{\nu} = \sqrt{\frac{1}{4} + L_m^2} - \frac{1}{2}. \quad (7.122)$$

Основное, что известно о длине пути смешения, можно кратко выразить в форме распределения Эскудиера (рис. 7.33). В пристенной области путь смешения l_m пропорционален расстоянию y от стенки,

$$l_m = (\kappa y); \quad \kappa \cong 0,435, \quad (7.123)$$

или, с *демпфирующей поправкой* для непосредственно прилегающих к твердой поверхности слоев жидкости,

$$l_m = (\kappa y) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{25,3} \frac{y u_\tau}{\nu}\right)\right). \quad (7.124)$$

В ядре турбулентного потока путь смешения пропорционален характерному поперечному размеру, т.е. толщине пленки:

$$l_m = c_L \delta; \quad c_L \cong 0,09. \quad (7.125)$$

Стыковка происходит на расстоянии от стенки, равном

$$\delta_W = \frac{c_L}{\kappa} \delta; \quad \delta_W \cong 0,207 \delta. \quad (7.126)$$

Таким образом, масштаб турбулентности растет в пределах примерно 20%-го пристенного слоя ($0 < y < \delta_W$), а затем, в ядре потока, остается постоянным, на уровне около 10% от толщины слоя.

Главный результат для модели турбулентности выражается

- формулой (7.122) связывающей в слое постоянного напряжения турбулентную вязкость и длину пути смешения (масштаб турбулентности),

- формулами (7.124), (7.125) для пути смешения.

Распределение скорости $U(Y)$ в пленке конденсата получается при интегрировании уравнения движения (7.114) с разделяющимися переменными, с учетом условия прилипания на стенке:

$$\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right) \frac{dU}{dY} = 1 \Rightarrow \int_0^U dU = \int_0^Y \frac{dY}{\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)}; \quad (7.127)$$

$$U = \int_0^Y \frac{dY}{\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu}\right)}.$$

Турбулентная вязкость ν_T/ν задается формулой (7.122), в которой длина смешения L_m как функция координаты Y определяется распределением Эскудиера (7.124), (7.125).

Подробности вычислений показаны на фрагменте Mathcad-программы (рис. 7.28) (напомним, что решение проводится для слоя постоянного напряжения).

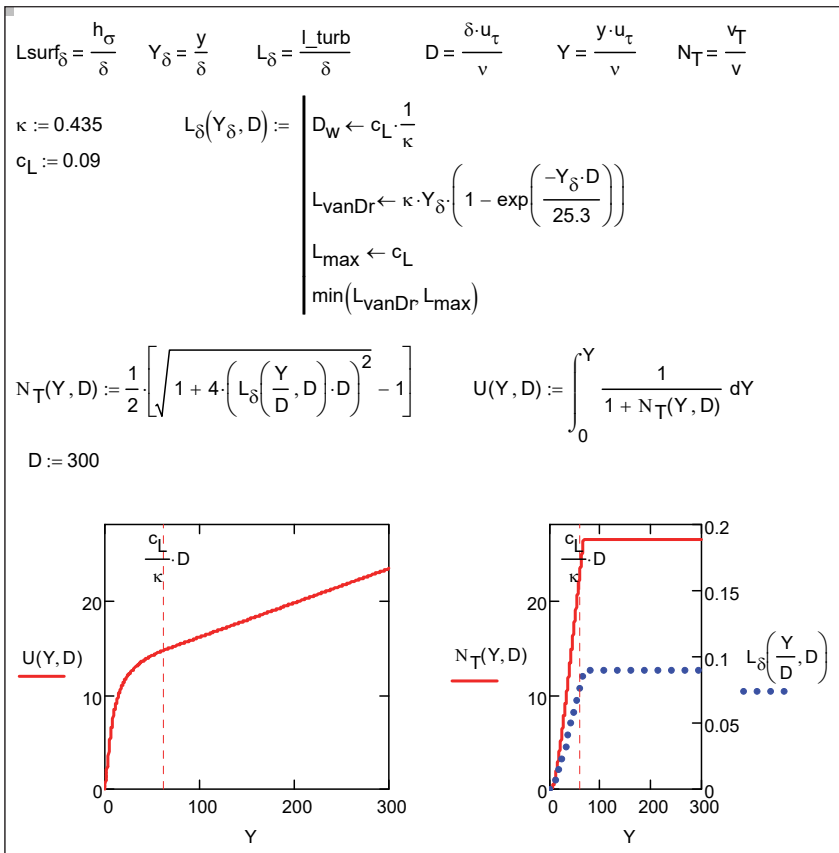


Рис. 7.28. Распределение скорости $U(Y, D)$, турбулентной вязкости N_T и масштаба турбулентности L_δ в слое постоянного напряжения

Замечание к формуле Прандтля (7.118) для пульсаций скорости. Следует обратить внимание на ограниченность, неуниверсальность формулы (7.118) для пульсаций скорости и, следовательно, формул (7.119), (7.120) для турбулентной вязкости. Очевидно, формула (7.118) непригодна для однородной изотропной турбулентности, примерно такой, как в течении за успокоительной решеткой в аэродинамической трубе. В таком потоке скорость постоянна, поэтому в соответствии с (7.118) должны отсутство-

вать турбулентные пульсации. В действительности измеренные пульсации весьма велики, хотя и затухают вниз по потоку. Эти соображения привели Л. Прандтля к созданию более совершенной модели, основанной на уравнении баланса турбулентной энергии (Том I \ гл. 2, п. 2.9).

Логарифмическое распределение скорости в слое постоянного напряжения

Рассмотрим специально область на *некотором* удалении от стенки, где

- турбулентная вязкость уже существенно преобладает над молекулярной, $\nu_T / \nu \gg 1$, и поэтому вместо (7.122) можно записать:

$$\frac{\nu_T}{\nu} \cong L_m \gg 1;$$

- масштаб турбулентности еще остается пропорциональным расстоянию от стенки в соответствии с формулой (7.123), т.е. мы остаемся в пределах примерно 20%-го пристенного слоя ($0 < y < \delta_w$, (7.126)), так что

$$l_m = (\kappa y); \Rightarrow L_m = \kappa Y; \quad \kappa \cong 0,435.$$

Уравнение движения в этой области упрощается следующим образом:

$$\frac{\nu_T}{\nu} \frac{dU}{dY} = 1 \Rightarrow \kappa Y \frac{dU}{dY} = 1 \Rightarrow dU = \frac{dY}{\kappa Y}.$$

Интегрирование приводит к *логарифмическому профилю* скорости:

$$U = \frac{1}{\kappa} \ln Y + A. \tag{7.128}$$

Константу интегрирования A нельзя непосредственно определить из граничного условия прилипания, поскольку (7.128) введено для области на некотором удалении от стенки. Вообще говоря, эту константу находят, сопоставляя (7.128) с экспериментально определенным профилем скорости при развитом турбу-

лентном течении. Мы моделируем эту операцию, согласуя (7.128) с точным (численным) решением (рис. 7.28) в подходящей точке Y_{lg} (эти вычисления показаны в первых двух строках Mathcad-программы на рис. 7.29).

Рассмотрим теперь область так называемого *вязкого подслоя* вблизи самой стенки, где турбулентность мала, $v_T/v \ll 1$. Уравнение движения запишется здесь совсем просто:

$$\left(1 + \frac{v_T}{\nu}\right) \frac{dU}{dY} = 1 \quad \xrightarrow{\frac{v_T}{\nu} \ll 1} \quad \frac{dU}{dY} = 1,$$

а интегрирование приведет к линейному профилю

$$U = Y,$$

для которого выполняется условие прилипания на стенке.

Теперь можно «склеить» решения на некотором расстоянии D_{vis} от стенки и записать *двуслойное* универсальное распределение скоростей (см. третью и четвертую строки Mathcad-программы на рис. 7.29), которое, ввиду его простоты удобно использовать для приближенного анализа. Сопоставление с полным решением для пленок разной толщины показано на рис. 7.30, 7.31. Пунктирными вертикальными линиями выделена область, где логарифмическое распределение удовлетворительно согласуется с полным решением. Видно, что для относительно тонких пленок эта область может быть очень узкой.

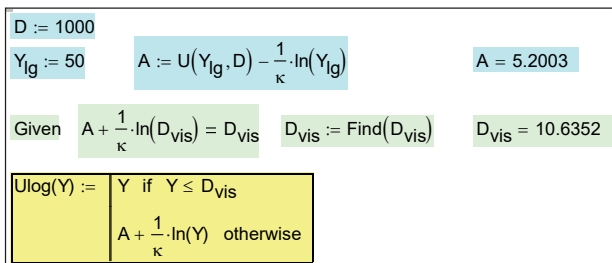


Рис. 7.29. Параметры двуслойного распределения скорости $Ulog(Y)$ в слое постоянного сдвига

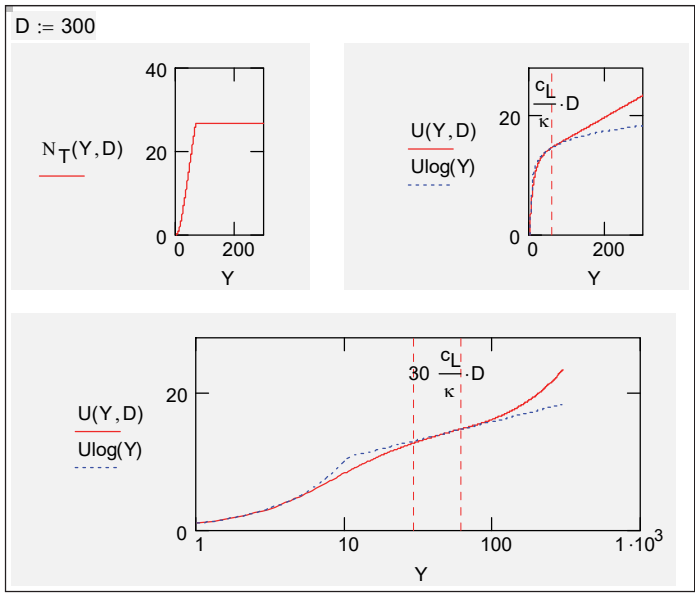


Рис. 7.30. Распределение скорости $U(Y, D)$ и логарифмическая область $Ulog(Y)$ для пленки толщиной $D = 300$

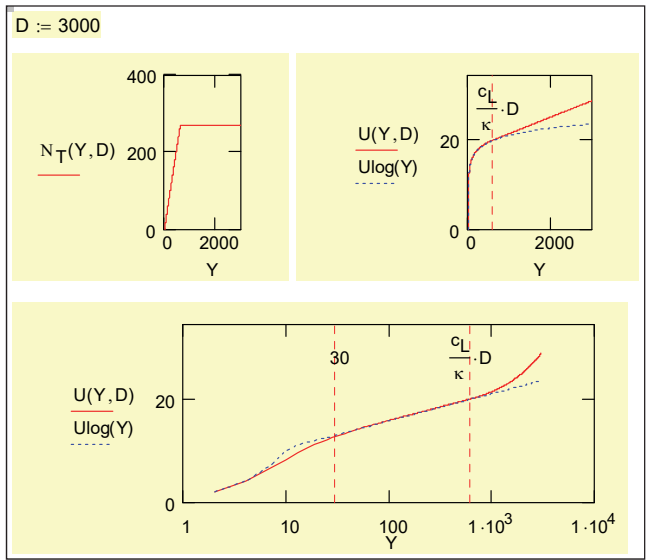


Рис. 7.31. Распределение скорости $U(Y, D)$ и логарифмическая область $Ulog(Y)$ для пленки толщиной $D = 3000$

Существование области логарифмического распределения $U \log(Y)$ скорости отчетливо видно на графиках (рис. 7.31) для пленки с развитым турбулентным режимом течения. Наличие такого профиля надежно подтверждается и в эксперименте. Это один из фундаментальных фактов теории турбулентности. Для пограничных слоев и течений в каналах следует добавлять к формулировкам ограничение: в слое, где напряжение трения сохраняется примерно постоянным, равным напряжению на стенке, или, как говорят, в слое постоянного напряжения. Для сдвиговой пленки конденсата это ограничение автоматически удовлетворяется самой постановкой задачи.

Двухслойная аппроксимация «вязкий подслой + логарифмический профиль» может быть заменена более гладкой трехслойной моделью с так называемым буферным слоем.

В наших расчетах турбулентных пленок нет необходимости в таких аппроксимациях, поскольку мы применяем полную формулировку (7.127) и рис. 7.28 и находим профиль скорости численным интегрированием уравнения движения. Главной целью в данном параграфе было показать, что Прандтлевская модель турбулентности приводит к такой структуре турбулентного течения (к наличию логарифмической области), которая действительно наблюдается в экспериментах. В силу своей наглядности, Прандтлевская модель служит основой для понимания феномена турбулентного переноса. При дальнейших расчетах теплообмена и трения в турбулентных пленках применяется полная формулировка (7.127), рис. 7.28, модифицированная с целью учесть особенности *межфазной турбулентности*.

Межфазная турбулентность

Важной особенностью пленочных течений является наличие особой границы потока – поверхности раздела фаз ($y = \delta$). По аналогии с пристенной областью примем, что существует также приграничная область толщиной примерно δ_W , ($\delta - \delta_W < y < \delta$), в которой масштаб турбулентности изменяется от некоторого, неизвестного пока, значения на поверхности раздела фаз l_{mS} до максимального значения в ядре потока, определяемого уравнением (7.125). Турбулентность вблизи межфазной поверхности проявляется в форме хаотических волновых возмущений, амплитуда ко-

торых зависит от соотношения турбулентной и поверхностной (связанной с поверхностным натяжением) энергий.

Если поверхностное натяжение очень велико, то *поперечные* (т.е. вдоль координаты y) смещения оказываются невозможными, как и для твердой стенки, и длина пути смещения на межфазной границе должна обращаться в ноль. Однако, в отличие от случая твердой стенки, не существует ограничений на *продольные* турбулентные пульсации. Если поверхностное натяжение мало, то межфазная поверхность не ограничивает турбулентных пульсаций.

Оценка $l_{m,S}$ может быть получена из следующих физических соображений. Вблизи поверхности раздела существует пульсационное поле давления P_T , связанное с турбулентной энергией E :

$$P_T = \frac{2}{3} \rho E \approx C_S \tau_{\text{Turb},S} \approx C_S \tau_s, \quad (7.129)$$

где C_S – модельная константа порядка единицы, $\tau_{\text{Turb},S}$ – турбулентное напряжение трения на межфазной границе, или просто напряжение трения на границе при *развитом* турбулентном режиме течения пленки. Турбулентное давление должно уравниваться капиллярным давлением P_σ , возникающим при искривлении межфазной поверхности:

$$P_\sigma = \sigma \left\{ \frac{l_{m,S}}{(c_L \delta)^2} \right\}, \quad (7.130)$$

где множитель в фигурных скобках дает оценку кривизны волновых выступов (рис. 7.32).

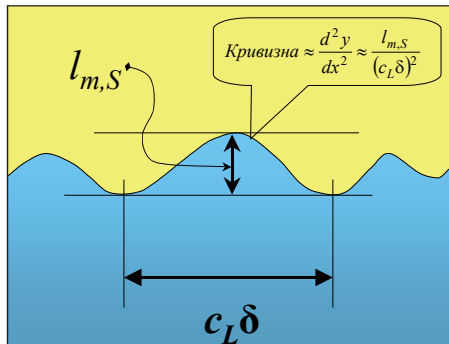


Рис. 7.32. Волновые возмущения на поверхности

Из условия равновесия $P_\sigma = P_T$

$$\sigma \left\{ \frac{l_{mS}}{(c_L \delta)^2} \right\} \approx C_S \tau_S \quad (7.131)$$

получаем выражение для безразмерного (отнесенного к толщине пленки) пути смешения на межфазной поверхности:

$$L_{mS,\delta} \equiv \frac{l_{mS}}{\delta} \approx (C_S c_L^2) \cdot We_\delta. \quad (7.132)$$

Число Вебера

$$We_\delta \equiv \frac{\rho u_\tau^2}{(\sigma/\delta)} \equiv \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right) \left(\frac{\rho \nu u_\tau}{\sigma} \right) \equiv D \cdot K_\sigma \quad (7.133)$$

задает соотношение между турбулентным и лапласовским давлением. Напомним, что величина D есть безразмерная толщина пленки, для которой ниже будет получено выражение через число Рейнольдса. Представление (7.133) полезно, поскольку безразмерный комплекс K_σ составлен из заданных величин и может рассматриваться как определяющий безразмерный параметр задачи.

Величина $L_{mS,\delta}$ ($Lsurf_\delta$ в тексте Mathcad-программ) изменяется в пределах $0 \div c_L$, т.е. $0 \div 0.09$. Если число Вебера достаточно велико и, согласно (7.132), $L_{mS,\delta}$ превысит предельное значение c_L , то следует положить алгоритмически $L_{mS,\delta} = c_L$. Таким образом, у межфазной границы также вводится специальная демпфирующая поправка для длины пути смешения в распределении Эскудиера (рис. 7.33, 7.34).

Хотя формула (7.132) и программа (рис. 7.33) полностью задают способ расчета $L_{mS,\delta}$ как внутреннего параметра задачи через значения заданных внешних параметров, с целью большей наглядности мы будем использовать эту величину ($Lsurf_\delta$ в тексте Mathcad-программ) непосредственно как характеристику турбулентных возмущений на поверхности раздела фаз.

Мы располагаем теперь достаточной информацией для расчета турбулентного коэффициента переноса:

- формулой (7.122) для турбулентной вязкости как функции длины пути смешения и
- распределением Эскудиера для пути смешения как функции от координаты (рис. 7.33, 7.34), с актуальными поправками вблизи стенки и вблизи поверхности раздела.

$$\kappa := 0.435 \quad c_L := 0.09$$

$$L_\delta(Y_\delta, D, L_{surf_\delta}) := \begin{cases} D_w \leftarrow c_L \cdot \frac{1}{\kappa} \\ L_{vanDr} \leftarrow \kappa \cdot Y_\delta \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-Y_\delta \cdot D}{25.3}\right) \right) \\ L_{max} \leftarrow c_L \\ L_\sigma \leftarrow L_{surf_\delta} + (c_L - L_{surf_\delta}) \cdot \frac{(1 - Y_\delta)}{D_w} \quad \text{if } L_{surf_\delta} < c_L \\ L_\sigma \leftarrow c_L \quad \text{otherwise} \\ \min(L_{vanDr}, L_{max}, L_\sigma) \end{cases}$$

Рис. 7.33. Mathcad-программа для распределения Эскудиера с учетом демпфирующих поправок у стенки и межфазной границы (Y_δ – координата в масштабе толщины пленки, – безразмерная толщина пленки по (7.91) L_{surf_δ} – длина пути смещения на поверхности в масштабе толщины пленки)

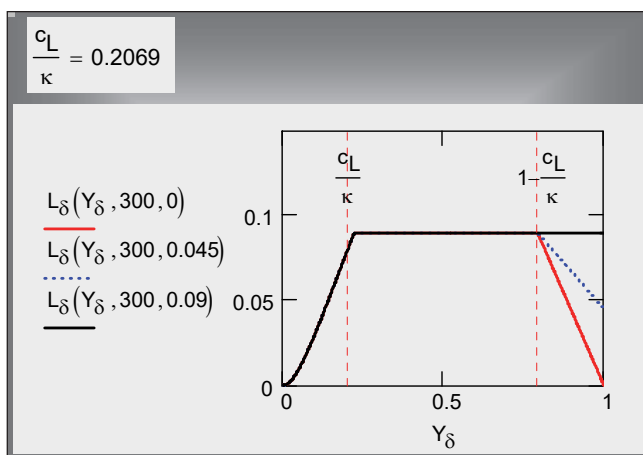


Рис. 7.34. Распределение Эскудиера с демпфирующими поправками

Следует отметить, что межфазная турбулентность на границе раздела жидкость–пар остается до настоящего времени существенной научной проблемой. Рассмотренная выше модель сгла-

живания поверхностным натяжением не является исчерпывающей, поскольку твердая поверхность и поверхность с большим поверхностным натяжением не идентичны: в первом случае запрещено всякое движение жидкости на границе, во втором – нулевыми должны быть нормальные составляющие скорости, но не обязательно касательные.

Распределение скорости и расход в пленке

Распределение скорости $U(Y)$ в пленке конденсата получается при интегрировании уравнения движения (7.115) с использованием формулы (7.122) для относительной турбулентной вязкости N_T , $N_T \equiv \nu_T / \nu$ (рис. 7.35).

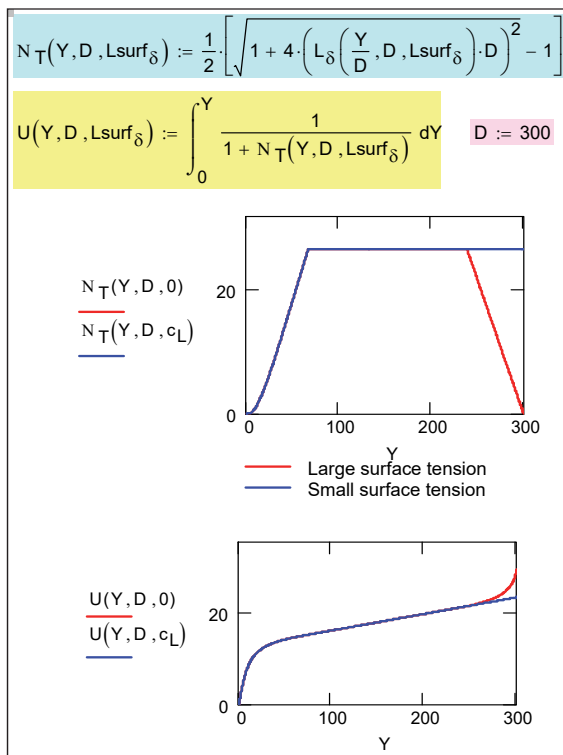


Рис. 7.35. Распределение скорости для жидкостей с большим и малым поверхностным натяжением ($Lsurf_\delta$ – длина пути смешения на поверхности в масштабе толщины пленки)

Далее рассчитывается число Рейнольдса пленки (рис. 7.36) в соответствии с определениями (7.31), как расход конденсата через поперечное сечение пленки:

$$\text{Re}_F \equiv \frac{u_m \delta}{\nu_{lq}} \equiv \frac{G}{\rho_{lq} \nu_{lq}}; \text{Re}_F = \int_0^D U dY$$

и дается графическое представление получающейся функциональной связи между числом Рейнольдса и толщиной пленки (рис. 7.37).

Расчеты показывают, что влияние поверхностного натяжения (через масштаб турбулентности $L_{surf\delta}$ на межфазной границе) на расходные характеристики пленки оказывается незначительным (см. табл. Re_F на рис. 7.36 с колонками, соответствующими различным значениям параметра $L_{surf\delta}$). Влияние этого параметра на теплоотдачу см. далее на рис. 7.40.

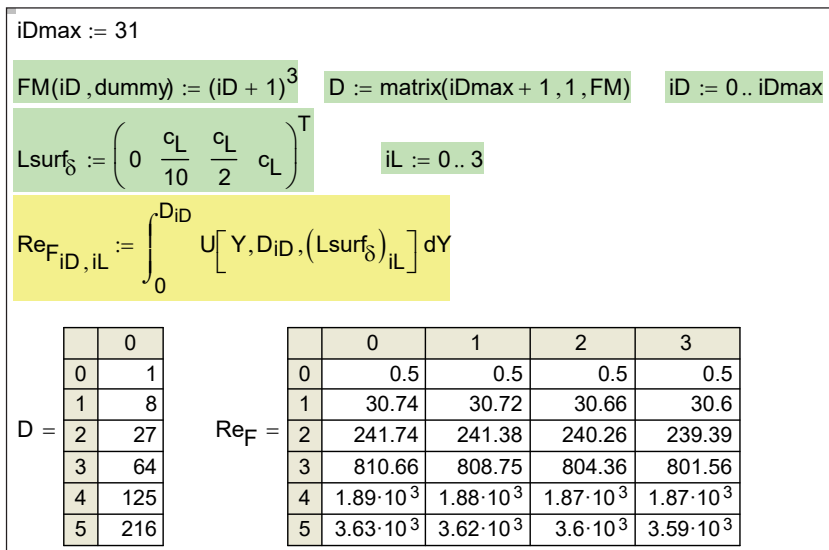


Рис. 7.36. Соотношение между толщиной сдвиговой пленки и числом Рейнольдса пленки (iD, iL – индексы в таблицах, идентифицирующие значения толщины пленки D и масштаба турбулентности на поверхности раздела $L_{surf\delta}$)

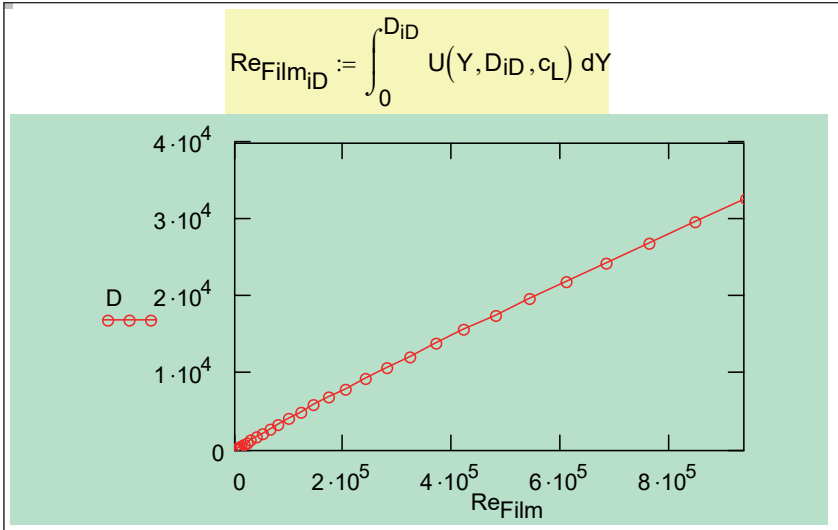


Рис. 7.37. Зависимость толщины сдвиговой пленки от числа Рейнольдса пленки

Распределение температуры

Распределение температуры по толщине пленки конденсата получается при численном интегрировании уравнения энергии (7.116) с использованием формулы (7.122) (рис. 7.35) для относительной турбулентной вязкости N_T , $N_T \equiv \nu_T / \nu$:

$$T(Y) \equiv \frac{t(y) - t_w}{\left(\frac{q}{\rho c_p \mu_\tau} \right)} = \int_0^Y \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{\nu_T}{\nu}}. \quad (7.134)$$

Графики зависимости $T(Y)$ при различных значениях параметров (числа Прандтля Pr и масштаба турбулентности на межфазной границе L_{surf}) представлены на рис. 7.38.

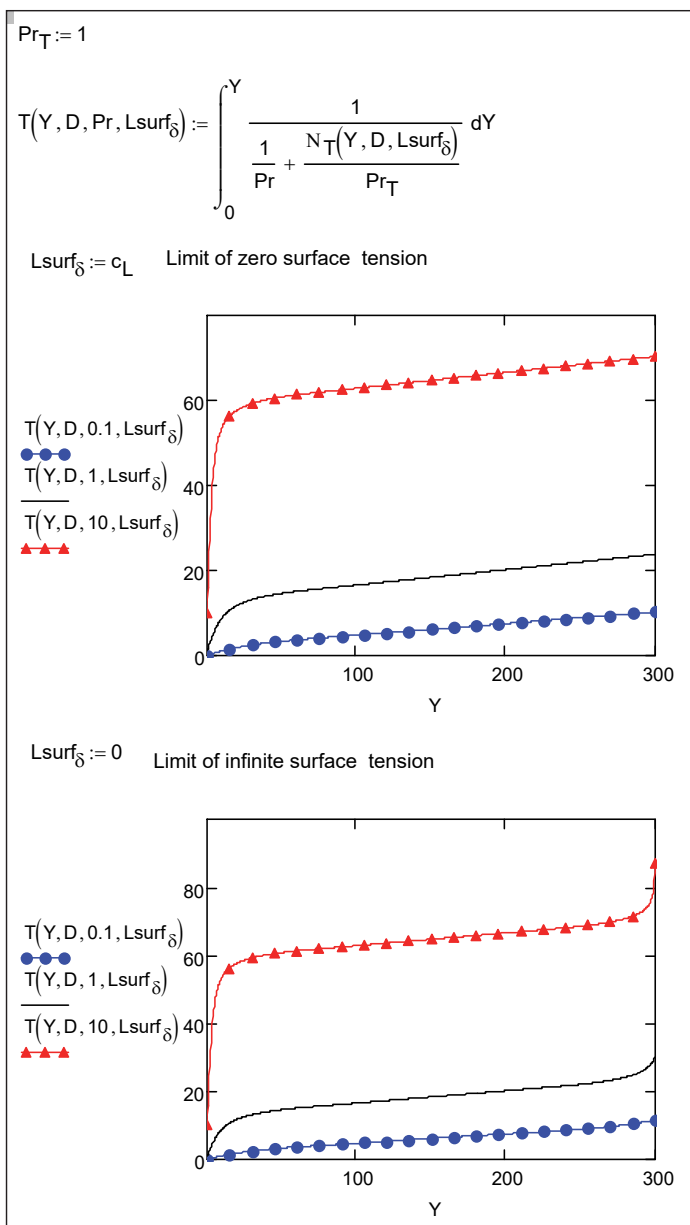


Рис. 7.38. Распределение температуры в сдвиговой турбулентной пленке толщиной $D = 300$ ($Lsurf_\delta$ – длина пути смешения на поверхности в масштабе толщины пленки; $Lsurf_\delta = 0$ – большое поверхностное натяжение, $Lsurf_\delta = c_L = 0,09$ – нулевое поверхностное натяжение)

Для теплоносителей с $Pr \geq 1$ наблюдается резкое повышение температуры в вязком слое вблизи стенки и затем относительно слабый рост в области сильно перемешиваемого турбулентного ядра пленки. На поверхности пленки коэффициент турбулентного переноса может снижаться из-за сглаживающего эффекта поверхностного натяжения, в результате чего температура вновь резко изменяется (см. нижнюю диаграмму на рис. 7.38).

Для теплоносителей с $Pr \ll 1$ демпфирование на поверхностях раздела становится незаметным, благодаря большой молекулярной теплопроводности, соизмеримой с турбулентным коэффициентом переноса (см. нижние кривые на обеих диаграммах рис. 7.38).

Непосредственно из сопоставления формул (7.134) и (7.127) следует аналогия распределений температуры и скорости в сдвиговой пленке. В частности, имеется область *логарифмического распределения* температуры, как показано на рис. 7.39.

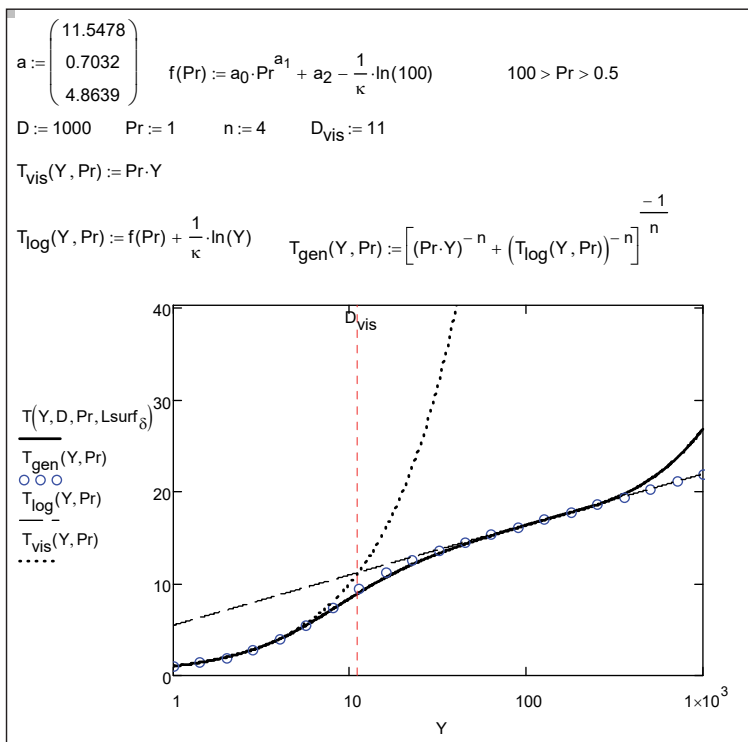


Рис. 7.39. Логарифмический профиль температуры в турбулентной пленке

Используя метод интерполяции между асимптотами, можно построить универсальные распределения скорости и температуры в пристенной области для течения в слое постоянного напряжения ($\tau = \text{const}$):

$$n = 4;$$

$$U_{gen}(Y) = \left[Y^{-n} + \left(\frac{1}{\kappa} \ln Y + A \right)^{-n} \right]^{-\frac{1}{n}}; \quad A \cong 5,35; \quad \kappa \cong 0,42;$$

$$T_{gen}(Y, \text{Pr}) = \left[(\text{Pr} \cdot Y)^{-n} + \left(\frac{1}{\kappa} \ln Y + f(\text{Pr}) \right)^{-n} \right]^{-\frac{1}{n}};$$

$$0,5 < \text{Pr} < 100: \quad f(\text{Pr}) \cong 11,54 \cdot \text{Pr}^{0,7034} + 4,6603 - \frac{1}{\kappa} \ln(100).$$

Эти формулы находят применения также за рамками собственно теории пленочной конденсации, поскольку они описывают гидродинамику и теплообмен в так называемом *слое постоянного напряжения* (и постоянного теплового потока). При численном анализе сложных однофазных течений их используют в качестве так называемых *универсальных пристенных функций* (*universal wall functions*). Более подробное обсуждение этого вопроса следует искать в специальной литературе.

Расчет локальной теплоотдачи

Уравнение энергии (7.116) интегрируют в полных пределах по толщине пленки и получают соотношение для локальной теплоотдачи:

$$\frac{\alpha}{\rho c_p u_\tau} = \frac{1}{\int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{1}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_T}{\nu}}}, \quad (7.135)$$

которое после простых тождественных преобразований записывается в виде:

$$\frac{\alpha l_g}{\lambda} = \frac{1}{\int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{\text{Pr}} + \frac{1}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_T}{\nu}}} \frac{u_\tau l_g}{\nu} \text{Pr}; \quad (7.136)$$

ИЛИ

$$K \equiv \frac{Nu_{l_g}}{l_g \sqrt{\frac{\tau_S}{\rho}}} \equiv \frac{Nu_{l_g}}{SSF} = \frac{Pr}{\int_0^D \frac{dY}{\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_T} \frac{\nu_T}{\nu}}} \quad (7.137)$$

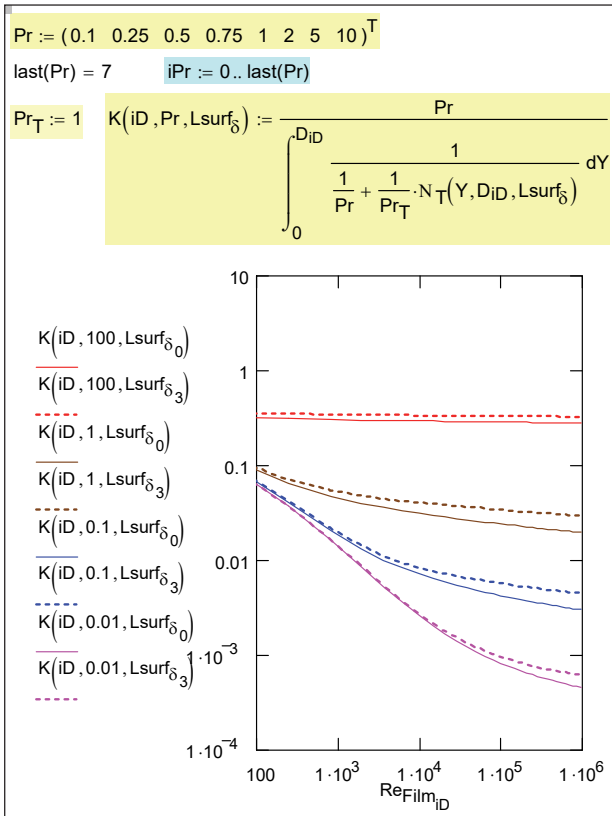


Рис. 7.40. Влияние поверхностного натяжения на теплоперенос в пленке ($Lsurf_{\delta}$ – длина пути смешения на поверхности в масштабе толщины пленки; $Lsurf_{\delta 0} = 0$ – высокое поверхностное натяжение, $Lsurf_{\delta 3} = c_L = 0,09$ – нулевое поверхностное натяжение)

Результаты расчетов по (7.137) показаны на рис. 7.40 в форме зависимости критерия теплоотдачи $K(Re_{Film}, Pr, Lsurf_{\delta})$ от числа Рейнольдса пленки. Индекс iD идентифицирует на графике соответствующие друг другу значения переменных K и Re_{Film} при табличном представлении результатов расчетов. В качестве параметров

на диаграмме выступает число Прандтля в широком диапазоне – от 0,01 до 100 (четыре пары кривых, отмеченные одинаковым цветом), а также относительная «шероховатость» турбулентной пленки $L_{surf\delta}$ (сплошные и штриховые кривые, соответственно для гладкой поверхности при большом поверхностном натяжении и для возмущенной поверхности раздела при нулевом поверхностном натяжении). Далее на рис. 7.41 приведено сопоставление с соотношением (7.83) для ламинарной сдвиговой пленки как очевидным пределом вычислений при малых числах Рейнольдса, а также с известной из литературы формулой VDI, полученной по другой расчетной модели.

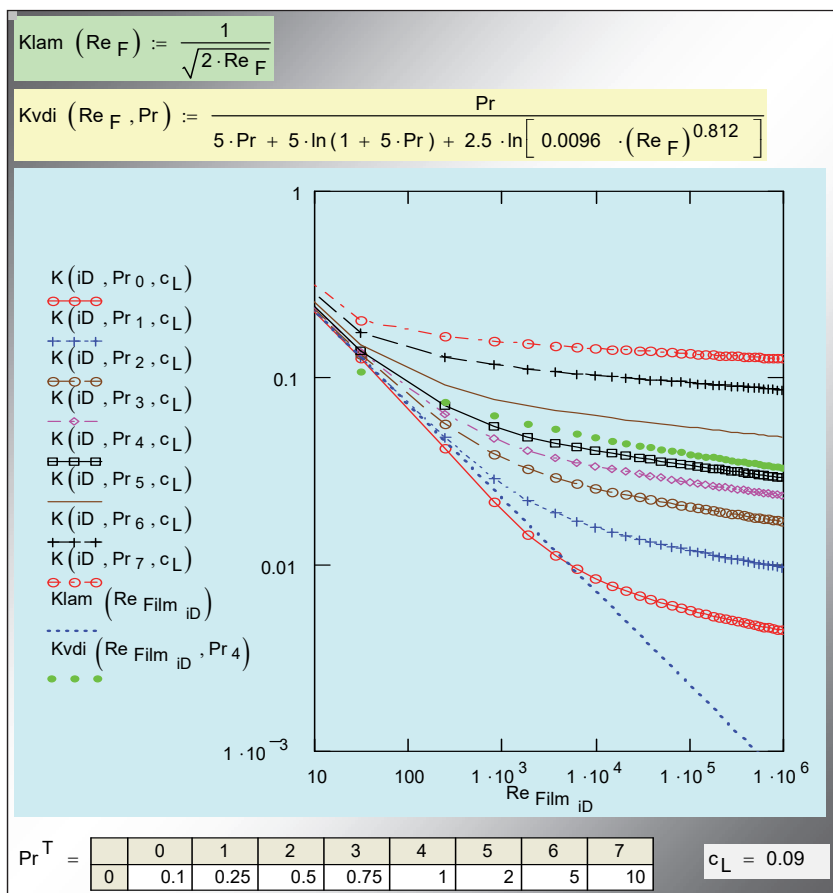


Рис. 7.41. Локальная теплоотдача в широком диапазоне чисел Рейнольдса

По существу, теоретические расчеты завершаются итоговыми диаграммами на рис. 7.40, 7.41. Однако для практических применений должна быть проведена дополнительная работа по получению компактных и удобных расчетных аппроксимаций (см. следующий пункт).

Аппроксимации для развитого турбулентного режима

Последующие вычисления (рис. 7.42–7.45) имеют целью представить табличные расчетные данные (рис. 7.42) в форме аппроксимации:

$$K(\text{Re}_F, \text{Pr}) \equiv \frac{\text{Nu}_{TS}}{\text{SSF}} = a(\text{Pr}) \text{Re}_F^{b(\text{Pr})}.$$

Они представляют полезный факультативный материал для ознакомления с техникой расчетов в инженерном пакете Mathcad.

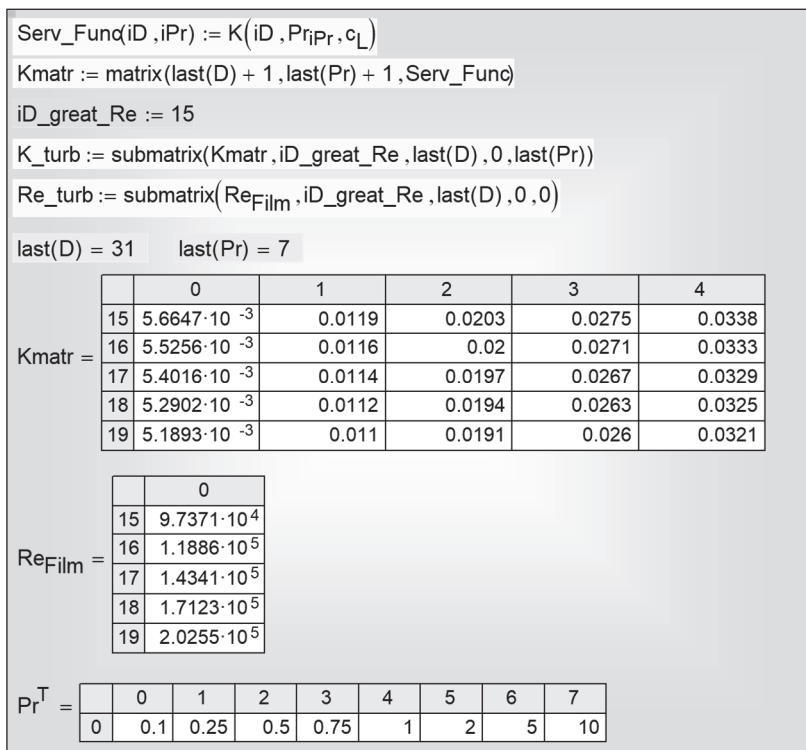


Рис. 7.42. Исходные таблицы расчетных данных для больших чисел Рейнольдса, полученные по (7.137)

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

$$s_{iPr} := \text{linfit}(\ln(\text{Re_turb}), \ln(K_{\text{turb}}^{iPr}), F)$$

$Pr^T =$	0	1	2	3	4	5	6	7	
	0	0.1	0.25	0.5	0.75	1	2	5	10

$$s = \begin{pmatrix} \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \\ \{2,1\} \end{pmatrix} \rightarrow s_0 = \begin{pmatrix} -3.9413 \\ -0.1078 \end{pmatrix} \quad Pr_0 = 0.1 \quad \ln(K) = (s_0)_0 + (s_0)_1 \cdot \ln(\text{Re})^{\square}$$

$$\rightarrow s_7 = \begin{pmatrix} -1.6927 \\ -0.0274 \end{pmatrix} \quad Pr_7 = 10 \quad \ln(K) = (s_7)_0 + (s_7)_1 \cdot \ln(\text{Re})^{\square}$$

$$a_{iPr} := \exp[(s_{iPr})_0] \quad b_{iPr} := (s_{iPr})_1 \rightarrow K = a \cdot \text{Re}^b$$

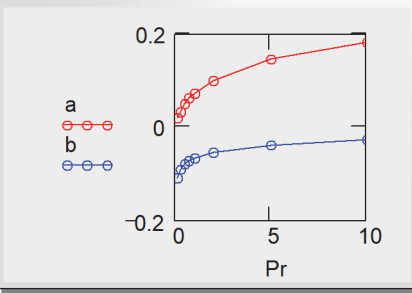


Рис. 7.43. Аппроксимация зависимости $K(Re)$ методом линейной регрессии

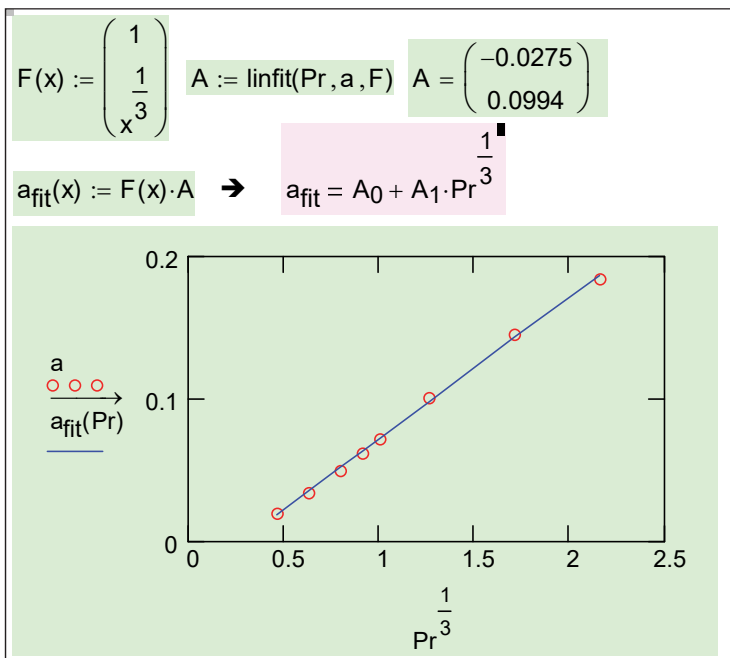


Рис. 7.44. Аппроксимация зависимости коэффициента регрессии от числа Прандтля $a_{\text{fit}}(\text{Pr}) = -0,0275 + 0,0994\text{Pr}^{1/3}$

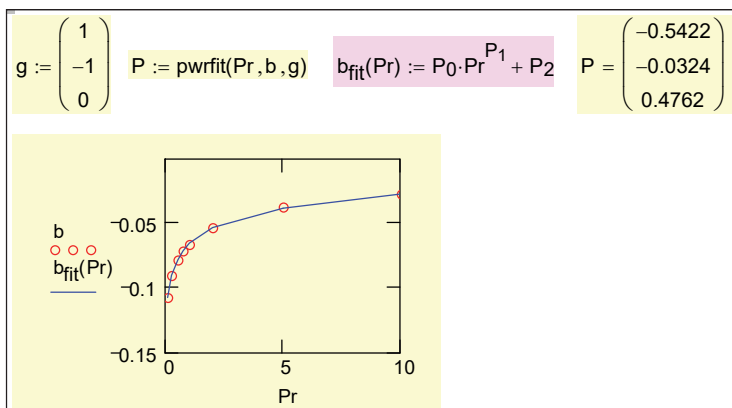


Рис. 7.45. Аппроксимация зависимости коэффициента регрессии от числа Прандтля $b_{\text{fit}}(\text{Pr}) = -0,542 \text{Pr}^{-0,0324} + 0,4762$

Интерполяционное соотношение для теплоотдачи сдвиговой пленки

Далее (рис. 7.46) сопоставлены

- полученная аппроксимация для развитого турбулентного режима (K_{turb} , серия прямых с малым наклоном с числом Pr как параметром),
- предельное выражение для сдвиговой пленки конденсата при ламинарном режиме (K_{lam} , прямая линия с большим наклоном),
- результаты прямых вычислений теплоотдачи в предыдущем пункте (K , рис. 7.41).

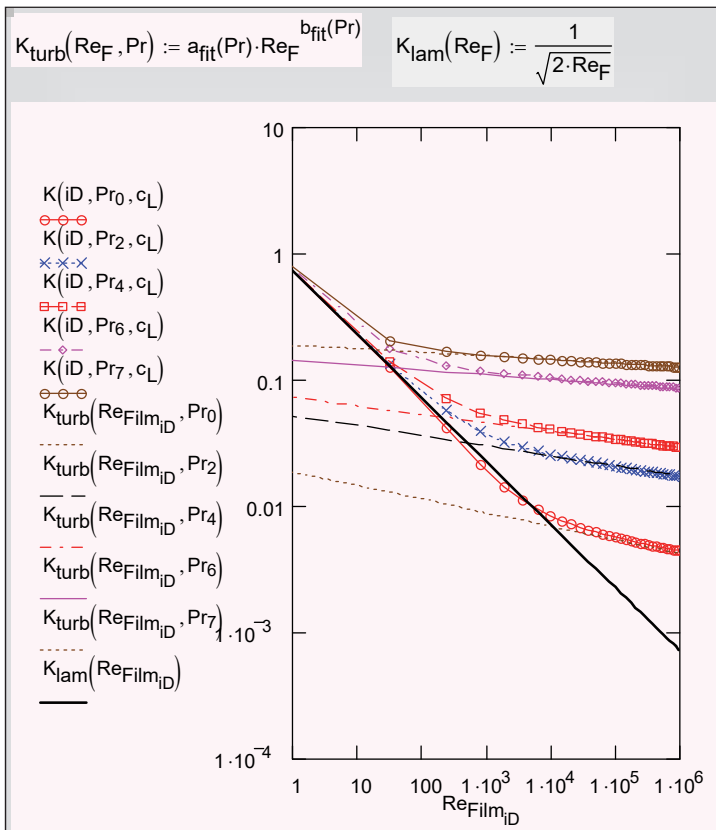


Рис. 7.46. Асимптоты ламинарного и турбулентного режимов

На рисунке 7.47 показан приближенный способ универсального описания теплоотдачи сдвиговой пленки в широком интервале чисел Рейнольдса, включающем ламинарный и турбулентный режим. Последовательное изложение метода интерполяции между асимптотами см. в следующем пункте.

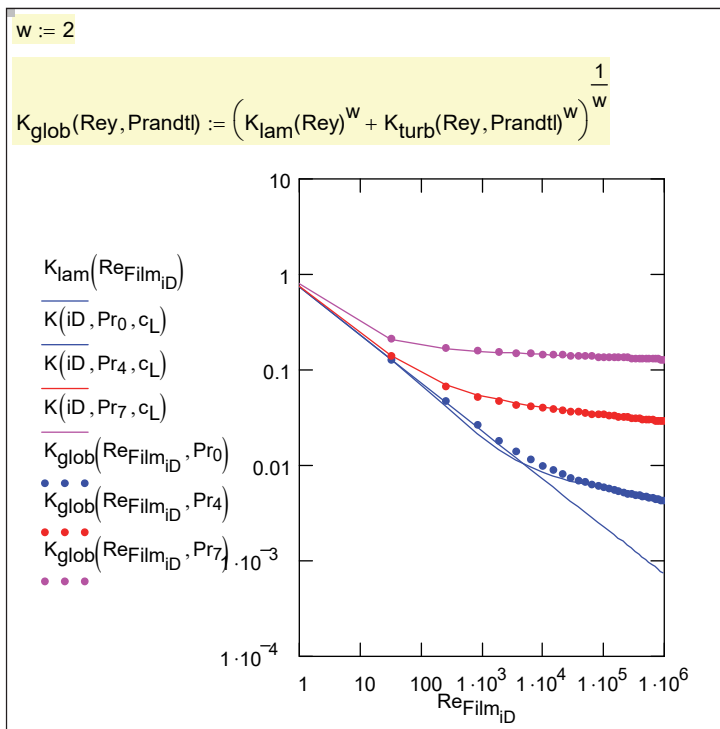


Рис. 7.47. Интерполяция между асимптотами ламинарного и турбулентного режима для сдвиговой пленки

7.7. Универсальная аппроксимация для расчета локальной теплоотдачи при конденсации

Полученные выше соотношения

- для ламинарной гравитационной (сокращенно *LG*, формулы (7.36), (7.39))
- и ламинарной сдвиговой (сокращенно *LS*, формула (7.83)) пленок конденсата можно рассматривать как предельные (асимптотические) случаи некоторой общей ситуации, когда движение

пленки происходит под действием обеих актуальных сил – и гравитации и трения на поверхности.

Для *турбулентного* режима аналогичными асимптотическими пределами являются:

• *турбулентная гравитационная пленка* (сокращенно *TG*, формула Д.А. Лабунцова (7.112)):

$$\text{Nu}_{TG} \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = 0,023(4 \text{Re}_F)^{0,25} \text{Pr}^{0,5}; \quad (7.138)$$

• *турбулентная сдвиговая пленка* (сокращенно *TS*, см. вычисления в Mathcad–программах на рис. 7.42–7.45):

$$\text{Nu}_{TS} \equiv \frac{\alpha l_g}{\lambda} = a(\text{Pr}) \text{Re}_F^{b(\text{Pr})} \text{SSF}. \quad (7.139)$$

Теория перечисленных предельных процессов хорошо разработана и подтверждена большим количеством экспериментальных данных, хотя ряд вопросов по-прежнему остается в поле внимания исследователей (теплообмен в области переходного режима течения пленки, расчет турбулентного переноса на поверхности раздела фаз, образование крупных одиночных волн типа солитонов и ряд других).

Задача состоит в том, чтобы на уровне логического анализа подобрать такую глобальную аппроксимацию,

$$\text{Nu}_{lg}(\text{Re}_F, \text{Pr}, \text{SSF}), \quad (7.140)$$

которая обеспечивала бы правильные асимптотические переходы:

$$\text{Re}_F \ll \text{Re}_{F cr}; \quad \text{SSF} \ll 1 \Rightarrow \quad \text{Nu} \rightarrow \text{Nu}_{LG};$$

$$\text{Re}_F \gg \text{Re}_{F cr}; \quad \text{SSF} \ll 1 \Rightarrow \quad \text{Nu} \rightarrow \text{Nu}_{TG};$$

$$\text{Re}_F \ll \text{Re}_{F cr}; \quad \text{SSF} \gg 1 \Rightarrow \quad \text{Nu} \rightarrow \text{Nu}_{LS};$$

$$\text{Re}_F \gg \text{Re}_{F cr}; \quad \text{SSF} \gg 1 \Rightarrow \quad \text{Nu} \rightarrow \text{Nu}_{TS}$$

и давала разумные результаты в промежуточной ситуации, т.е. при соизмеримом воздействии обоих факторов.

Интерполяционные соотношения, удовлетворяющие указанным выше предельным переходам, можно построить в единой форме:

$$\text{Nu}_{\text{Glob}} = \left(\text{Nu}_{\text{Limit1}}^n + \text{Nu}_{\text{Limit2}}^n \right)^{1/n}. \quad (7.141)$$

Значение показателя степени n подбирается так, чтобы получить наилучшее согласование с экспериментальными и теоретическими данными в промежуточной области. В литературе рекомендуются значения $n = 4$ для ламинарно-турбулентного перехода и $n = 2$ для области, промежуточной между гравитационным и вынужденно-конвективным пределами. Как показывает опыт, этим простым способом можно получить эффективные аппроксимации для очень сложных задач.

$\text{Nu}_{\text{shear}}(\text{Re}_F, \text{Pr}, \text{SSF}) :=$	<p>"Laminar:"</p> $\text{Nu}_{\text{LS}} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \text{Re}_F}} \cdot \text{SSF}$ <p>"Turbulent:"</p> $\left[\begin{array}{l} B \leftarrow \begin{pmatrix} -0.5422 \\ -0.0324 \\ 0.4762 \end{pmatrix} \quad A \leftarrow \begin{pmatrix} -0.0275 \\ 0.0994 \end{pmatrix} \end{array} \right]$ $a \leftarrow A_0 + A_1 \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$ $b \leftarrow B_0 \cdot \text{Pr}^{B_1} + B_2$ $\text{Nu}_{\text{TS}} \leftarrow a \cdot \text{Re}_F^b \cdot \text{SSF}$ <p>"Interpolation:"</p> $n \leftarrow 4$ $\left(\text{Nu}_{\text{LS}}^n + \text{Nu}_{\text{TS}}^n \right)^{\frac{1}{n}}$
$\text{Nu}_{\text{grav}}(\text{Re}_F, \text{Pr}) :=$	<p>"Laminar:"</p> $\text{Nu}_{\text{LG}} \leftarrow (3 \cdot \text{Re}_F)^{-\frac{1}{3}} \cdot \text{Re}_F^{0.04}$ <p>"Turbulent:"</p> $\text{Nu}_{\text{TG}} \leftarrow 0.023 \cdot (4 \cdot \text{Re}_F)^{0.25} \cdot \text{Pr}^{0.5}$ <p>"Interpolation:"</p> $n \leftarrow 4$ $\left(\text{Nu}_{\text{LG}}^n + \text{Nu}_{\text{TG}}^n \right)^{\frac{1}{n}}$

Рис. 7.48. Интерполяционные соотношения для гравитационной и сдвиговой пленки

Итак, мы используем для глобального описания теплоотдачи при конденсации чистого пара следующие аппроксимации:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_{\text{grav}} &= \left(\text{Nu}_{\text{LG}}^4 + \text{Nu}_{\text{TG}}^4 \right)^{1/4}; \\ \text{Nu}_{\text{shear}} &= \left(\text{Nu}_{\text{LS}}^4 + \text{Nu}_{\text{TS}}^4 \right)^{1/4}; \end{aligned} \quad (7.142)$$

$$\text{Nu}_{\text{lg}}(\text{Re}_F, \text{Pr}, \text{SSF}) = \text{Nu}_{\text{Glob}} = \left(\text{Nu}_{\text{grav}}^2 + \text{Nu}_{\text{shear}}^2 \right)^{1/2}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что все предельные переходы совершаются правильно.

Mathcad-программы глобальной аппроксимации и графическое представление результатов даны на рис. 7.48, 7.49.

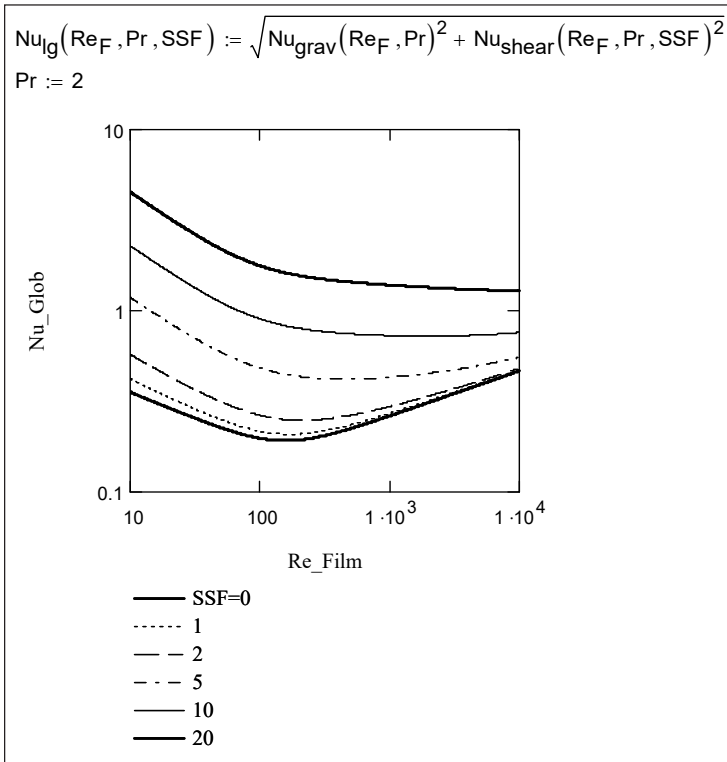


Рис. 7.49. Глобальная аппроксимация для конденсации движущегося пара

Серия графиков (рис. 7.49) имеет в качестве параметра безразмерное напряжение трения SSF на поверхности раздела фаз. Нижняя кривая соответствует конденсации неподвижного пара. Верхняя кривая соответствует пределу конденсации быстро движущегося пара, когда гравитационные эффекты становятся несущественными. Число Прандтля в этих расчетах принято равным 2, примерно как для воды при температуре 100°C .

Отметим, что интерполяция вида (7.142) между пределами гравитационной и сдвиговой пленки пригодна для *однонаправленного* действия гравитации и сдвига.

Проблемы, возникающие при противоположном действии гравитации и сдвига обсуждаются ниже в пункте 7.10 «Аппроксимации для толщины пленки».

7.8. Воздухоохлаждаемый конденсатор

В рассмотренном ранее простом вычислительном примере (рис. 7.11, 7.12) плотность теплового потока предполагалась заданной и постоянной величиной.

На практике, при расчете конденсационных аппаратов, распределение теплового потока заранее неизвестно, а указывается способ охлаждения.

В следующем примере мы рассмотрим *воздухоохлаждаемый конденсатор* – установку, в которой теплоъем осуществляется непосредственно атмосферным воздухом (рис. 7.50). Для интенсификации теплоотдачи на воздушной стороне применяют вентиляторы и развитое оребрение.

В связи с увеличивающимся дефицитом водных ресурсов, такой класс конденсационных устройств рассматривается как перспективная альтернатива традиционной схеме с водяным охлаждением.

Зададим условия охлаждения конденсатора двумя параметрами: температурой атмосферного воздуха t_{air} и эффективным коэффициентом теплоотдачи α_{air} . Заданными будут также давление

в конденсаторе, высота поверхности $Height$, термическое сопротивление стенки R_{wall} . Теплофизические свойства теплоносителей рассчитывает специальная программа, не показанная на иллюстрациях. Мы не будем вдаваться в детали компоновки устройства и примем, что конденсация происходит на вертикальной поверхности в условиях *гравитационного* течения, когда динамическим воздействием пара можно пренебречь.

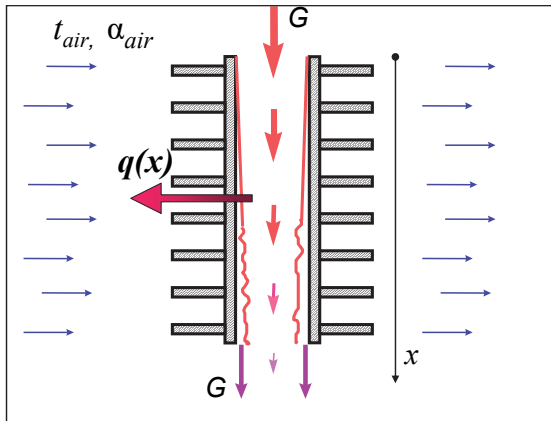


Рис. 7.50. Воздушный конденсатор

Компьютерная модель аппарата представлена тремя функциональными блоками.

1. Функция $\alpha_{condens}(G)$ (рис. 7.51) рассчитывает коэффициент теплоотдачи при конденсации посредством интерполяции между асимптотами гравитационной ламинарной пленки и сдвиговой ламинарной пленки конденсата.

2. Функция $jFlux(x,G)$ (рис. 7.51) рассчитывает локальную плотность теплового потока q по уравнению теплопередачи. Последнее включает обращение к функции $\alpha_{condens}(G)$ для расчета коэффициента теплоотдачи при конденсации. Функция возвращает значение локальной скорости конденсации $jFlux$ (j в тексте, см. уравнение (7.12), рис. 7.3).

$$\begin{array}{l}
 \alpha_{\text{condens}}(G) := \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Re}_F \leftarrow \max\left(\frac{G}{\rho_l \cdot \nu_l}, 10^{-6}\right) \\
 \varepsilon_V \leftarrow \text{Re}_F^{0.04} \\
 \text{Nu}_{LG} \leftarrow (3 \cdot \text{Re}_F)^{-\frac{1}{3}} \cdot \varepsilon_V \\
 \text{Nu}_{TG} \leftarrow 0.023 \cdot (4 \cdot \text{Re}_F)^{0.25} \cdot \text{Pr}_l^{0.5} \\
 \text{Nu} \leftarrow \left(\text{Nu}_{LG}^4 + \text{Nu}_{TG}^4 \right)^{\frac{1}{4}} \\
 l_g \leftarrow \left[\frac{\nu_l^2}{9.8 \cdot \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)} \right]^{\frac{1}{3}} \\
 \alpha \leftarrow \frac{\text{Nu} \cdot \lambda_l}{l_g}
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{jFlux}(x, G) := \left\{ \begin{array}{l}
 q_{\text{local}} \leftarrow \frac{t_{\text{cond}} - t_{\text{air}}}{\frac{1}{\alpha_{\text{condens}}(G)} + R_{\text{wall}} + \frac{1}{\alpha_{\text{air_ef}}}} \\
 \text{jFlux} \leftarrow \frac{q_{\text{local}}}{r}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Рис. 7.51. Расчет локальной теплопередачи и скорости конденсации

3. Основной блок программы (рис. 7.52) организует, посредством встроенной функции Odesolve, численное интегрирование нелинейного дифференциального уравнения (7.12):

$$\frac{dG(x)}{dx} = j(x) = \frac{q(x)}{r},$$

описывающего изменение расхода конденсата по высоте поверхности (рис. 7.3).

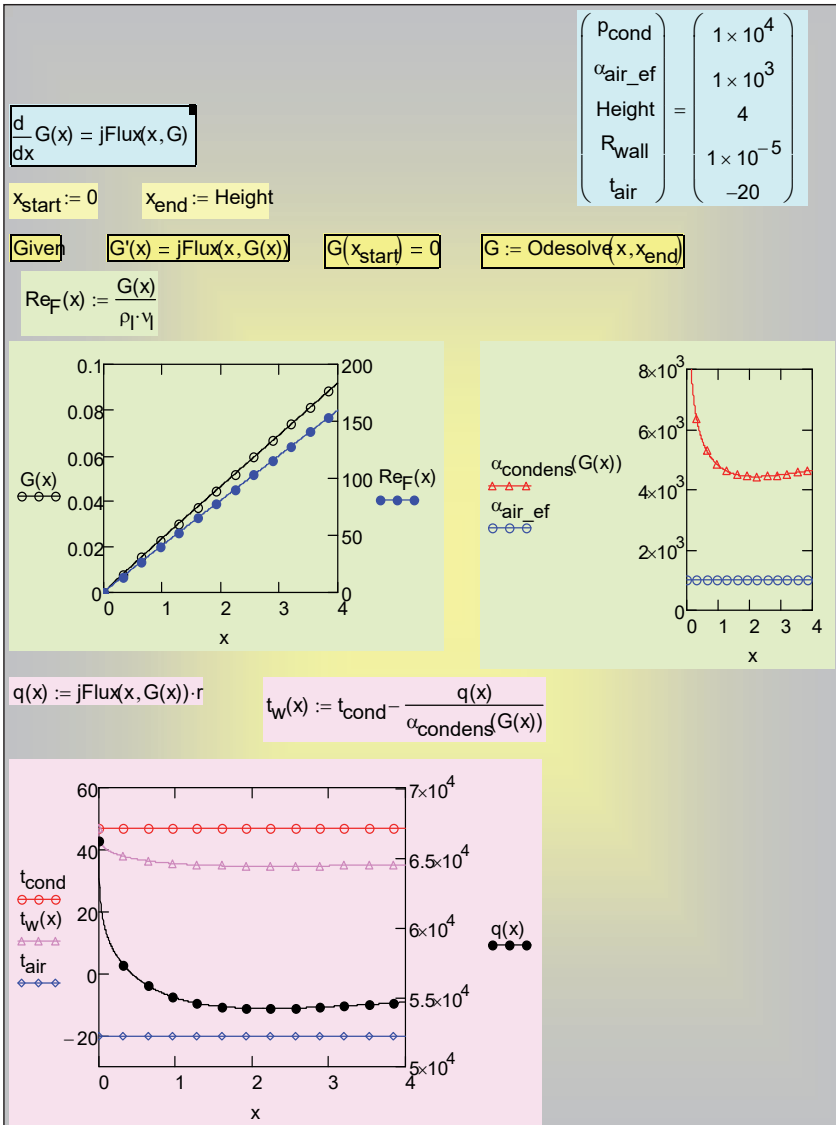


Рис. 7.52. Численное интегрирование уравнения расхода в пленке; распределение локальных характеристик по высоте стенки (числовые значения в системе СИ)

Встроенная Mathcad-функция Odesolve для численного интегрирования содержит в списке параметров:

4. имя переменной интегрирования x ;
5. конечное значение переменной интегрирования x_{end} .

Обращение к Odesolve происходит в программном блоке Given, содержащем запись дифференциального уравнения, начальное условие и собственно вызов интегратора Odesolve.

Результатом интегрирования является распределение $G(x)$ расхода конденсата по высоте теплопередающей поверхности. Расход конденсата $G(x = Height)$ на нижней кромке определяет производительность конденсатора, т.е. секундный расход конденсирующегося пара. На графиках представлены коэффициенты теплоотдачи по обе стороны поверхности теплопередачи, плотность теплового потока, температуры теплоносителей и стенки. Эта детальная информация о внутренних характеристиках конденсатора дает основу для оптимизации его режимных и конструктивных параметров.

Рассмотренная компьютерная модель принадлежит к классу *одномерных дифференциальных моделей* тепломассообменных устройств: она содержит дифференциальное уравнение сохранения массы для потока конденсированной фазы. Локальную интенсивность теплопереноса $\alpha_{condens}(G)$ и далее скорость увеличения расхода $jFlux(x, G)$ мы описали алгебраическими соотношениями (Mathcad-программа, рис. 7.51).

Профессиональные компьютерные модели такого рода включают дифференциальные уравнения сохранения массы (уравнения для массовых расходов теплоносителей), сохранения энергии (уравнения для потоков энтальпии), сохранения импульса (уравнения для давления в потоках).

Правые части этих уравнений содержат плотности поперечных потоков вещества, энергии, импульса, которыми обмениваются взаимодействующие потоки теплоносителей, подобно тому как дифференциальное уравнение расхода конденсата в нашей учебной модели (рис. 7.52):

$$G'(x) = jFlux(x, G(x)) ,$$

содержит поперечную плотность потока пара (скорость конденсации), рассчитываемую посредством локального уравнения теплопередачи (рис. 7.51):

$$q_{\text{local}} = \frac{t_{\text{cond}} - t_{\text{air}}}{\frac{1}{\alpha_{\text{condens}}(G)} + R_{\text{wall}} + \frac{1}{\alpha_{\text{air_ef}}}};$$

$$jFlux = \frac{q_{\text{local}}}{r}.$$

К двум дополнительным примерам компьютерных моделей теплообменников типа «конденсатор–испаритель» можно получить доступ по ссылкам [51].

Представленные в этом параграфе компьютерные модели могут быть основой учебно-исследовательских работ (проектов).

7.9. Управление расходом конденсата в пленке

Перед изучением этого раздела полезно вернуться к формулировке уравнения расхода в пленке ((7.12), (7.38) и соответствующие комментарии в тексте). Мы обобщим запись этого уравнения, полагая, что осуществляется специальное управление расходом посредством отсоса конденсата через *пористую* охлаждаемую стенку, например, с целью интенсифицировать теплоотдачу при конденсации. Управляющим параметром будет задаваемая величина массовой скорости отвода конденсата в расчете на единицу поверхности стенки:

$$jSuction, \text{ кг/ (м}^2 \text{ с)}.$$

Теперь *результатирующая* скорость подвода массы в пленку в расчете на единицу поверхности,

$$jFlux, \text{ кг/ (м}^2 \text{ с)},$$

будет определяться не только скоростью фазового превращения (скоростью конденсации), но и скоростью отсоса:

$$jFlux = \frac{q_{\text{local}}}{r} - jSuction.$$

Это выражение задает правую часть нелинейного дифференциального уравнения массового баланса для конденсатной пленки:

$$\frac{d}{dx}G(x) = jFlux(x, G(x)),$$

которое может быть проинтегрировано численным методом, если будет разработан алгоритм вычисления правой части по текущим значениям координаты (x) и расхода в пленке (G).

Компьютерная реализация представлена экранными копиями на рис. 7.53–7.56.

$$\alpha_{\text{condens}}(G) := \begin{array}{l} \text{Re}_F \leftarrow \max\left(\frac{G}{\rho_l \cdot v_l}, 10^{-6}\right) \\ \varepsilon_v \leftarrow \text{Re}_F^{0.04} \\ \text{Nu}_{\text{LG}} \leftarrow (3 \cdot \text{Re}_F)^{-\frac{1}{3}} \cdot \varepsilon_v \\ \text{Nu}_{\text{TG}} \leftarrow 0.023 \cdot (4 \cdot \text{Re}_F)^{0.25} \cdot \text{Pr}_l^{0.5} \\ \text{Nu} \leftarrow \left(\text{Nu}_{\text{LG}}^4 + \text{Nu}_{\text{TG}}^4\right)^{\frac{1}{4}} \\ l_g \leftarrow \left[\frac{v_l^2}{9.8 \cdot \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)} \right]^{\frac{1}{3}} \\ \alpha \leftarrow \frac{\text{Nu} \cdot \lambda_l}{l_g} \end{array}$$

Рис. 7.53. Расчет коэффициента теплоотдачи гравитационной пленки конденсата

Функция $\alpha_{condens}(G)$ определяет зависимость коэффициента теплоотдачи гравитационной конденсатной пленки от локального значения расхода конденсата в пленке (рис. 7.53, подробности – в п.7.7. Универсальная аппроксимация для расчета локальной теплоотдачи при конденсации»).

$\text{Fluxis_0}(x, G) :=$	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>"Zero suction"</p> $q \leftarrow \frac{t_{cond} - t_{cool}}{\frac{1}{\alpha_{condens}(G)} + R_{wall} + \frac{1}{\alpha_{cool}}}$ $j\text{Flux} \leftarrow \frac{q}{r}$ $\begin{pmatrix} j\text{Flux} \\ q \end{pmatrix}$ </div>	$\text{Fluxis_0}(x, G)_0 = j\text{Flux}$ $\text{Fluxis_0}(x, G)_1 = q$	
$j\text{Suction}(x, G, \text{Par}_1, \text{Par}_2) :=$	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>"as const"</p> Par_1 </div>		
$\text{Fluxis}(x, G) :=$	<div style="border-left: 1px solid black; padding-left: 10px;"> <p>"Nonzero suction"</p> $q \leftarrow \frac{t_{cond} - t_{cool}}{\frac{1}{\alpha_{condens}(G)} + R_{wall} + \frac{1}{\alpha_{cool}}}$ $j\text{Flux} \leftarrow \frac{q}{r} - j\text{Suction}(x, G, \text{Par}_1, \text{Par}_2)$ $\begin{pmatrix} j\text{Flux} \\ q \end{pmatrix}$ </div>		

Рис. 7.54. Вычисление правой части дифференциального уравнения расхода в пленке

Правая часть дифференциального уравнения расхода (рис. 7.54) формируется в двух вариантах: для непроницаемой стенки (нулевого отсоса) и для пористой стенки с отсосом конденсата.

Интенсивность отсоса задается как некоторое постоянное значение, но в программе зарезервирована возможность построить более сложные распределения.

Выходным параметром процедур является вектор–столбец с компонентами: плотностью потока массы и плотностью потока теплоты. Напомним, что поток массы определяется как разность скорости конденсации и скорости отсоса.

$\begin{pmatrix} P_{\text{cond}} \\ \alpha_{\text{cool}} \\ \text{Height} \\ R_{\text{wall}} \\ t_{\text{cool}} \\ \text{Suction} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10^5 \\ 1 \times 10^4 \\ 2 \\ 1 \times 10^{-5} \\ 20 \\ 0.18 \end{pmatrix}$	$\text{Par}_1 = \text{Suction} \quad , \text{ kg}/(\text{m}^2 \text{ s})$ $\text{Par}_1 = 0.18$
$\frac{d}{dx} G(x) = j\text{Flux}(x, G(x))$	ДУ материального баланса в пленке конденсата
$x_{\text{start}} =: 0 \quad x_{\text{end}} =: \text{Height}$	
"Zero suction: " Given $G'(x) = \text{Fluxis}_0(x, G(x))_0 \quad G(x_{\text{start}}) = 0 \quad G_0 := \text{Odesolve}(x, x_{\text{end}})$	
"Nonzero suction: " Given $G'(x) = \text{Fluxis}(x, G(x))_0 \quad G(x_{\text{start}}) = 0 \quad G_Suct := \text{Odesolve}(x, x_{\text{end}})$	

Рис. 7.55. Интегрирование дифференциального уравнения расхода методом Odesolve

Численное интегрирование дифференциального уравнения расхода выполнено посредством обращения к встроенной функции Mathcad Odesolve (рис. 7.55).

Эта операция проведена два раза: для нулевого отсоса (классическая задача) и с некоторым постоянным отсосом через пористую стенку.

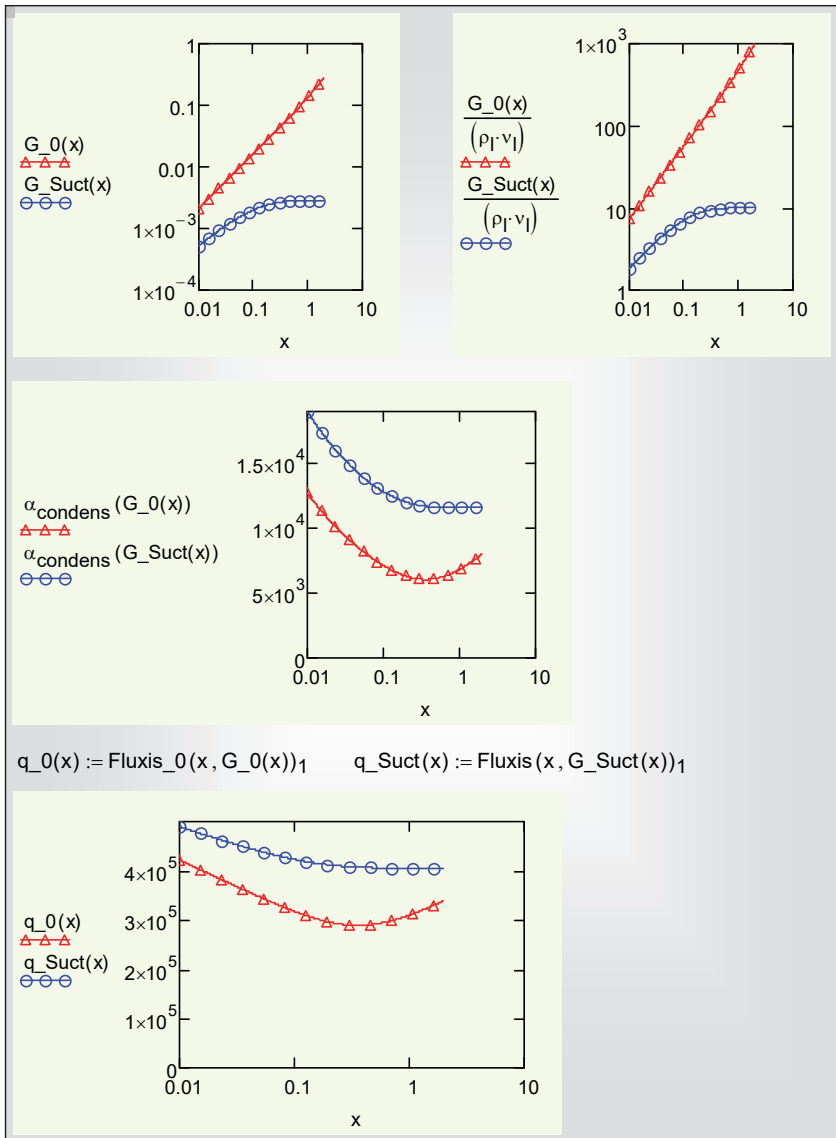


Рис. 7.56. Распределения расхода и числа Рейнольдса пленки, коэффициента теплоотдачи и плотности теплового потока по высоте поверхности

Сопоставление коэффициентов теплоотдачи показывает (рис. 7.56), что при отсосе конденсата может быть достигнут значительный эффект интенсификации: теплоотдача почти двукратно

возросла. Заметно увеличился тепловой потока, хотя и в меньшей степени, поскольку имеются и другие составляющие суммарного термического сопротивления, оставшиеся неизменными (рис. 7.54).

Интересной особенностью задачи с отсосом является асимптотический режим постоянного коэффициента теплоотдачи, обусловленный устанавливающимся равновесием между скоростью конденсации (поступлением конденсата в пленку) и отсосом конденсата (отводом через пористую стенку). Детальный анализ и выбор интенсивности отсоса можно провести, варьируя исходные параметры в приведенной вычислительной программе [51].

Условия охлаждения конденсатора задаются двумя параметрами: температурой охлаждающего теплоносителя t_{cool} и коэффициентом теплоотдачи α_{cool} . Заданными будут также давление в конденсаторе, высота поверхности $Height$, термическое сопротивление стенки R_{wall} . Теплофизические свойства теплоносителей рассчитывает специальная программа, не показанная на иллюстрациях.

Представленная модель достаточна для практических расчетов. Вообще говоря, более строгий анализ может потребоваться в специальных случаях, чтобы учесть возможную при сильном отсосе деформацию полей скорости и температуры в пленке конденсата.

7.10. Аппроксимации для толщины пленки

При проектировании конденсационных устройств, а также других теплотехнологических установок с жидкими пленками, могут потребоваться данные по толщинам пленок. Основная причина этого – необходимость расчета трения с учетом особой шероховатости, создаваемой волновыми возмущениями на поверхности пленок. Высота такой шероховатости и, следовательно, степень ее влияние на гидравлическое сопротивление определяется толщиной пленки.

Аналитические выражения для толщины D определение (7.90) ламинарной гравитационной пленки задаются формулами (7.33) и (7.94), а для ламинарной сдвиговой пленки – формулами (7.80), (7.81). Функциональная связь между числом Рейнольдса *турбулентной* пленки и ее толщиной определялась численным

анализом, как показано на рис. 7.23 для гравитационной пленки и на рис. 7.36, 7.37 для сдвиговой пленки. Полученные результаты обобщаются с хорошей точностью простыми соотношениями, построенными методом интерполяции между асимптотами, в данном случае, между пределами ламинарного и развитого турбулентного течения (рис. 7.57). Они пригодны для любых чисел Рейнольдса пленки.

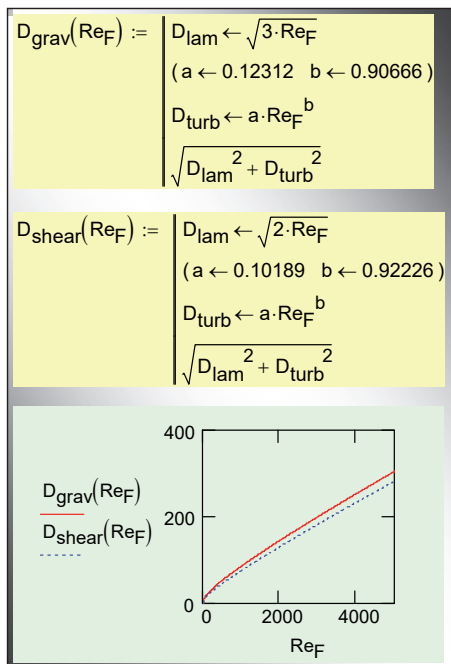


Рис. 7.57. Аппроксимации для толщины гравитационной и сдвиговой пленки

Цель последующих расчетов – получить универсальные аппроксимации для толщины пленки, движущейся под действием обеих актуальных сил: гравитации и динамического воздействия газового потока (сдвига).

Перейдем от D (7.90) к другой модификации безразмерной толщины пленки, когда в качестве масштаба применяется вязкостно-гравитационная длина l_g (см. первые два функциональных блока на рис. 7.58).

$$\begin{aligned}
\delta_{lggrav}(Re_F) &:= \left| \begin{array}{l} D_{lam} \leftarrow \sqrt{3 \cdot Re_F} \\ (a \leftarrow 0.12312 \quad b \leftarrow 0.90666) \\ D_{turb} \leftarrow a \cdot Re_F^b \\ \left(\sqrt{D_{lam}^2 + D_{turb}^2} \right)^{\frac{2}{3}} \end{array} \right. \\
\delta_{lg_{shear}}(Re_F, SSF) &:= \left| \begin{array}{l} D_{lam} \leftarrow \sqrt{2 \cdot Re_F} \\ (a \leftarrow 0.10189 \quad b \leftarrow 0.92226) \\ D_{turb} \leftarrow a \cdot Re_F^b \\ \frac{\sqrt{D_{lam}^2 + D_{turb}^2}}{SSF} \end{array} \right. \\
\delta_{lg_{UF}}(Re_F, SSF) &:= \frac{\delta_{lggrav}(Re_F) \cdot \delta_{lg_{shear}}(Re_F, SSF)}{\sqrt{\delta_{lggrav}(Re_F)^2 + \delta_{lg_{shear}}(Re_F, SSF)^2}} \\
\delta_{lg_{OF}}(Re_F, SSF) &:= \frac{\delta_{lggrav}(Re_F) \cdot \delta_{lg_{shear}}(Re_F, SSF)}{\sqrt{|\delta_{lggrav}(Re_F)^2 - \delta_{lg_{shear}}(Re_F, SSF)^2|}}
\end{aligned}$$

Рис. 7.58. Аппроксимации для толщины пленки в случаях однонаправленного (UF) и противоположного (OF) действия гравитации и сдвига

Для гравитационной пленки связь двух представлений дается формулами (7.94), т.е.

$$\frac{\delta}{l_g} = D^{2/3}. \quad (7.143)$$

Для сдвиговой пленки получаем непосредственно из определения:

$$D \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} \frac{l_g}{l_g} \equiv \frac{\delta}{l_g} \frac{u_\tau l_g}{\nu} \equiv \frac{\delta}{l_g} \frac{l_g}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \equiv \frac{\delta}{l_g} \cdot SSF \Rightarrow \frac{\delta}{l_g} = \frac{D}{SSF}. \quad (7.144)$$

Теперь зависимость толщины сдвиговой пленки от фактора сдвига SSF представлена в явной форме (второй функциональный блок на рис. 7.58).

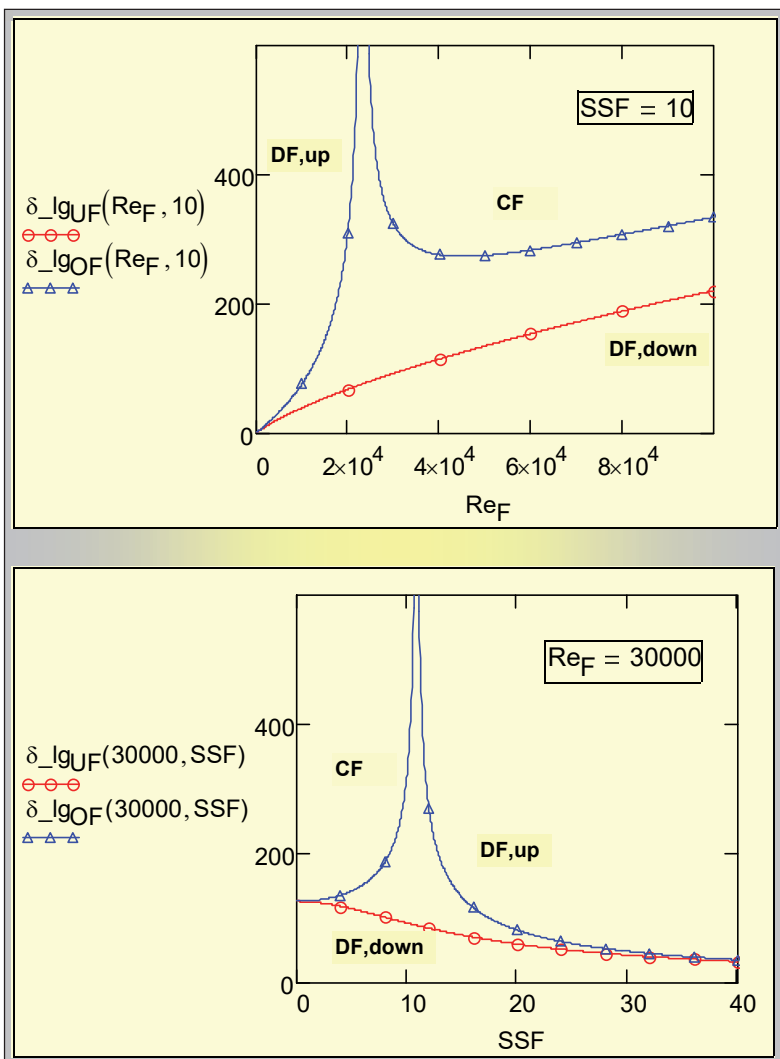


Рис. 7.59. Слутное движение пленки и газового потока вниз (DF, down), противоточное движение пленки вниз при встречном подъемном течении газового потока (CF), прямоточное движение вверх против силы тяжести (DF, up)

Универсальные аппроксимации строятся методом интерполяции между асимптотами, в данном случае, между пределами гравитационной и сдвиговой пленки (см. последние два функциональных блока на рис. 7.58). Это делается отдельно для двух случаев:

- однонаправленного действия гравитации и сдвига (UF, unit-directional forces);
- противоположного действия гравитации и сдвига (OF, opposite forces).

Поскольку толщина пленки – убывающая функция от действующих факторов (гравитации, сдвига), была принята следующая форма интерполяционного соотношения:

$$\frac{1}{\delta} = \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_{grav}}\right)^2 \pm \left(\frac{1}{\delta_{shear}}\right)^2}, \quad (7.145)$$

где знак минус относится к случаю противоположного направления (OF). Обратная величина толщины пленки (гравитационной или сдвиговой) в правой части выступает как мера соответствующего динамического эффекта – гравитации или сдвига. Суммирование этих эффектов с нужным знаком дает результирующее значение толщины пленки.

При графическом представлении (рис. 7.59) универсальной аппроксимации (7.145) отчетливо проявляется кризисный эффект в случае противоположного действия сил (OF). Толщина пленки обращается в бесконечность при определенных критических значениях параметров Re_F и SSF . Это явление называется «захлебыванием». Оно представляет серьезную опасность для *противоточных* пленочных установок, поскольку означает радикальное нарушение циркуляции теплоносителей.

7.11. Расчет трения на межфазной границе

Для турбулентного парового потока при расчете трения τ_s на границе раздела фаз следует учитывать специфическую «шероховатость» поверхности, связанную с волновыми возмущениями и

турбулентностью в пленке конденсата и зависящую от ее толщины δ . Функциональная связь между напряжением трения τ и толщиной пленки δ выражается соотношением Уоллиса:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + 300 \frac{\delta}{d_{eq}}, \quad (7.146)$$

где τ_0 – напряжение трения на гладкой поверхности раздела «пленка–газовый поток», d_{eq} – эквивалентный диаметр канала. Согласно соотношению Уоллиса, пленка конденсата эквивалентна по сопротивлению «песчаной» шероховатости, по высоте примерно в четыре раза превосходящей толщину этой пленки.

Используя вместо τ безразмерный фактор трения SSF (7.82) и раскрывая соотношение Уоллиса относительно безразмерной толщины пленки, запишем формулу (7.146) в виде:

$$\frac{\delta}{l_g} = \frac{d_{eq}}{l_g} \frac{1}{300} \left(\left(\frac{SSF}{SSF_0} \right)^2 - 1 \right), \quad (7.147)$$

где SSF_0 – фактор трения на гладкой сухой поверхности (ср. с τ_0 в (7.146)).

Поскольку толщина пленки и трение заранее не известны, необходимо дополнительное соотношение между ними. Полагая как и ранее число Рейнольдса пленки заданным параметром, можно привлечь в качестве замыкающего соотношения универсальную аппроксимацию вида (7.145) для толщины пленки, полученную в предыдущем параграфе (см. функции в двух последних блоках на рис. 7.58):

$$\frac{\delta}{l_g} = \delta_- l_g (\text{Re}_F, SSF). \quad (7.148)$$

Приравнивая правые части (7.147) и (7.148), получим уравнение относительно безразмерного фактора трения SSF , которое несложно решить, применяя встроенную функцию `root` из пакета Mathcad (рис. 7.60).

$\text{Wallis: } \delta_{lgWallis}(SSF, SSF_0, deq_{lg}) := deq_{lg} \cdot \frac{1}{300} \left[\left(\frac{SSF}{SSF_0} \right)^2 - 1 \right]$ $eq_{UF}(Re_F, SSF, SSF_0, deq_{lg}) := \delta_{lgUF}(Re_F, SSF) - \delta_{lgWallis}(SSF, SSF_0, deq_{lg})$ $Re_F := 10000 \quad SSF_0 := 10 \quad deq_{lg} := 300 \quad SSF := SSF_0$ $\delta_{lgUF}(Re_F, SSF_0) = 40.976$ $SSF := \text{root}(eq_{UF}(Re_F, SSF, SSF_0, deq_{lg}), SSF) \quad SSF = 37.918$ $\delta_{lgUF}(Re_F, SSF) = 13.377$
--

Рис. 7.60. Пример расчета толщины пленки и трения на шероховатой поверхности раздела по модели Уоллиса в случаях однонаправленного (UF) действия гравитации и сдвига

Числовой пример (рис. 7.60) иллюстрирует влияние шероховатости пленки конденсата. Исходное значение фактора трения $SSF_0 = 10$ для гладкой сухой поверхности возросло до $SSF = 37,9$, т.е. почти в четыре раза, за счет пленки жидкости на стенке.

Следует отметить, что исходное соотношение Уоллиса соответствует режиму *развитой* шероховатости. Поэтому при программной реализации модели конденсационного устройства необходимо проконтролировать, реализуется ли указанный режим, сопоставляя толщину *вязкого подслоя* в паровом потоке и толщину пленки конденсата.

Для интенсивных процессов конденсации необходимо учесть влияние поперечного потока массы на трение. Асимптотическое трение при отсосе из парового потока известно (7.84), и можно еще раз воспользоваться приемом интерполяции между асимптотами, например, следующим образом:

$$\tau = \sqrt{\tau_0^2 + \tau_j^2}, \quad (7.149)$$

где τ_0 – трение при отсутствии поперечного потока массы, τ_j – асимптотическое трение при сильном отсосе по формуле (7.84).

Приведенное выше описание показывает, насколько сложным является детальное моделирование двухфазного потока, с учетом его сложной внутренней структуры. Существует альтернативный, весьма упрощенный подход, когда реальный двухфазный поток наделяют некоторыми осредненными свойствами и рассматривают как *гомогенное* течение. Удовлетворительных результатов можно ожидать для высокоскоростных турбулентных течений при конденсации и кипении в трубах (гл.6, п. 6.8 «Гомогенная модель»).

7.12. Конденсация на произвольной поверхности

Выше рассматривались задачи конденсации на поверхностях простой геометрии. Локальные значения толщины пленки, расхода конденсата, коэффициента теплоотдачи, плотности теплового потока были функцией одной координаты, направленной, например, по высоте вертикальной поверхности или по окружности горизонтальной трубы.

Однако уже задача о *наклонной* трубе (т.е. не горизонтальной и не вертикальной) не является одномерной в указанном выше смысле, поскольку все локальные величины будут функциями двух координат: вдоль оси трубы и по окружности трубы. Другим практически важным примером задачи со сложной геометрией является конденсация на *орезанных* трубах.

При конденсации на искривленных поверхностях, в особенности при малых линейных масштабах, существенное значение могут иметь *капиллярные эффекты*: к силам трения и гравитации в уравнении движения пленки добавятся градиенты Лапласовского давления. Специальные *мелковолнистые* поверхности применяются для интенсификации теплоотдачи при конденсации.

Актуальной проблемой новых эффективных теплотехнологий является пленочное испарение и пленочная конденсация в профилированных каналах микротеплообменников.

Рассмотрим постановку задачи о конденсации на поверхности произвольной формы (рис. 7.61). Очевидно, на разных участках поверхности относительная ориентация силы тяжести будет различной. Кривизна поверхности также будет переменной, что по-

влечет возникновение градиентов давления в пленке. Поэтому одной из проблем становится детальное описание геометрии поверхности, что требует применения криволинейной системы координат.

Мы сохраним при анализе основные допущения теории тонких пленок. В частности, будем полагать толщину пленки малой по сравнению с радиусом кривизны поверхности. Это допущение налагает, в действительности, определенные ограничения на форму «произвольной» поверхности. Например, скопление конденсата в «низинах» профиля может нарушить предположение о тонкости пленки.

Подчеркнем важную роль и эффективность локальных соотношений вида (7.33), (7.35) между толщиной пленки, термической проводимостью и расходом, полученных ранее в данной главе. Мы покажем далее, как приспособить эти базовые результаты к обобщенной задаче.

Ортогональная криволинейная система координат

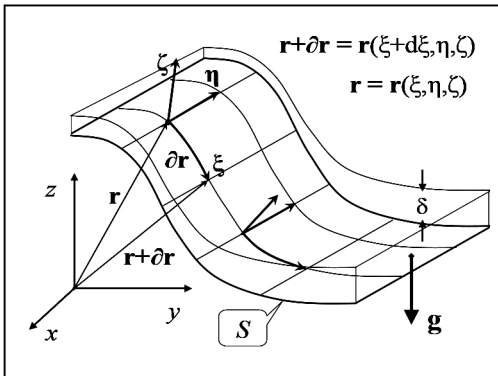


Рис. 7.61. Конденсация на произвольной поверхности

Пусть задана (рис. 7.61) некоторая поверхность S , на которой происходит конденсация пара, так что каждой точке этой поверхности соответствует тройка декартовых координат (x, y, z) и тройка криволинейных ортогональных координат (ξ, η, ζ) , связанных между собой взаимнооднозначным преобразованием:

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z); \quad (7.150)$$

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta). \quad (7.151)$$

Координата ζ нормальна к поверхности. Координаты ξ, η лежат на поверхности, они перпендикулярны друг другу и нормальной координате ζ . Видно, что направление нормали изменяется от точки к точке; вообще говоря, изменяются и два других базисных вектора криволинейной системы. Это важное отличие криволинейной системы от декартовой.

Векторы локального базиса \mathbf{e} , направленные вдоль криволинейных координат, получают следующим образом. Положение некоторой точки на поверхности задают радиус-вектором:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} .$$

Имея в виду (7.151), можно записать:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta) .$$

Если зафиксировать координаты (η, ζ) и немного сместиться вдоль ξ , то получится вектор $\partial\mathbf{r}$, касательный к координатной линии ξ (рис. 7.61):

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{r} &= \mathbf{r}(\xi+d\xi, \eta, \zeta) - \mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta) \approx \left(\frac{\partial\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi} \right) d\xi; \\ \mathbf{e}_\xi &= \frac{\partial\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi}; \end{aligned} \quad (7.152)$$

$$dl \equiv |\partial\mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta)| = |\mathbf{e}_\xi| d\xi; \quad h_\xi \equiv |\mathbf{e}_\xi| = \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi} \right|; \quad \Rightarrow dl = h_\xi d\xi.$$

Вектор \mathbf{e}_ξ , однозначно определенный в каждой точке поверхности и касательный к координатной линии ξ , принимается за базисный вектор криволинейной системы координат.

Последнее из уравнений (7.152) определяет *расстояние* (длину, m), соответствующую смещению вдоль координатной линии $d\xi$. Это важно, поскольку криволинейные координаты не обязательно имеют размерность длины (например, в сферической системе это может быть угол). Введенная здесь величина h_ξ называется *метрическим коэффициентом* (или масштабным множителем).

Аналогично (7.152) находятся два других базисных вектора и метрических коэффициента, так что получаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, \eta, \varsigma)}{d\xi}; & \mathbf{e}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, \eta, \varsigma)}{d\eta}; & \mathbf{e}_\varsigma &= \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, \eta, \varsigma)}{d\varsigma}; \\ h_\xi &\equiv |\mathbf{e}_\xi| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|; & h_\eta &\equiv |\mathbf{e}_\eta| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right|; & h_\varsigma &\equiv |\mathbf{e}_\varsigma| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varsigma} \right|; \\ dl_\xi &= h_\xi d\xi; & dl_\eta &= h_\eta d\eta; & dl_\varsigma &= h_\varsigma d\varsigma. \end{aligned} \quad (7.153)$$

Операции дифференцирования радиус-вектора выполняются с привлечением формул преобразования системы координат (7.151), по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}; \\ x &= x(\xi, \eta, \varsigma), \quad y = y(\xi, \eta, \varsigma), \quad z = z(\xi, \eta, \varsigma); \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (7.154)$$

Результат для трех направлений:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \xi}; \\ \mathbf{e}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \eta}; \\ \mathbf{e}_\varsigma &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varsigma} = \mathbf{i} \frac{\partial x}{\partial \varsigma} + \mathbf{j} \frac{\partial y}{\partial \varsigma} + \mathbf{k} \frac{\partial z}{\partial \varsigma}. \end{aligned} \quad (7.155)$$

Контрольный объем в ортогональных криволинейных координатах

Стороны элементарного контрольного объема dV , м^3 уже вычислены (третья строчка формул (7.153)), поэтому:

$$\begin{aligned} dl_\xi &= h_\xi d\xi; & dl_\eta &= h_\eta d\eta; & dl_\varsigma &= h_\varsigma d\varsigma; \\ dV &= dl_\xi \cdot dl_\eta \cdot dl_\varsigma = (h_\xi h_\eta h_\varsigma) d\xi d\eta d\varsigma. \end{aligned} \quad (7.156)$$

Определим грани контрольного объема, через которые проходят потоки переносимых величин:

$$\begin{aligned} \perp \xi : dl_\eta dl_\zeta &= (h_\eta h_\zeta) d\eta d\zeta; \\ \perp \eta : dl_\xi dl_\zeta &= (h_\xi h_\zeta) d\zeta d\xi; \\ \perp \zeta : dl_\xi dl_\eta &= (h_\xi h_\eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (7.157)$$

Оператор дивергенции в ортогональных криволинейных координатах записывают следующим образом, основываясь на определении дивергенции как результирующего потока через грани, отнесенного к единице объема:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{1}{h_\xi h_\eta h_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi (h_\eta h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\eta (h_\xi h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_\zeta (h_\xi h_\eta)) \right). \quad (7.158)$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi (h_\eta h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\eta (h_\xi h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_\zeta (h_\xi h_\eta)) &= 0 \end{aligned} \quad (7.159)$$

по толщине конденсатной пленки:

$$\int_0^{\delta(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi (h_\eta h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \eta} (u_\eta (h_\xi h_\zeta)) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (u_\zeta (h_\xi h_\eta)) \right) d\zeta = 0. \quad (7.160)$$

Проведем необходимые вычисления для одного из слагаемых, основываясь на правилах дифференцирования сложной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (u_\xi h_\eta h_\zeta) d\zeta &= \\ &= \int_0^{\delta(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi h_\eta h_\zeta) \right) d\zeta + (u_\xi h_\eta h_\zeta)_{\delta(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \delta(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (7.161)$$

или

$$\int_0^{\delta(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (u_\xi h_\eta h_\zeta) \right) d\zeta = (u_\xi h_\eta h_\zeta)_{\delta(\xi, \eta)} - (u_\xi h_\eta h_\zeta)_0 = (u_\xi h_\eta h_\zeta)_{\delta(\xi, \eta)}. \quad (7.162)$$

Подстановки в (7.160) дают:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (u_\xi h_\eta h_\zeta) d\zeta + \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (u_\eta h_\xi h_\zeta) d\zeta = \\ & = - (u_\zeta h_\xi h_\eta)_{\delta(\xi, \eta)} + \\ & + (u_\xi h_\eta h_\zeta)_{\delta(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \delta(\xi, \eta) + (u_\eta h_\xi h_\zeta)_{\delta(\xi, \eta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\xi, \eta). \end{aligned} \quad (7.163)$$

Уравнение (7.163) имеет смысл массового баланса в пленке конденсата. Левая часть определяет увеличение расхода через поперечное сечение пленки (для течения, параллельного стенке). Правая – подвод конденсата через поверхность раздела фаз, обусловленный как нормальной проекцией скорости (первое слагаемое справа), так и касательными проекциями (второе и третье слагаемое). Все три проекции скорости должны быть учтены, поскольку поверхность раздела фаз *не параллельна* стенке: производные от толщины пленки ненулевые.

Введем величины осредненных проекций скорости:

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (u_\xi h_\eta h_\zeta) d\zeta &= \left(\bar{u}_\xi \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (h_\eta h_\zeta) d\zeta \right) \approx (\bar{u}_\xi \cdot \delta(\xi, \eta) \cdot (h_\eta h_\zeta)_0); \\ \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (u_\eta h_\xi h_\zeta) d\zeta &= \left(\bar{u}_\eta \int_0^{\delta(\xi, \eta)} (h_\xi h_\zeta) d\zeta \right) \approx (\bar{u}_\eta \cdot \delta(\xi, \eta) \cdot (h_\xi h_\zeta)_0), \end{aligned} \quad (7.164)$$

и выразим увеличение расхода (правую часть (7.163)) через *скорость конденсации* на единице поверхности стенки j_{cond} , кг/м²с:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{u}_\xi \cdot \delta(\xi, \eta) \cdot (h_\eta h_\zeta)_0) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{u}_\eta \cdot \delta(\xi, \eta) \cdot (h_\xi h_\zeta)_0) = j_{\text{cond}} (h_\xi h_\eta)_0. \quad (7.165)$$

Мы воспользовались здесь условием *малости толщины пленки* и приняли значения всех метрических коэффициентов h такими, как на стенке, при $\zeta = 0$.

Смысл балансового уравнения (7.165) достаточно очевиден, и оно могло быть выписано сразу, непосредственно после соотношений (7.157), однако промежуточные выкладки позволяют четко зафиксировать принимаемые ограничения. Вывод и применения одномерного аналога уравнения (7.164) см. выше в п.п. 7.2, 7.3, 7.8 (уравнения (7.12), (7.38), рис. 7.3, рис. 7.51, 7.52).

Сила тяжести

Далее потребуется представление силы тяжести (вектора \mathbf{g}) в криволинейной системе координат. Действующими вдоль поверхности проекциями, обеспечивающими стекание пленки конденсата, будут:

$$g_{\xi} = \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\xi}}{|\mathbf{e}_{\xi}|} = \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\xi}}{h_{\xi}}; \quad g_{\eta} = \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\eta}}{|\mathbf{e}_{\eta}|} = \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{e}_{\eta}}{h_{\eta}}. \quad (7.166)$$

Деление на модуль базисного вектора обеспечивает вычисление проекции на нужное *направление* (т.е. проекции на *единичный* вектор) с сохранением правильной размерности силы гравитации (Н/кг).

Естественно принять, что сила тяжести вертикальна в базовой декартовой системе координат, $\mathbf{g} = \mathbf{i} g$; тогда, привлекая (7.155), получим:

$$g_{\xi} = g(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{1}{h_{\xi}} = g \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{1}{h_{\xi}}; \quad g_{\eta} = g(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{1}{h_{\eta}} = g \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{1}{h_{\eta}}. \quad (7.167)$$

Других слагаемых не будет, поскольку $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$.

Капиллярное давление

Другой (кроме гравитации) силой, которую предполагается учесть, будет переменное давление P в пленке конденсата, создаваемое капиллярными силами (P , Н/м², скалярная величина). Определим градиент давления проекциями на *единичные базисные векторы* криволинейной системы координат:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\xi} \equiv \frac{\mathbf{e}_{\xi}}{h_{\xi}}; \quad \hat{\mathbf{e}}_{\eta} \equiv \frac{\mathbf{e}_{\eta}}{h_{\eta}}; \quad \hat{\mathbf{e}}_{\zeta} \equiv \frac{\mathbf{e}_{\zeta}}{h_{\zeta}}; \quad (7.168)$$

$$\text{grad}(P) = \frac{1}{h_{\xi}} \frac{\partial P}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_{\xi} + \frac{1}{h_{\eta}} \frac{\partial P}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_{\eta} + \frac{1}{h_{\zeta}} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{e}}_{\zeta}.$$

Заметим, что в разложении (7.168) приращения давления ∂P вдоль осей координат отнесены к соответствующим *длинам* (7.156):

$$h_{\xi} d\xi = dl_{\xi}; \quad h_{\eta} d\eta = dl_{\eta}; \quad h_{\zeta} d\zeta = dl_{\zeta},$$

поэтому проекции градиента давления на единичные базисные векторы имеют обычную размерность: Па/м.

Подробный вывод (7.168) основан на сопоставлении двух способов вычисления изменения давления в произвольном направлении $d\mathbf{r}$:

$$\text{grad } P = (a_\xi \hat{\mathbf{e}}_\xi + a_\eta \hat{\mathbf{e}}_\eta + a_\zeta \hat{\mathbf{e}}_\zeta); \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} d\zeta;$$

$$1) dP = \text{grad } P \cdot d\mathbf{r} = (a_\xi \hat{\mathbf{e}}_\xi + a_\eta \hat{\mathbf{e}}_\eta + a_\zeta \hat{\mathbf{e}}_\zeta) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} d\zeta \right) =$$

$$= (a_\xi \hat{\mathbf{e}}_\xi + a_\eta \hat{\mathbf{e}}_\eta + a_\zeta \hat{\mathbf{e}}_\zeta) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\xi h_\xi d\xi + \hat{\mathbf{e}}_\eta h_\eta d\eta + \hat{\mathbf{e}}_\zeta h_\zeta d\zeta) =$$

$$= a_\xi h_\xi d\xi + a_\eta h_\eta d\eta + a_\zeta h_\zeta d\zeta;$$

$$1) dP = a_\xi h_\xi d\xi + a_\eta h_\eta d\eta + a_\zeta h_\zeta d\zeta; \quad \left. \begin{array}{l} 2) dP = \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\zeta; \end{array} \right\} \Rightarrow a_\xi = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi}; \text{ etc.} \Rightarrow$$

$$\text{grad}(P) = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial P}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \hat{\mathbf{e}}_\zeta.$$

Капиллярное давление P в случае *тонкой пленки* конденсата определяется кривизной поверхности твердой стенки:

$$\delta \ll R_1; \quad \delta \ll R_2;$$

$$P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \sigma \cdot 2H; \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7.169)$$

где R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны и H – средняя кривизна стенки.

Поскольку уравнение поверхности задано, то и скалярное поле давления P в пленке предопределено, хотя конкретные вычисления кривизны могут быть громоздкими для стенки сложной формы.

Давление считается постоянным по толщине тонкой пленки, поэтому градиент капиллярного давления действует вдоль поверхности и вычисляется как вектор, лежащий в касательной плоскости:

$$\text{grad}(P) = 2\sigma \left(\frac{1}{h_{\xi 0}} \frac{\partial H}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + \frac{1}{h_{\eta 0}} \frac{\partial H}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta \right) \quad (7.170)$$

Связь между расходом конденсата и толщиной пленки

В уравнении массового баланса (7.165) неизвестными величинами являются толщина пленки и средняя скорость конденсата. Эффективность модели тонкой пленки проявляется в частности в том, что существует простая связь между локальными значениями этих величин.

Вернемся к выводу уравнения движения тонкой пленки под действием гравитации и вязкого трения (7.24):

$$g_x(\rho_l - \rho_v)(\delta - y)(b dx) + \tau_s(b dx) + [-\tau(y)](b dx) = 0.$$

Учтем теперь влияние градиента давления, действующего по сечению пленки $(\delta - y)b$, и перепишем уравнение движения в виде:

$$\left(g_x - \frac{1}{(\rho_l - \rho_v)} \frac{dP(x)}{dx} \right) (\rho_l - \rho_v)(\delta - y)(b dx) + \tau_s(b dx) + [-\tau(y)](b dx) = 0. \quad (7.171)$$

Соответственно, итоговое уравнение (7.25) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau(y) &\equiv (\mu + \mu_t) \frac{du}{dy} = \\ &= \left(g_x - \frac{1}{(\rho_l - \rho_v)} \frac{dP(x)}{dx} \right) (\rho_l - \rho_v)(\delta - y) + \tau_s. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Результаты, полученные ранее на основе уравнения (7.25) для гравитационной пленки, можно обобщить, используя подстановку:

$$g_x \Leftarrow \left(g_x - \frac{1}{(\rho_l - \rho_v)} \frac{dP(x)}{dx} \right), \quad (7.173)$$

где под « x » следует понимать направление ξ или η .

В соответствии со структурой (7.173), выпишем проекции *эффективной* силы в проекциях на единичные базисные векторы, суммируя почленно уравнения (7.167) и (7.170):

$$\begin{aligned}
 g_{ef\xi} &= g_{ef\xi} \hat{\mathbf{e}}_\xi + g_{ef\eta} \hat{\mathbf{e}}_\eta \\
 g_{ef\xi} &= g \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{1}{h_{\xi 0}} - \frac{2\sigma}{(\rho_l - \rho_v)} \frac{1}{h_{\xi 0}} \frac{\partial H}{\partial \xi} \\
 g_{ef\eta} &= g \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{1}{h_{\eta 0}} - \frac{2\sigma}{(\rho_l - \rho_v)} \frac{1}{h_{\eta 0}} \frac{\partial H}{\partial \eta}.
 \end{aligned} \tag{7.174}$$

Для ламинарной *капиллярно-гравитационной* пленки получим следующую связь между толщиной пленки и расходом, применяя ранее полученный результат (7.32):

$$\begin{aligned}
 \frac{\overline{u_\xi} \delta}{\nu} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{l_g} \right)^3 \left(\frac{g_{ef\xi}}{g} \right); \quad \frac{\overline{u_\eta} \delta}{\nu} = \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{l_g} \right)^3 \left(\frac{g_{ef\eta}}{g} \right); \\
 l_g &\equiv \left[\frac{\nu^2}{g \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l} \right)} \right]^{1/3}.
 \end{aligned} \tag{7.175}$$

Заметим, что согласно (7.175), (7.174) *отношение* проекций скорости

$$\frac{\overline{u_\xi}}{\overline{u_\eta}} = \left(\frac{g_{ef\xi}}{g_{ef\eta}} \right) = G(\xi, \eta),$$

зависит только от координат (ξ , η) (не зависит от скорости конденсации). Это означает, что в любой точке поверхности можно указать отношение малых перемещений частицы жидкости за время $d\tau$ вдоль криволинейных координат:

$$\frac{\overline{u_\xi}}{\overline{u_\eta}} = \frac{h_\xi d\xi}{h_\eta d\eta} = G(\xi, \eta) \Rightarrow \frac{d\xi}{d\eta} = \frac{h_\eta}{h_\xi} G(\xi, \eta).$$

Полученное дифференциальное уравнение для $\xi(\eta)$ определяет линию тока, вдоль которой будет перемещаться частица жидкости под действием гравитации и капиллярного давления. Напомним, что картина течения упрощена: речь идет о средней по толщине пленки скорости.

Таким образом, картина линий тока может быть построена на самом первом этапе решения, независимо от тепловых параметров задачи.

Определение скорости конденсации

В простейшем случае, скорость конденсации j_{cond} , кг/(м²с), в уравнении массового баланса (7.165) может быть задана как постоянная величина или как некоторое распределение вдоль поверхности S . В общем случае понадобится функциональная связь между скоростью конденсации и толщиной пленки. Для ламинарной пленки эта связь установлена соотношением (7.30), так что

$$\alpha = \frac{\lambda_{lq}}{\delta};$$

$$j_{\text{cond}} = \frac{q}{r} = \frac{\alpha(t_s - t_w)}{r} = \frac{1}{\delta} \frac{\lambda_{lq}(t_s - t_w)}{r}. \quad (7.176)$$

Эта форма удобна, если задано распределение температурного напора при конденсации. Если же заданы условия охлаждения на другой стороне поверхности, то понадобится уравнение локальной теплопередачи, такое как (7.4). Обсуждение аналогичной проблемы для одномерной задачи см. в п.7.3.

Структура математического описания и методы решения

После подстановки локальных соотношений (7.175) и (7.176) в уравнение массового баланса (7.165) получается дифференциальное уравнение в частных производных для толщины пленки $\delta(\xi, \eta)$, имеющее следующую структуру:

$$f(\xi, \eta, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial \xi} + g(\xi, \eta, \delta) \frac{\partial \delta}{\partial \eta} + b(\xi, \eta, \delta) = 0. \quad (7.177)$$

Это нелинейное относительно δ уравнение в частных производных первого порядка. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение таких уравнений сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Не претендуя на строгость изложения, опишем кратко механизм такого сведения [28].

Сформируем систему ОДУ, которая определит независимые переменные (ξ, η) исходной задачи (7.177) как функции некоторой новой переменной s :

$$\frac{d\xi}{ds} = f(\xi, \eta, \delta(\xi, \eta)); \quad \frac{d\eta}{ds} = g(\xi, \eta, \delta(\xi, \eta)). \quad (7.178)$$

Правые части этих уравнений – коэффициенты f и g исходного уравнения (7.177). Ясно, что эти операции похожи на параметрический способ задания кривой $(\xi(s), \eta(s))$.

Подставим далее левые части выражений (7.178) вместо коэффициентов f и g в исходное уравнение (7.177):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} + b(\xi, \eta, \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\delta}{ds} + b(\xi, \eta, \delta) = 0; \\ \left[\frac{d}{ds} \delta(\xi(s), \eta(s)) \equiv \frac{\partial \delta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \delta}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} \right]. \end{aligned} \quad (7.179)$$

В нижней строке содержится пояснение, что преобразование (\Rightarrow) основано на правиле дифференцирования сложной функции («цепном» правиле).

Записывая совместно (7.178), (7.179), получаем систему из трех ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{ds} = f(\xi, \eta, \delta) \\ \frac{d\eta}{ds} = g(\xi, \eta, \delta) \\ \frac{d\delta}{ds} = -b(\xi, \eta, \delta) \end{cases}, \quad (7.180)$$

интегрирование которой является уже относительно простой задачей, имея в виду наличие стандартного математического обеспечения, например, в пакете Mathcad. В результате, значениям параметра s будут поставлены в соответствие значения δ, ξ, η .

Следовательно, будет установлена искомая функциональная связь $\delta = \delta(\xi, \eta)$, т.е. найдено распределение толщины конденсатной пленки по поверхности охлаждаемой стенки.

Гидродинамика тонких пленок с учетом капиллярных эффектов является предметом интенсивных исследований в связи с задачами конденсации и испарения (кипения), проблемами смачивания (или смазки) в системах «газ–жидкость–твердое тело» с движущимися контактными линиями.

Заключение

Основная цель данной главы – рассмотрение базовых моделей пленочной конденсации, к которым относятся следующие виды конденсаций:

- на ламинарной гравитационной пленке;
- на ламинарной сдвиговой пленке (конденсация быстро движущегося пара);
- на турбулентной гравитационной пленке;
- на турбулентной сдвиговой пленке.

Теория этих процессов хорошо разработана и подтверждена экспериментальными данными. Результаты могут рассматриваться как простые асимптотические пределы для сложного многофакторного процесса теплообмена при конденсации. Излагаемая методика интерполяции между указанными асимптотическими пределами представляет собой эффективный способ конструирования математических моделей сложных процессов в реальных конденсационных устройствах из надежных элементарных моделей.

Изучение процессов конденсации на принятом уровне является основой для компьютерного моделирования конденсационных устройств энергетических установок посредством класса одномерных дифференциальных моделей. Изменения параметров теплоносителей (таких как температура, давление, концентрация инертных газов, расход (для проницаемых поверхностей раздела)) контролируются системой обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих законы сохранения массы, импульса, энергии, а процессы теплообмена и трения между теплоносителями описываются адекватными алгебраическими соотноше-

ниями, (например, п. 7.4 «Универсальная аппроксимация для расчета локальной теплоотдачи при конденсации»). Простым учебным примером является *одномерная дифференциальная модель* воздухоохлаждаемого конденсатора (см. п. 7.8 «Воздухоохлаждаемый конденсатор»). Известны успешные применения такого рода моделей для задач конденсации из парогазовой смеси в трубах и на пучках труб, теплообмена при испарительном охлаждении в градирнях.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем отличие пленочной и капельной конденсации чистого пара на поверхности?
2. Запишите тепловой и материальный баланс пленки конденсата.
3. Укажите динамические режимы пленки конденсата. Как рассчитать теплоотдачу в этих режимах?
4. Сформулируйте решение Нуссельта для расчета теплоотдачи при пленочной конденсации сухого насыщенного неподвижного чистого пара. Какие поправки необходимо сделать к решению Нуссельта?
5. Опишите особенности расчета теплоотдачи в ламинарном и турбулентном режимах течения пленки конденсата и при конденсации в трубах.

Глава 8. ТЕПЛОМАССОБМЕН В ПАРОГАЗОВОМ ПОТОКЕ ПРИ КОНДЕНСАЦИИ И ИСПАРЕНИИ

Неконденсирующиеся («инертные» в аспекте фазового перехода) газы в той или иной концентрации всегда присутствуют в конденсационных и испарительных устройствах (особенно в вакуумных, например, в конденсаторах паровых турбин ТЭС и АЭС) и оказывают отрицательное влияние на интенсивность теплообмена.

При конденсации водяного пара в каналах негативный эффект может быть значительным даже если начальная (на входе в канал) концентрация воздуха (инертного газа) невелика, поскольку водяной пар конденсируется и отводится из парогазового потока, в то время как воздух остается и его относительная доля возрастает. Параллельно с этим, уменьшается скорость парогазового потока. В результате, происходит значительное снижение скорости конденсации.

В конденсационных установках с воздушным охлаждением («воздушных» конденсаторах) наличие неконденсирующихся примесей создает опасность замораживания труб в случае низких отрицательных температур окружающей среды

В устройствах испарительного охлаждения, таких как градирни энергетических установок или промышленные кондиционеры, теплообмен в парогазовой среде является основным процессом, лимитирующим их производительность. То же относится к конденсационным установкам для улавливания влаги из уходящих газов (продуктов сгорания).

Наличие неконденсирующихся газов принципиально осложняет расчет конденсации и испарения. Практически непригодными оказываются методы средней теплоотдачи. Необходим расчет локальных характеристик теплообмена, должны быть определены концентрации и температуры в потоке и на поверхности раздела фаз, рассчитаны трение и поперечный поток массы на межфазной границе.

Для инженерных расчетов тепломассообмена при конденсации и испарении применяют *интегральный метод* пограничного слоя, что позволяет провести расчеты с достаточной точностью, оставаясь в рамках одномерных дифференциальных моделей, т.е. моделей на базе обыкновенных дифференциальных уравнений, для интегрирования которых имеется надежное и доступное математическое обеспечение.

Интегральный метод включает:

- интегральные уравнения сохранения импульса, энергии, массы компонентов смеси;
- законы трения, тепло - и массообмена как соотношения между локальной проводимостью пограничного слоя и локальным числом Рейнольдса, построенным по толщине потери импульса, энергии, концентрации;
- корректирующие соотношения для учета проницаемости стенки и градиента скорости внешнего потока (основное внимание уделено влиянию поперечного потока массы на трение и тепломассообмен).

8.1. Тепловые и массовые потоки на поверхности раздела фаз

Схема процессов конденсации или испарения представлена на рис. 8.1. Координата y направлена по нормали от поверхности раздела в парогазовую область. Потоки массы и энергии рассматриваются как величины со знаками, поэтому тепловой поток на стенке q_w может означать, например, подвод теплоты извне с целью обеспечить испарение стекающей пленки ($q_w > 0$) или, напротив, отвод теплоты к охлаждающей воде при пленочной конденсации ($q_w < 0$).

В парогазовой смеси (vg) различают состояния

- у поверхности раздела – индекс «0»; в некоторых случаях, в зависимости от контекста, индекс «s», т.е. «*saturation*» (насыщение) или «*surface*» (поверхность)
- и вдали от нее (индекс « ∞ »).

Соответственно массовую концентрацию инертного газа (g) обозначают как $c_{g,0}$ на поверхности раздела и $c_{g,\infty}$ в ядре парогазового потока.

Характерными значениями температур в системе являются:
 t_w – температура стенки;
 t_f – средняя по теплосодержанию температура конденсированной фазы;
 t_s – температура межфазной поверхности;
 $t_{vg,\infty}$ – средняя по теплосодержанию температура парогазовой смеси (или температура на удалении от границы раздела).

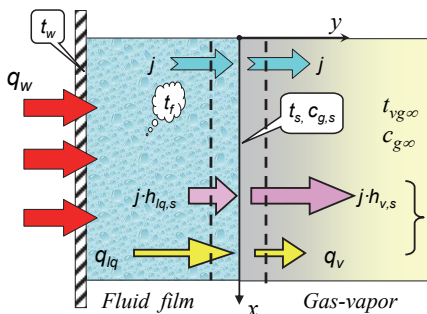


Рис. 8.1. Потoki на поверхности раздела фаз

Предметом анализа в данном параграфе будут условия сохранения массы и энергии для поверхности раздела фаз. Эти условия записываются как равенства потоков массы и энергии по обе стороны границы раздела, через обозначенные на рисунке пунктирные контрольные поверхности, расположенные *бесконечно близко* к межфазной границе.

Условие *сохранения массы* диктует равенство потоков массы j , $\text{кг}/\text{м}^2\text{с}$, по обе стороны поверхности раздела:

$$j|_{y=-0} = j|_{y=+0} \equiv j. \quad (8.1)$$

Напомним, что плотность массового потока *смеси* j представляется как (векторная) сумма потоков *компонентов*:

$$j = j_v + j_g,$$

где индекс « v » указывает на пар как компонент смеси, а индекс « g » используется для обозначения газовой компоненты.

Для двухфазной системы «вода – парогазовая смесь» мы имеем дело с так называемой *полупроницаемой* границей раздела:

межфазная поверхность *проницаема* для пара (при конденсации или испарении) и практически *непроницаема* для слабо растворимого в воде газа. Следовательно, поток газа (инертного компонента) равен нулю, а суммарный поток j парогазовой смеси на поверхности раздела есть поток пара:

$$j_g = 0 \Rightarrow j|_{y=0} \equiv j_v \neq 0. \quad (8.2)$$

Существование макроскопического (гидродинамического) течения в *поперечном* направлении на границе раздела (поток смеси $j \neq 0$) является важной особенностью теплообмена при фазовых превращениях. На рисунке 8.2 показано, как сильно деформируется поле течения под действием массопереноса на стенке (например, при конденсации). На проницаемой (рис. 8.2, справа) поверхности *поперечная* скорость V на границе раздела – ненулевая (вследствие конденсации в нашем примере):

$$V = \frac{j_v}{\rho}, \quad (8.3)$$

хотя *продольная* составляющая U по-прежнему подчиняется условию прилипания и поэтому равна нулю.

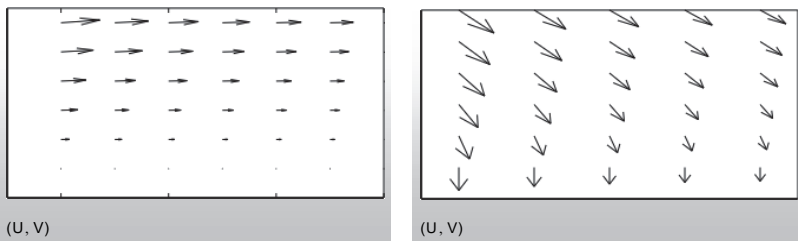


Рис. 8.2. Течение вблизи непроницаемой (слева) и проницаемой (справа) горизонтальной поверхности раздела, совпадающей с нижней кромкой рисунков (по результатам численного решения уравнения Фолкнера–Скэн для течения в пограничном слое [51])

Поскольку нормальная скорость парогазовой смеси V на границе отлична от нуля, поперечные потоки компонентов смеси вблизи поверхности раздела обусловлены обоими известными механизмами переноса: кондуктивным (под действием градиента

концентрации) и конвективным (в результате перемещения смеси со скоростью V).

Например, плотность потока паровой компоненты j_v должна быть записана как сумма диффузионной и конвективной составляющих:

$$j_v = j_{v,\text{conduct}} + j_c v, \quad (8.4)$$

С учетом (8.2)

$$j = j_v \neq 0,$$

получают важное соотношение между кондуктивным (диффузионным) потоком пара и полным потоком массы через границу раздела:

$$j_{v,\text{conduct}} = j_v - j_c v \xrightleftharpoons{j=j_v} j \cdot (1 - c_v)$$

или

$$j = j_{v,\text{conduct}} \frac{1}{(1 - c_v)}; \quad j = j_v. \quad (8.5)$$

Таким образом, нельзя отождествлять скорость испарения $j = j_v$ с диффузионным (кондуктивным) потоком пара $j_{v,\text{conduct}}$ от поверхности раздела «жидкость–пар». Если концентрация пара c_v у поверхности жидкости велика (близка к единице), то различие этих потоков может быть очень большим. С другой стороны, при испарении с поверхности *твердых* тел парциальное давление пара и его концентрация обычно малы ($c_v \ll 1$), и тогда уходящий поток вещества – это просто диффузионный поток.

Условие *сохранения энергии* формулируется как равенство нормальных к границе потоков тепловой энергии по обе стороны поверхности раздела:

$$q_{lq} + j_{lq} h_{lq,s} = q_v + (j_v h_{v,s} + j_g h_{g,s}), \quad (8.6)$$

где q_{lq} , q_v – тепловые (кондуктивные) потоки в конденсированной и газовой фазах. Поток энтальпии смеси в правой части уравнения (8.6) записан через потоки массы и *парциальные* энтальпии компонентов. Для идеальной газовой смеси парциальные значения совпадают с энтальпиями чистых компонентов.

С учетом (8.2), баланс потоков энергии запишется следующим образом:

$$q_{lq} = q_v + j(h_{v,s} - h_{lq,s}) \Rightarrow q_{lq} = q_v + jr, \quad (8.7)$$

где r – теплота парообразования, $j = j_v$ – плотность поперечного потока массы, скорость конденсации или испарения.

Тепловые (кондуктивные) потоки q_{lq} , q_v в конденсированной и газовой фазах вблизи межфазной границы определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} q_{lq} &= -\lambda_{eff,lq} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=\delta-0} = \alpha_{lq} (t_f - t_s); \\ q_v &= -\lambda_{eff,vg} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=\delta+0} = \alpha_{vg} (t_s - t_{vg,\infty}). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Индекс «eff» при коэффициентах переноса указывает, что возможен вклад турбулентного перемешивания на «жидкой», подвижной поверхности раздела фаз.

В правых частях уравнений (8.8) кондуктивные потоки выражены через термические проводимости (коэффициенты теплоотдачи) α_{lq} и α_{vg} в жидкой и газовой фазах и соответствующие температурные напоры, как это обычно делается в инженерных расчетах.

Кондуктивный (диффузионный) поток массы активного компонента записывается аналогично (8.8):

$$j_{v,conduct} = -\rho D_{eff,vg} \left. \frac{\partial c_v}{\partial y} \right|_{y=+0} = \rho \beta (c_{v,0} - c_{v,\infty}), \quad (8.9)$$

где β , м/с – коэффициент массоотдачи. Полагают, что *диффузионный* поток пропорционален разности концентраций, и коэффициент пропорциональности называют коэффициентом массоотдачи.

Из (8.5), (8.9) следует выражение для *полного* потока массы через границу, т.е. для скорости конденсации / испарения j :

$$j = \rho \beta \left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right), \quad (8.10)$$

или, в безразмерном виде:

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \underbrace{\left(\frac{\rho \beta}{\rho u_\infty} \right)}_{St_D} \underbrace{\left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right)}_{b_1} \equiv St_D b_1; \quad j = j_v; \quad (8.11)$$

$$b_1 \equiv \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}}; \quad St_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty} \equiv \frac{Nu_D}{Re Pr_D},$$

где St_D – число Стантона диффузионное, безразмерный коэффициент массоотдачи, Nu_D – число Нуссельта диффузионное, b_1 – параметр проницаемости, определяемый соотношением концентраций на межфазной границе и вдали от нее – как мы увидим далее, ключевой параметр в задачах конденсации / испарения.

Соотношения (8.8), (8.9) для потоков на границе содержат неизвестные величины температуры t_s и концентрации пара $c_{v,0}$ на межфазной поверхности. Если исключить из рассмотрения сверхинтенсивные процессы испарения / конденсации и ограничиться невысокими давлениями, то можно связать эти величины следующим образом:

- парциальное давление пара у поверхности раздела определить уравнением кривой насыщения $p_s(t_s)$,
- концентрацию пара вычислить по уравнению состояния идеального газа:

$$p_{v,0} = p_s(t_{s,0}); \quad c_{v,0} = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R_g} \left(\frac{p_{\text{mix}}}{p_{v,0}} - 1 \right)}, \quad (8.12)$$

где R_v , R_g – газовые постоянные компонентов смеси.

Соотношения (8.7)–(8.12) составляют основу инженерной методики расчета тепломассообмена при испарении и конденсации. Параметры парогазового потока вдали от поверхности, т.е. его скорость, давление, температура и концентрация инертного газа, считают заданными величинами. Проблема состоит в нахождении коэффициентов тепло- и массоотдачи, значений концентрации и температуры на поверхности раздела фаз, величин скорости конденсации или испарения.

8.2. Методика расчета тепломассообмена с помощью тройной аналогии

Как следует из соотношений (8.7), (8.8), (8.9), для расчета потоков теплоты и массы на границе раздела фаз необходимо располагать значениями коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи.

Способ определения α_{lq} зависит от вида тепломассообменного устройства.

Например, для конденсаторов или пленочных испарителей α_{lq} есть термическая проводимость жидкой пленки, зависящая от расхода, гравитации, трения на поверхности раздела, физических свойств теплоносителя.

При анализе испарительного охлаждения в градирнях оправданным может быть предположение о предельно большой проводимости стекающей по насадке пленки, так что выполняется примерное равенство характерных температур $t_w \approx t_f \approx t_s$ (рис. 8.1 и комментарии к нему).

В общем случае величина α_{lq} не тождественна термической проводимости пленки для транзитного потока тепла от поверхности раздела фаз к охлаждаемой стенке (как при пленочной конденсации пара).

Например, указанное отличие существенно для термического начального участка пленки, натекающей на твердую поверхность, или для адиабатической стенки, когда тепловой поток максимален на поверхности раздела фаз и равен нулю на твердой поверхности, или для струйных аппаратов.

В случае турбулентных пленок оценка α_{lq} должна учитывать особенности турбулентного переноса на межфазной границе.

Коэффициент теплоотдачи α_{vg} со стороны парогазового потока в первом приближении может быть рассчитан как при обтекании твердой непроницаемой поверхности. Специальными эффектами, требующими дополнительного анализа, являются сильный поперечный поток массы и особая «шероховатость» поверхности раздела.

Коэффициент массоотдачи β рассчитывается на основе *аналогии* между процессами теплообмена и массообмена, которую можно проиллюстрировать сходством законов переноса массы и энергии:

$$j_{v,\text{conduct}} = -\rho D \frac{\partial c_v}{\partial y} \Leftrightarrow q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}. \quad (8.13)$$

Полагают, что одинаковость структуры математического описания (т.е. дифференциальных уравнений переноса и граничных условий) имеет следствием одинаковость решений, т.е. расчетных уравнений для коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи. Например, если необходимо рассчитать коэффициент *массоотдачи* при обтекании шахматного пучка труб, то следует воспользоваться соответствующей «тепловой» формулой, заменив в ней тепловые величины их массообменными аналогами:

$$\begin{aligned} \text{Nu} \equiv \frac{\alpha_{vg} d}{\lambda_{vg}} = 0,4 \text{Re}_d^{0,6} \text{Pr}^{0,36}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}; \\ \Downarrow \text{Аналогия} \Downarrow \\ \text{Nu}_D \equiv \frac{\beta d}{D} = 0,4 \text{Re}_d^{0,6} \text{Pr}_D^{0,36}; \quad \text{Pr}_D = \frac{\nu}{D}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где Re_d – число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру.

При расчете теплопередачи главную роль играет соотношение (8.7) для потоков на границе раздела,

$$q_{lq} = q_v + jr,$$

которое мы перепишем, сделав подстановки из (8.8) и (8.10):

$$\alpha_{lq} (t_f - t_s) = \alpha_{vg} (t_s - t_{vg,\infty}) + \rho \beta \left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) r. \quad (8.15)$$

Вообще говоря, здесь неизвестны ни температура t_s , ни концентрация $c_{v,0}$ на поверхности раздела, и необходимо решать это уравнение, привлекая дополнительно соотношения (8.12), свя-

зывающие температуру и концентрацию. Мы продемонстрируем далее необходимые вычисления на простом примере в Mathcad'e. Дополнительные сведения приводятся в п. 8.12 (рис. 8.40 с кодом вычислительной программы divQ и рис. 8.41 с численным решением уравнения (8.15)).

Чтобы упростить вычисления, решим задачу в рамках аналогии, которая выражается наиболее лаконично в случае равенства теплового и диффузионного чисел Прандтля ($Pr = Pr_D$, как это имеет место для многоатомных газов):

$$St = St_D \Rightarrow \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} = \frac{\beta}{u_\infty} \Rightarrow \frac{\rho \beta}{\alpha_{vg}} = \frac{1}{c_p}. \quad (8.16)$$

С учетом соотношения (8.16) между коэффициентами теплоотдачи и массоотдачи, представим тепловой баланс на границе раздела в безразмерной форме (мы просто делим обе части (8.15) на $(\rho \beta r)$):

$$\underbrace{\frac{c_{p,vg} \left(\frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{vg}} (t_f - t_s) \right)}{r}}_{k_{out}} = \frac{c_{p,vg} (t_s - t_{vg,\infty})}{r} + \underbrace{\left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right)}_{b_1}. \quad (8.17)$$

Левая часть, обозначенная как k_{out} , есть относительная мера теплового потока изнутри жидкости к поверхности раздела, первое слагаемое справа – мера теплового потока от границы в парогазовую смесь, второе слагаемое – мера теплоты фазового превращения, уносимой от поверхности испаряющимся потоком. Для специальной задачи *адиабатического испарения* $k_{out} = 0$.

Список внешних параметров включает давление, температуру и концентрацию смеси. Ясно, что необходима диагностика состояния паровоздушной смеси, например, чтобы исключить режимы в термодинамической области пересыщенного состояния, с образованием капельной влаги (тумана).

Первый блок Mathcad-программы (рис. 8.3) вычисляет парциальное давление пара при заданной массовой концентрации пара. Второй блок находит массовую концентрацию $c_{v,sat}$, соответствующую насыщению при заданной температуре смеси.

$$p_v(p_{\text{mix}}, c_v) := \frac{p_{\text{mix}}}{\left[\frac{1}{R_{\text{vg}}} \cdot \left(\frac{1}{c_v} - 1 \right) + 1 \right]}$$

$$c_{v,\text{sat}}(t_{\text{mix}}, p_{\text{mix}}) := \begin{cases} p_s \leftarrow p_{\text{SatPa}}(t_{\text{mix}} + 273.15) \\ \text{if } p_s \geq p_{\text{mix}} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{" limiting value " } \\ 1 \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{" ordinary value 0-1 " } \\ \frac{1}{1 + R_{\text{vg}} \cdot \left(\frac{p_{\text{mix}}}{p_s} - 1 \right)} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$t_{\text{dew_max}}(p_{\text{mix}}) := \left| \begin{array}{l} t \leftarrow 100 \\ \text{root} \left[\left(p_{\text{mix}} - p_{\text{SatPa}}(t + 273.15) \right), t \right] \end{array} \right.$$

$$t_{\text{dew}}(p_{\text{mix}}, c_v) := \left| \begin{array}{l} t \leftarrow t_{\text{dew_max}}(p_{\text{mix}}) \\ \text{root} \left[\left(p_v(p_{\text{mix}}, c_v) - p_{\text{SatPa}}(t + 273.15) \right), t \right] \end{array} \right.$$

Рис. 8.3. Mathcad-функции для диагностики состояния парогазовой смеси

Третий блок рассчитывает точку росы («dewpoint», англ.) парогазовой смеси, то есть ту температуру, до которой следовало бы изобарически охлаждать парогазовую смесь при фиксированной массовой концентрации пара, чтобы получить состояние насыщения. Температура $t_{\text{dew_max}}$ есть температура насыщения при давлении смеси, или точка росы при максимально возможной концентрации пара ($c_v = 1$). Функция $p_{\text{SatPa}}(T)$ – это кривая насыщения (для воды, в наших расчетных примерах).

В числовом примере (рис. 8.4) рассматривается влажный воздух при атмосферном давлении и при температуре 37°C , с относительной массовой концентрацией водяного пара 50% от состояния насыщения. Как видно из вычислений величины $c_{v,\text{inf}}$, это составляет примерно 19 г влаги на 1 кг паровоздушной смеси.

Значение влажности в стандартной форме дается величиной ϕ (как отношение соответствующих парциальных давлений пара).

Точка росы в расчетном примере составляет 24,9°C (при фиксированной концентрации водяного пара $c_{v_inf} = 0,0189$). Можно сказать, что если изобарически охладить эту смесь от исходной температуры 37°C до 24,9°C, то она станет насыщенной, с влажностью 100%.

$p_{mix_} := 10^5$	$t_{inf_} := 37$	$c_{vap_rel} := 0.5$
$c_{v_sat} := c_{v.sat}(t_{inf_}, p_{mix_})$		$c_{v_sat} = 3.77 \times 10^{-2}$
$c_{v_inf_} := c_{vap_rel} \cdot c_{v.sat}(t_{inf_}, p_{mix_})$		$c_{v_inf_} = 1.89 \times 10^{-2}$
$p_{mix_} = 1 \times 10^5$	$t_{inf_} = 37$	$c_{v_inf_} = 1.89 \times 10^{-2}$
$\phi := \frac{p_v(p_{mix_}, c_{v_inf_})}{p_v(p_{mix_}, c_{v_sat})}$		$\phi = 0.51$
$t_{dew_} := t_{dew}(p_{mix_}, c_{v_inf_})$		$t_{dew_} = 24.9$
$t_{dew_max_} := t_{dew_max}(p_{mix_})$		$t_{dew_max_} = 99.65$

Рис. 8.4. Параметры состояния парогазовой смеси

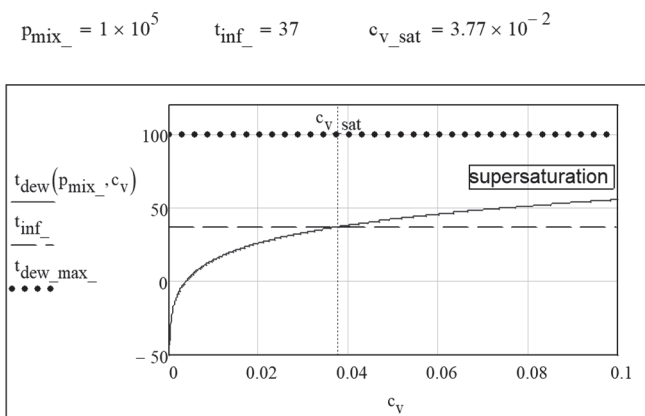


Рис. 8.5. Изменение точки росы в зависимости от концентрации пара в парогазовой смеси при фиксированной температуре смеси t_{inf}

С увеличением концентрации водяного пара температура точки росы увеличивается (рис. 8.5). При переходе через критическое значение c_{v_sat} состояние становится пересыщенным, что приводит к образованию капельной влаги (тумана, облаков в атмосфере).

Состояние смеси на межфазной границе и тепловые и массовые потоки на поверхности раздела контролируются Mathcad-функциями, показанными на рис. 8.6.

Функция « $k_out(t_{surf}, \dots)$ » представляет основное уравнение модели (8.17) как зависимость безразмерного теплового потока в конденсированной фазе от температуры межфазной границы (график на рис. 8.7). Обратная функция t_{surf} использует встроенный алгоритм «root» для нахождения температуры на границе раздела. Функция J_evap представляет вклад испарения/конденсации в балансе (8.17) (как видно из (8.17), эта величина численно равна параметру проницаемости b_1).

$$k_out(t_{surf}, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) := \left| \begin{array}{l} c_{v_surf} \leftarrow c_{v_sat}(t_{surf}, P_{mix}) \\ \frac{c_{v_surf} - c_{v_inf}}{1 - c_{v_surf}} + c_{p_vg} \cdot \frac{(t_{surf} - t_{inf})}{r_0} \end{array} \right.$$

$$t_{surf}(P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}, k_{out}) := \left| \begin{array}{l} t_s \leftarrow \frac{t_{dew}(P_{mix}, c_{v_inf}) + t_{dew_max}(P_{mix})}{2} \\ \text{root}[(k_out(t_s, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) - k_{out}), t_s] \end{array} \right.$$

$$J_evap(t_{surf}, P_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) := \left| \begin{array}{l} c_{v_surf} \leftarrow c_{v_sat}(t_{surf}, P_{mix}) \\ \frac{c_{v_surf} - c_{v_inf}}{1 - c_{v_surf}} \end{array} \right.$$

Рис. 8.6. Mathcad-функции для вычисления теплового потока, температуры межфазной поверхности и скорости испарения/конденсации

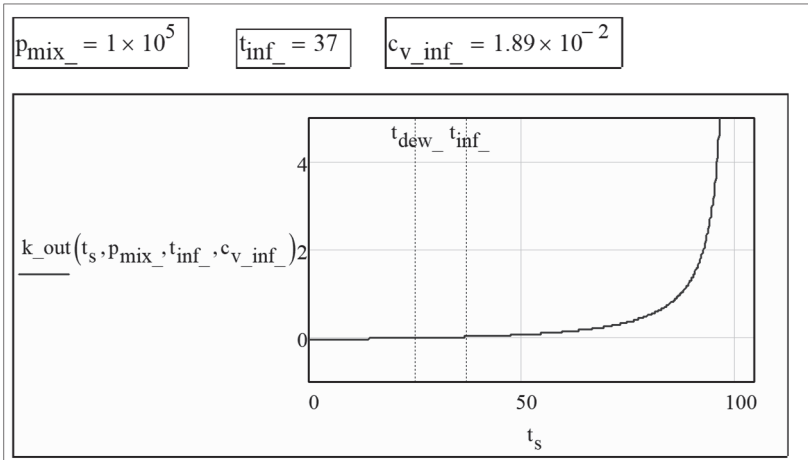


Рис. 8.7. Тепловой поток на поверхности конденсированной фазы как функция температуры поверхности, $k_{out}(t_s)$

Характерным граничным режимом является *адиабатическое испарение*, когда тепловой поток в жидкой фазе q_{lq} (рис. 8.1 и уравнение (8.7)) оказывается равным нулю. Актуальная область адиабатического испарения, $k_{out}(t_s) \rightarrow 0$, специально показана на рис. 8.8 в увеличенном масштабе.

Диаграмма $k_{out}(t_s)$ на рис. 8.8 дополнена кривой скорости испарения/конденсации, построенной по формуле для J_{evap} (см. фрагмент Mathcad-программы на рис. 8.6, а также соотношения (8.17) и комментарий к ним в тексте).

Видно, что в режиме *адиабатического испарения* – при нулевом тепловом потоке k_{out} в конденсированной фазе – скорость фазового превращения J_{evap} есть ненулевая положительная величина. Это означает, что теплота, подводимая со стороны горячего газа ($t_{inf} > t_{surf}$), полностью расходуется на испарение жидкости. Характерное значение температуры межфазной границы в этом режиме часто называют «температурой мокрого термометра».

Когда температура поверхности становится равной точке росы t_{dew} , скорость испарения/конденсации обращается в ноль,

в то время как тепловой поток k_out будет ненулевой отрицательной величиной. Это граничная ситуация *однофазного* – без фазовых превращений – теплообмена.

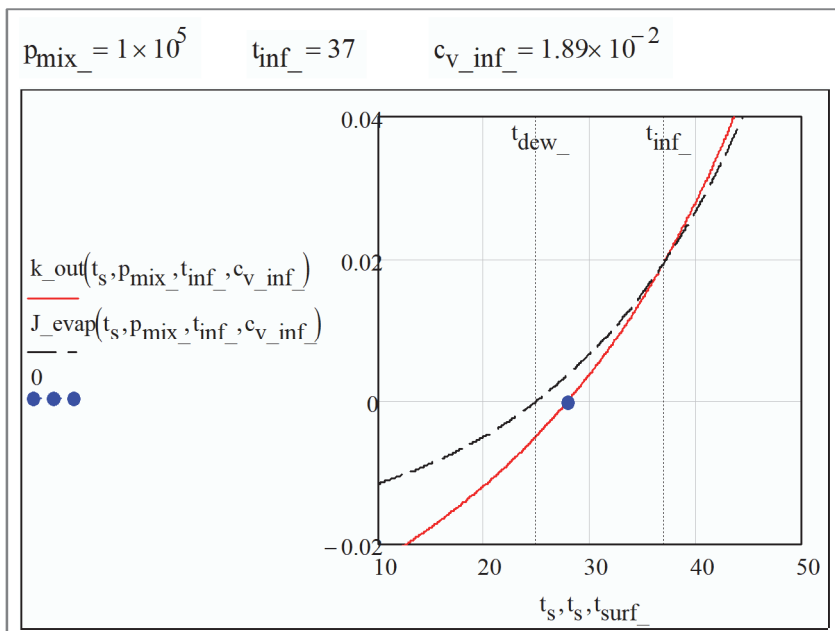


Рис. 8.8. Адиабатическое испарение, $k_out(t_s) \rightarrow 0$ (температура парогазовой смеси («температура сухого термометра») $t_{inf} = 37^\circ\text{C}$, «температура мокрого термометра» $t_{surf} = 27,9^\circ\text{C}$ (отмечена жирной точкой), температура точки росы $t_{dew} = 27,9^\circ\text{C}$ (отмечена жирной точкой), температура точки росы $t_{dew} = 24,9^\circ\text{C}$)

Существует еще один специальный режим, когда температура поверхности сравнивается с температурой паровоздушной среды t_{inf} (на уровне 37°C в числовом примере). Теплота, подводимая к поверхности раздела изнутри конденсированной фазы, в точности равна теплоте испарения. Это пример *испарительного охлаждения*. Так функционирует встроенная система транспирационного охлаждения человека как биологического объекта.

Испарительное охлаждение будет работать, даже если температура окружающей среды превысит температуру тела. Благо-

даря испарительному охлаждению биологические объекты могут выживать в условиях экстремально высоких температур, если только влажность воздуха далека от условий насыщения. Влияние параметра $c_{\text{vap_rel}}$ (рис. 8.4), задающего относительную концентрацию пара на удалении от границы, читателю предлагается исследовать самостоятельно, используя приведенные Mathcad-программы.

Представленная выше и иллюстрированная диаграммой на рис. 8.8 сложная диспозиция обусловлена совместным действием двух термодинамических сил: разности температур и разности концентраций.

Процесс конденсации из парогазовой смеси с различной (уменьшающейся) концентрацией инертных газов $c_{g\infty}$ иллюстрируется двумя графиками на рис. 8.9, рис. 8.10. В качестве управляющего параметра выбрана температура t_s на границе раздела фаз «парогазовая смесь – конденсатная пленка». На графиках можно проследить, как изменяются:

- концентрация инертного газа на границе раздела c_{g_surf}
- и отношение концентраций, определяющее параметр проницаемости $b_1 = (c_{g\infty}/c_{g_surf}) - 1$ в зависимости от температуры поверхности раздела (этой температурой можно управлять, варьируя интенсивность охлаждения конденсатора).

При конденсации практически *чистого* пара (рис. 8.10) даже очень малое снижение температуры поверхности раздела фаз приводит к выходу на предельное значение параметра проницаемости: $b_1 \rightarrow -1$, т.е. на режим *асимптотического отсоса* из парогазового пограничного слоя:

$$b_1 = \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1;$$

$$\boxed{1 \gg c_{g,0} \gg c_{g,\infty}} \Rightarrow b_1 + 1 \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \ll 1 \Rightarrow b_1 \approx -1.$$

В этом режиме скорость конденсации уже не лимитируется диффузионными процессами.

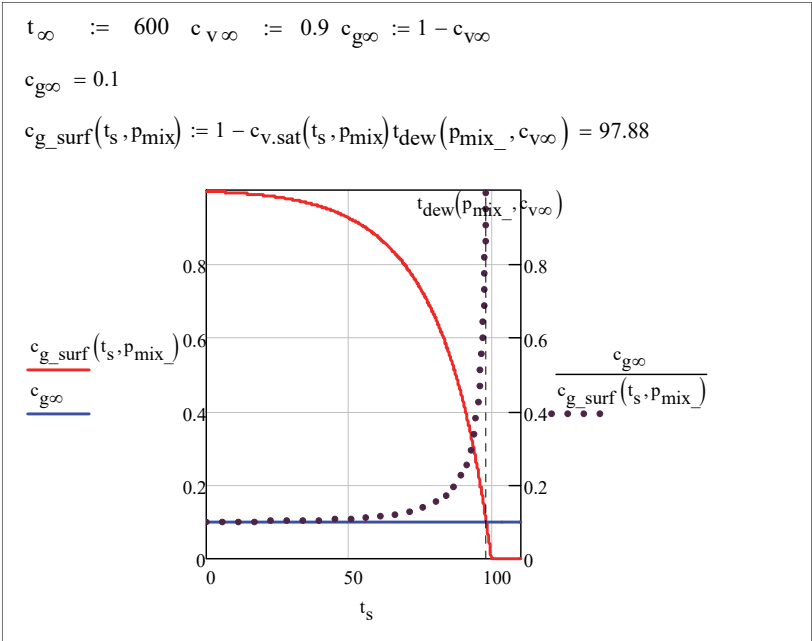


Рис. 8.9. Конденсация пара с заметными примесями неконденсирующегося газа

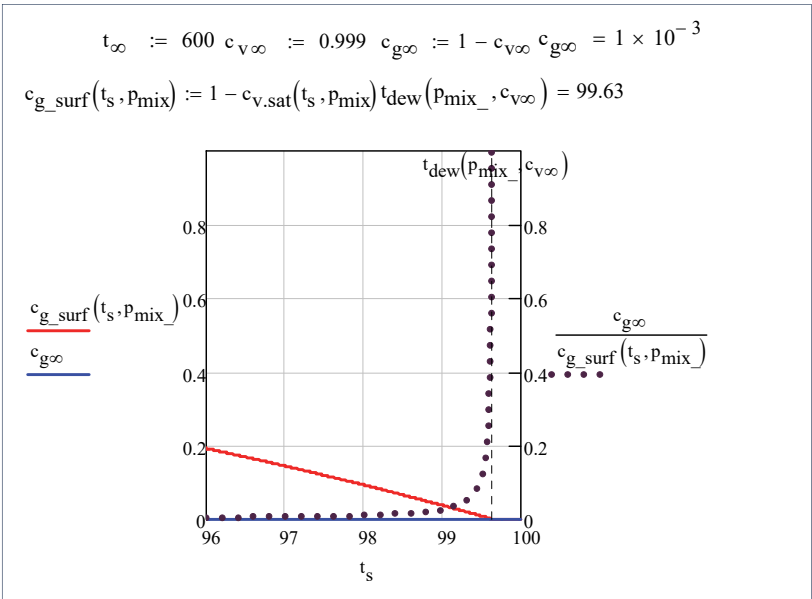


Рис. 8.10. Конденсация практически чистого пара

Выше мы оперировали в расчетах с относительными (безразмерными) величинами потоков. Однако, если потребуется рассчитать их реальные, размерные значения, потребуются и величины коэффициентов массоотдачи β и теплоотдачи α_{vg} (формулы (8.15) – (8.17)).

Элементарная методика расчета, проиллюстрированная соотношениями (8.14), обеспечивает приемлемую точность, если *поперечный поток массы* на поверхности раздела относительно невелик и еще не вносит заметных искажений в поле течения (таких, как на рис. 8.2, справа).

В общем случае, в формулы вида (8.14) для теплоотдачи и массоотдачи вводят *корректирующий фактор* $\Psi_x(b_1)$:

$\Psi_x(b_1 < 0) > 1$: конденсация, отсос из пограничного слоя;

$\Psi_x(b_1 > 0) < 1$: испарение, вдув в пограничный слой; (8.18)

$$\alpha = \alpha_{j \rightarrow 0} \cdot \Psi_x(b_1); \quad \beta = \beta_{j \rightarrow 0} \cdot \Psi_x(b_1).$$

При вдуве (испарении) происходит увеличение толщины парогазового пограничного слоя и, следовательно, увеличение сопротивления переносу.

Напротив, при отсосе (конденсации) пограничный слой в парогазовом потоке становится значительно тоньше (и сопротивление переносу меньше), чем для обтекания непроницаемой поверхности при той же скорости набегающего потока.

Кроме того, изменяется структура пограничного слоя. При вдуве формируется отесненный от стенки S-образный профиль скорости с перегибом.

Напротив, при отсосе профиль прижимается к стенке и становится более заполненным. Эти эффекты удовлетворительно описываются аппроксимацией для корректирующего фактора Ψ_x , представленной на рис. 8.11 (ее обоснованию посвящена значительная часть продолжения данной главы).

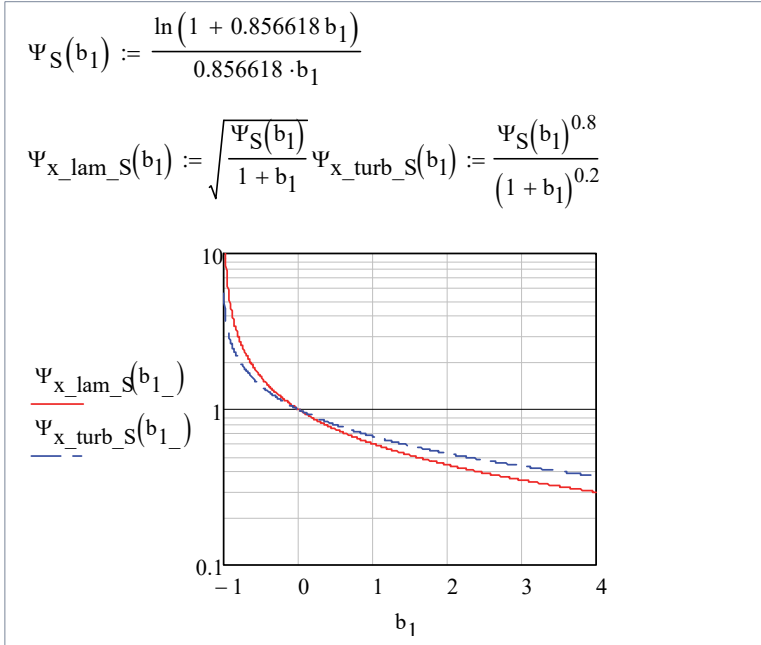


Рис. 8.11. Корректирующий фактор $\Psi_x(b_1)$

Влияние поперечного потока массы на интенсивность теплообмена иллюстрируется на рис. 8.12. По горизонтальной оси отложены значения температуры межфазной поверхности, по вертикальной – значения безразмерной скорости испарения/конденсации, скорректированные ($J \cdot \Psi_x$) с учетом поперечного потока массы (рис. 8.11) и без коррекции (J). Напомним, что переключение испарения ($J > 0$) на конденсацию ($J < 0$) происходит при температуре поверхности, соответствующей точке росы (рис. 8.8).

Когда температура поверхности t_s приближается к значению t_{dew_max} (рис. 8.12), наблюдается неограниченный рост скорости испарения ($J > 0$), несмотря на демпфирующее действие Ψ -коррекции (для случая вдува в парогазовый пограничный слой). Хотя физический предел скорости испарения существует – разумным ограничением является скорость звука – однако он не связан, по-видимому, с собственно процессом массообмена.

$$J\Psi_{x_evap}(t_{surf}, p_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) := \begin{cases} b_1 \leftarrow J_evap(t_{surf}, p_{mix}, t_{inf}, c_{v_inf}) \\ \Psi_{x_lam_s}(b_1) \cdot b_1 \end{cases}$$

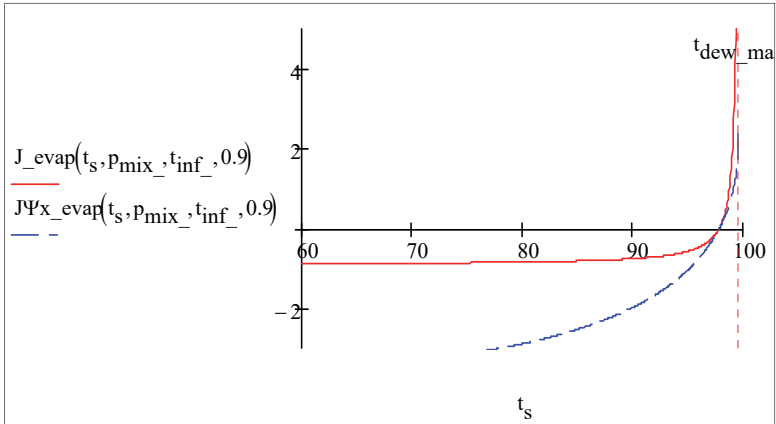


Рис. 8.12. Испарение/конденсация с учетом Ψ_x -коррекции на поперечный поток массы ($t_{inf} = 600^\circ\text{C}$; $p_{mix} = 10^5$ Па; $c_v = 0,9$; $t_{dew_max} = 99,65^\circ\text{C}$)

При конденсации ($J < 0$) Ψ_x -коррекция увеличивает интенсивность переноса. Предельный переход к конденсации *чистого* (без примесей инертного газа) пара осуществляется через стадию «сильной» конденсации:

$$b_1 = \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1;$$

$$\boxed{1 \gg c_{g,0} \gg c_{g,\infty}} \Rightarrow b_1 + 1 \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \ll 1 \Rightarrow b_1 \approx -1;$$

$$\Psi_x = \frac{\sqrt{\Psi_S(b_1)}}{\sqrt{1 + b_1}} \approx \frac{\sqrt{2,267}}{\sqrt{\frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}}}} \Rightarrow \infty \quad (8.19)$$

$$j = \rho\beta b_1 \Psi_x \approx -\rho\beta \sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_{g,\infty}}} \rightarrow -\infty.$$

Соотношение концентраций инертного газа в объеме и на поверхности раздела определяется сильными неравенствами, отмеченными рамкой. Предельное соотношение $j \rightarrow -\infty$ означает, что диффузионные процессы перестают ограничивать скорость конденсации, если содержание инертных примесей $c_{g\infty}$ стремится к нулю; разумный физический предел определяется скоростью звука в паровой фазе. Итак, в рамках *элементарной методики* рассчитывают коэффициенты тепло - и массоотдачи в парогазовом потоке по формулам вида (8.14) и решают уравнение (8.15), чтобы согласовать тепловые потоки по обеим сторонам поверхности раздела фаз. Далее рассматривается *интегральный метод* пограничного слоя как эффективный и относительно простой способ решения *сложных* инженерных задач тепломассообмена при *интенсивных* процессах конденсации и испарении, когда необходим учет поперечного потока массы, сильно деформирующего поле течения вблизи стенки (рис. 8.2).

8.3. Интегральные уравнения пограничного слоя

Интегральные уравнения динамического, диффузионного и теплового пограничных слоев, формирующихся на поверхности раздела фаз в парогазовом потоке, представляют собой формулировки законов сохранения (импульса, массы, энергии) для специального контрольного объема, охватывающего всю толщину пограничного слоя δ_* и дифференциально малого (dx) в продольном направлении (рис. 8.13):

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\left((\rho u_\infty \delta_{**}) \cdot u_\infty \right)}_{\text{Потеря импульса}} = \tau + j u_\infty + \frac{dP_\infty}{dx} \delta_* . \quad (8.20)$$

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\left((\rho u_\infty \delta_{D**}) \cdot (c_{v,\infty} - c_{v,0}) \right)}_{\text{Потеря концентрации}} = -j_{v,\text{conduct}} + j (c_{v,\infty} - c_{v,0}) . \quad (8.21)$$

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\left[(\rho u_\infty \delta_{T**}) c_p (t_\infty - t_0) \right]}_{\text{Потеря энтальпии}} = -q + j c_p (t_\infty - t_s) , \quad (8.22)$$

где δ_* , δ_{**} , δ_{T**} , δ_{D**} – специальные меры толщины пограничного слоя (см. далее), j , q , τ – плотности потоков массы, теплоты, импульса на границе раздела (индекс «0») со стороны парогазового потока.

Исходные модельные представления иллюстрируются ниже на примере *динамического* пограничного слоя.

В теории пограничного слоя поток жидкости у стенки разделяется на внешнюю область течения и собственно пограничный слой. Поскольку жидкость у стенки тормозится *силами вязкости* (жидкость «налипает» на стенке), внешний поток несколько оттесняется от обтекаемой поверхности. Мерой этого эффекта является *толщина вытеснения* δ_* , определяемая соотношением:

$$\rho u_\infty \delta_* = \int_0^\infty \rho(u_\infty - u(y)) dy,$$

в левой части которого записано уменьшение расхода на основе модельного представления (рис. 8.13), а в правой – дано точное выражение этой величины.

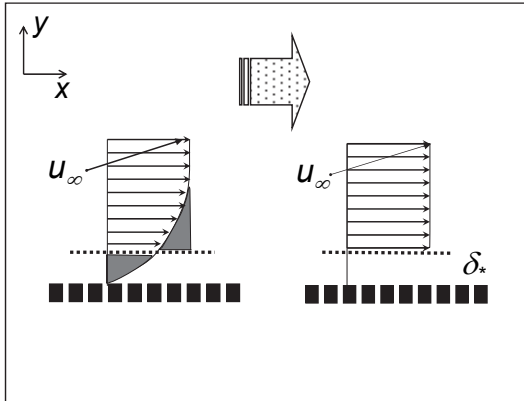


Рис. 8.13. Толщина вытеснения δ_* :

слева – истинный профиль скорости; справа – модельное представление

Таким образом, согласно определению

$$\delta_* = \frac{\int_0^\infty \rho(u_\infty - u(y)) dy}{\rho u_\infty}. \quad (8.23)$$

Предполагается, что внешний поток движется за пределами слоя δ_* , обтекая так называемое «тело вытеснения». Например, если речь идет о течении в сопле, то его сечение суживается за счет добавления к профилю сопла толщины вытеснения пограничного слоя δ_* .

Во внешнем потоке действием сил вязкости пренебрегают и считают течение жидкости стационарным и безвихревым. Для таких течений справедливо уравнение Бернулли (при $\rho = \text{const}$):

$$\frac{\rho u_\infty^2}{2} + p = \text{const}.$$

Напротив, в области пограничного слоя действие сил вязкости является определяющим. Именно вязкость тормозит набегающий поток вплоть до нулевой скорости на обтекаемой твердой поверхности. Другой актуальной силой в пограничном слое является продольный градиент давления, действующий из внешнего, ускоряющегося или замедляющегося, потока. Наконец, следует учесть динамическое взаимодействие с вдуваемым через проницаемую стенку газом.

Указанные эффекты описываются интегральным уравнением динамического пограничного слоя (8.20), представляющим собой формулировку закона сохранения импульса для специального контрольного объема, охватывающего всю толщину пограничного слоя δ_* и дифференциально малого в продольном направлении. Напомним, что сохраняемая величина – импульс единичного контрольного объема – есть произведение его массы (т.е. плотности жидкости) на вектор скорости:

$$\rho w, \text{ (кг м/с)/м}^3.$$

Продольная проекция скорости « u » есть импульс единичной массы, ориентированный по основному направлению движения жидкости.

Величина δ_{**} (рис. 8.14, правый нижний фрагмент) называется *толщиной потери импульса*, поскольку в пределах слоя δ_{**} полностью теряется (из-за торможения на границе) избыточное (по отношению к заторможенному состоянию) значение импульса u_∞ .

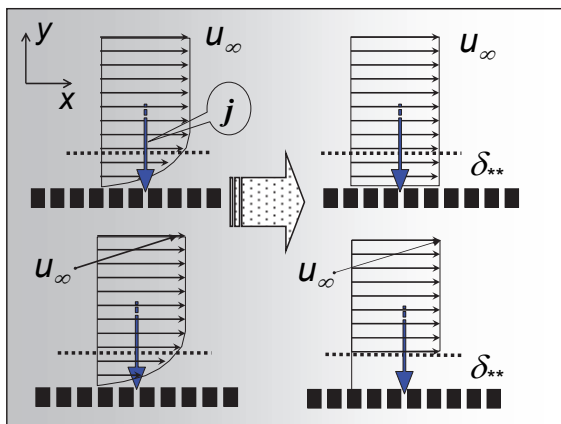


Рис. 8.14. Динамический пограничный слой на проницаемой стенке:
 слева: истинные профили скорости (вверху)
 и переносимой величины – продольного импульса (внизу);
 справа: модельное представление этих распределений

Величина $(\rho u_\infty \delta_{**})$ представляет собой массовый расход потерявшего избыточный импульс флюида. Строгое определение δ_{**} задается соотношением:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \rho u(y)(u_\infty - u(y)) dy}_{\text{Потеря импульса}} \xrightarrow{\text{Модельное представление}} \underbrace{(\rho u_\infty \delta_{**})}_{\text{Массовый расход}} \cdot \underbrace{(u_\infty - 0)}_{\text{Потеря импульса единичной массой}} \quad (8.24)$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_{**} = \int_0^{\infty} \frac{u(y)}{u_\infty} \left(1 - \frac{u(y)}{u_\infty} \right) dy.$$

Отношение H характерных толщин δ_* и δ_{**} называют *форм-параметром* пограничного слоя:

$$H \equiv \frac{\delta_*}{\delta_{**}}. \quad (8.25)$$

Это наглядный индикатор деформаций профиля скорости $u(y)$ под действием вдува или отсоса через проницаемую стенку.

Согласно уравнению сохранения (8.20), потеря импульса *увеличивается* (символ d/dx) при движении вдоль неподвижной стенки из-за:

- трения на стенке (границе раздела)

$$\tau_I = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=+0} ; \quad (8.26)$$

- затрат импульса на ускорение поперечного массового потока j , поступающего через поверхность раздела, от нулевой продольной скорости на границе до скорости внешнего потока парогазовой смеси (скорость конденсированной фазы полагают малой по сравнению со скоростью парогазового потока);

- действия продольного градиента давления в пределах слоя с толщиной вытеснения δ_* .

Индекс «0» указывает, что величины относятся к межфазной границе, на которой происходят фазовые превращения. *Проницаемость* поверхности раздела для потоков массы является принципиальной особенностью задач о фазовых превращениях по сравнению с обычными задачами конвективного теплообмена на твердых стенках.

Согласно уравнению сохранения компонента смеси (8.21), *потеря концентрации* компонента V (пара) в слое $\delta_{D^{**}}$, называемом толщиной потери концентрации, *увеличивается* вдоль проницаемой поверхности вследствие

- отвода рассматриваемого компонента смеси к стенке посредством диффузии

$$j_{V, \text{conduct}} = -\rho D \left. \frac{\partial c_V}{\partial y} \right|_{y=0} ; \quad (8.27)$$

- затрат на обогащение этим компонентом двухфазного потока j .

Согласно уравнению сохранения энергии (8.22), для относительно медленных (несжимаемых) течений потеря энтальпии в слое $\delta_{T^{**}}$, охлажденном до температуры границы раздела, *увеличивается* при движении парогазового потока вдоль холодной стенки в результате:

• теплоотода к стенке (границе раздела) посредством теплопроводности

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=+0}; \quad (8.28)$$

• затрат на подогрев вдуваемого теплоносителя j от t_s до t_∞

Нормальная к поверхности раздела координата направлена из конденсированной в парогазовую фазу. Поэтому при конденсации поток массы j через границу раздела имеет отрицательный знак (отсос из парогазового пограничного слоя), а при испарении – положительный (вдув в парогазовый поток).

Уравнения пограничного слоя (8.20), (8.21), (8.22) записаны в форме обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Они являются редуцированными представлениями более сложных дифференциальных уравнений пограничного слоя в частных производных.

Термин «интегральные уравнения» для (8.20), (8.21), (8.22) используется потому, что *искомые* величины δ_{**} (рис. 8.14, уравнение (8.24)), δ_{D**} , δ_{T**} под знаком производной d/dx являются средневзвешенными (по скорости, концентрации, температуре) *интегральными* (по поперечной координате y) оценками толщины пограничного слоя. Толщины потери концентрации δ_{D**} и энтальпии δ_{T**} определяются аналогично толщине потери импульса δ_{**} (8.24), например:

$$\underbrace{\int_0^\infty \rho u(y) c_p (t_\infty - t(y)) dy}_{\text{Потеря энтальпии}} \xrightarrow{\text{Модельное представление}} \xrightarrow{\text{Модельное представление}} \underbrace{(\rho u_\infty \delta_{T**})}_{\text{Массовый расход}} \cdot \underbrace{[c_p (t_\infty - t_0)]}_{\text{Потеря энтальпии единичной массой}} \quad (8.29)$$

откуда следует:

$$\delta_{T**} = \frac{\int_0^\infty \rho u(y) c_p (t_\infty - t(y)) dy}{\rho u_\infty c_p (t_\infty - t_0)}. \quad (8.30)$$

Неизвестные распределения скорости $u(y)$ и температуры $t(y)$ входят под знаком интеграла, что и является признаком «интегрального» уравнения.

Толщины пограничных слоев δ_{**} , δ_{D**} , δ_{T**} рассматриваются как новые неизвестные (зависимые переменные). Кроме δ_{**} , δ_{D**} , δ_{T**} , в уравнениях (8.20), (8.21), (8.22) содержатся также неизвестные величины потоков импульса τ , массы $j_{v, \text{conduct}}$ и теплоты q на поверхности. Необходимые дополнительные функциональные связи между $(\delta_{**}, \delta_{D**}, \delta_{T**})$ и $(\tau, j_{v, \text{conduct}}, q)$ устанавливаются ниже в следующих параграфах. Располагая этими замыкающими соотношениями, уравнения пограничного слоя (8.20), (8.21), (8.22) можно проинтегрировать по продольной координате x как *обыкновенные* дифференциальные уравнения.

Если заданы концентрация и температура на поверхности раздела, то в результате интегрирования получатся искомые значения толщин пограничных слоев $(\delta_{**}, \delta_{D**}, \delta_{T**})$ и потоков (массы j , теплоты q , импульса τ) на границе. Если же заданы потоки через границу, то при решении определяются значения концентрации и температуры на поверхности раздела.

Укажем на одно ограничение в постановке задачи, принятое в дальнейшем. Предполагается, что парогазовый поток является безградиентным, ($dP_{\infty}/dx \approx 0$ в (8.20)), т.е. движется с практически постоянной скоростью u_{∞} . Тем самым наше внимание концентрируется на принципиально важной особенности течений с фазовыми превращениями – проницаемости границы для поперечных потоков массы.

8.4. Стандартные законы

Под *стандартными* законами трения, тепло- и массообмена в контексте интегрального метода понимают соотношения

$$c_{f0} = c_{f0}(\text{Re}_{**}); \quad \text{St}_0 = \text{St}_0(\text{Re}_{T**}, \text{Pr}); \quad \text{St}_{D0} = \text{St}_{D0}(\text{Re}_{D**}, \text{Pr}_D) \quad (8.31)$$

между *локальными* числами Рейнольдса, построенными по толщине пограничного слоя:

$$\text{Re}_{**} = \frac{u_{\infty} \delta_{**}}{\nu}; \quad \text{Re}_{D**} = \frac{u_{\infty} \delta_{D**}}{\nu}; \quad \text{Re}_{T**} = \frac{u_{\infty} \delta_{T**}}{\nu} \quad (8.32)$$

и *локальными* значениями безразмерных комплексов (чисел), характеризующих интенсивность переноса на поверхности раздела:

$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{(\tau_0/u_\infty)}{\rho u_\infty}; \quad St_D \equiv \frac{(j_{v,conduct,0}/(c_{v,0} - c_{v,\infty}))}{\rho u_\infty}; \quad (8.33)$$

$$St \equiv \frac{(q_0/(t_0 - t_\infty))}{\rho u_\infty c_p}.$$

Индекс «0» (при записи коэффициента трения c_{f0} , числа Стантона диффузионного St_{D0} и числа Стантона теплового St_0) означает, что соотношения (8.31) установлены (теоретически и/или экспериментально) для простейшей классической задачи конвективного теплообмена, а именно, для обтекания *безградиентным* внешним потоком *непроницаемой* пластины с заданными *постоянными* значениями температуры и концентрации на поверхности. Указанные граничные условия называют *стандартными* условиями. Процедура установления стандартного закона теплообмена для ламинарного режима подробно рассмотрена в гл. 2 «Теплообмен и трение в пограничном слое», п. «Закон теплообмена».

Определения коэффициента трения и чисел Стантона в (8.33) имеют одинаковую структуру и интерпретируются следующим образом. В числителе записано отношение потока переносимой величины к движущей силе переноса, т.е. *проводимость* (например, коэффициент теплоотдачи $\alpha \equiv q/\Delta t$). В знаменателе – масштаб для этой величины, равный (или пропорциональный) массовой скорости ρu_∞ .

Статус соотношений (8.31) как *законов* определяется тем, что они связывают *локальную* интенсивность переноса (c_f , St) с *локальным* числом Рейнольдса, построенным по *локальной* толщине пограничного слоя. Благодаря этому, соотношения приобретают свойство универсальности, в отличие от обычных критерийных расчетных формул, специализированных для различных частных задач (таких, например, как (8.14)).

Стандартные законы (8.31) аппроксимируются следующими степенными формулами:

для ламинарного режима $Re^{**} < Re^{**}_{cr} \approx 400$:

$$\begin{aligned} \frac{c_{f0}}{2} &= \left(\frac{0,22}{Re^{**}} \right); \\ St_{D0} &= \left(\frac{0,22}{Re_{D^{**}}} \right) \left[\frac{1}{Pr_D^{4/3}} \right]; \\ St_0 &= \left(\frac{0,22}{Re_{T^{**}}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{4/3}} \right]; \end{aligned} \quad (8.34)$$

для турбулентного режима $Re^{**} > Re^{**}_{cr} \approx 400$:

$$\begin{aligned} \frac{c_{f0}}{2} &= \left(\frac{0,0128}{Re^{**0,25}} \right); \\ St_{D0} &= \left(\frac{0,0128}{Re_{D^{**}0,25}} \right) \left[\frac{1}{Pr_D^{0,75}} \right]; \\ St_0 &= \left(\frac{0,0128}{Re_{T^{**}0,25}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{0,75}} \right]. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Если значения коэффициентов температуропроводности, диффузии и кинематической вязкости теплоносителя одинаковы, т.е.

$$Pr \equiv \frac{\nu}{a} = 1; \quad Pr_D \equiv \frac{\nu}{D} = 1, \quad (8.36)$$

то динамический, диффузионный и тепловой пограничные слои развиваются одинаково, их толщины и локальные числа Рейнольдса одинаковы. В результате из формулировок стандартных законов (8.34), (8.35) следует соотношение:

$$\frac{c_{f0}}{2} = St_{D0} = St_0. \quad (8.37)$$

Эти равенства являются выражением так называемой *тройной аналогии* между процессами переноса импульса, массы компонента смеси и энергии. Дальнейший анализ относится к газовым смесям, для которых условие (8.36) не нарушается слишком сильно.

В основе аналогии лежит единообразие формулировок уравнений сохранения (уравнений (8.20)–(8.22) при $j=0$, $dP/dx=0$) и законов переноса (8.26)–(8.28). Условием аналогии является также *однотипность граничных условий* на поверхности раздела: задается постоянная температура, постоянная концентрация и постоянная (нулевая для твердой стенки) скорость обтекания.

Границы аналогии ставятся различиями в структуре математического описания динамической задачи (8.20), с одной стороны, и тепловой (8.21) или массообменной (8.22) задач, с другой. Уравнение импульсов (8.20) содержит в правой части *оператор сил давления*, не имеющий аналога в двух других уравнениях (8.21) и (8.22). Поэтому для течений с отличным от нуля продольным градиентом давления, $dP/dx \neq 0$, аналогия между сопротивлением и теплоотдачей (массоотдачей) нарушается. В особенности это относится к отрывным течениям.

С другой стороны, благодаря сходству структуры уравнений теплового и диффузионного пограничных слоев (8.21) и (8.22), *аналогия между тепло- и массообменом* имеет более широкую область применения. Практическая полезность такой «двойной» аналогии определяется тем, что обширная база данных по теплообмену может быть использована для решения гораздо менее исследованных задач массообмена.

Предметом анализа в дальнейшем является *влияние поперечного потока массы j на трение и тепломассообмен*. Для многих практически важных задач двухфазного тепломассообмена при течениях с небольшими градиентами давления именно эта проблема является существенной. Воздействие продольного градиента давления dP/dx является специальным вопросом, не рассматриваемым здесь. Отметим только, что законы теплообмена и массообмена *консервативны* по отношению к фактору градиента давления, в то время как трение существенно зависит от него.

При формулировке расчетных соотношений использован метод *факторизации*, т.е. представления функциональной зависимости в виде *произведения* множителей, каждый из которых зависит от единственного влияющего параметра (или выделенной группы параметров).

Стандартные законы (8.34), (8.35), уже даны в факторизованной форме, что подчеркивается применением скобок:

- тройная аналогия (см. (8.36), (8.37)) выражается множителями в круглых скобках;
- влияние физических свойств теплоносителей отражается множителями (факторами) в квадратных скобках, зависящими от числа Прандтля.

В следующем параграфе в законы трения, массообмена и теплообмена вводится *фактор проницаемости* стенки, определяемый поперечным потоком массы при вдувании (blowing) или отсасывании (suction) через поверхность раздела, или, соответственно, при испарении или конденсации.

8.5. Влияние поперечного потока массы

Изменение трения, тепло- и массообмена под влиянием поперечного потока массы через проницаемую поверхность раздела учитывается *корректирующими факторами* Ψ :

$$\Psi \equiv \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{\text{Re}_{**}} ; \quad \Psi_D \equiv \left(\frac{St_D}{St_{D0}} \right)_{\text{Re}_{D**}} ;$$

$$\Psi_T \equiv \left(\frac{St}{St_0} \right)_{\text{Re}_{T**}} ,$$
(8.38)

которые задают отношения истинных (при включенном вдуве/отсосе) и стандартных (при нулевом вдуве/отсосе) коэффициентов трения и чисел Стантона.

Сопоставление производится при фиксированных значениях числа Рейнольдса Re_{**} (для трения), или Re_{D**} (для массообмена), или Re_{T**} (для теплообмена), т.е. при фиксированных значениях толщин динамического, диффузионного и теплового пограничных слоев (8.32).

Величина Ψ – фактора зависит от поперечного потока массы j , фигурирующего в правых частях уравнений пограничного слоя (8.20), (8.21), (8.22).

Безразмерный *параметр проницаемости* b , пропорциональный поперечному потоку j , получают при нормировании правых частей уравнений пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((\rho u_\infty^2) \delta_{**} \right) &= (\rho u_\infty^2) \left(\frac{\tau}{\rho u_\infty^2} + \frac{j u_\infty}{\rho u_\infty^2} \right) \equiv (\rho u_\infty^2) \left(\frac{c_f}{2} + \frac{j}{\rho u_\infty} \right) \equiv \\ &\equiv (\rho u_\infty^2) \frac{c_f}{2} \left(1 + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{c_f}{2}}}_{b_1} \right) \equiv (\rho u_\infty^2) \frac{c_{f0}}{2} \left(\Psi + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{c_{f0}}{2}}}_b \right). \end{aligned} \quad (8.39)$$

$$\Delta c_v \equiv c_{v\infty} - c_{v0};$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((\rho u_\infty \Delta c_v) \delta_{D**} \right) &= (\rho u_\infty \Delta c_v) \left(\frac{-j D_v}{\rho u_\infty \Delta c_v} + \frac{j \Delta c_v}{\rho u_\infty \Delta c_v} \right) \equiv \\ &\equiv (\rho u_\infty \Delta c_v) St_D \left(1 + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D}}_{b_{D1}} \right) \equiv \\ &\equiv (\rho u_\infty \Delta c_v) St_{D0} \left(\Psi_D + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_{D0}}}_{b_D} \right); \end{aligned} \quad (8.40)$$

$$\Delta t \equiv t_\infty - t_s;$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left((\rho u_\infty c_p \Delta t) \delta_{T**} \right) &= (\rho u_\infty c_p \Delta t) \left(\frac{-q}{\rho u_\infty c_p \Delta t} + \frac{j c_p \Delta t}{\rho u_\infty c_p \Delta t} \right) \equiv \\ &\equiv (\rho u_\infty c_p \Delta t) St \left(1 + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St}}_{b_{T1}} \right) \equiv \\ &\equiv (\rho u_\infty c_p \Delta t) St_0 \left(\Psi_T + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_0}}_{b_T} \right). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Если граничные условия поставлены так, что значения u_∞ , Δt , Δc *постоянны* вдоль поверхности, то уравнения пограничного слоя представляются в компактной безразмерной форме:

– уравнение динамического пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{D^{**}}) = \frac{c_{f0}}{2} \left(\Psi + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty c_{f0}/2}}_b \right); \quad (8.42)$$

– уравнение диффузионного пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{D^{**}}) = St_{D0} \left(\Psi_D + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty St_{D0}}}_{b_D} \right); \quad (8.43)$$

– уравнение теплового пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{T^{**}}) = St_0 \left(\Psi_T + \underbrace{\frac{j}{\rho u_\infty St_0}}_{b_T} \right). \quad (8.44)$$

Как видно, воздействие поперечного потока массы « j » в явной форме определяется безразмерными *параметрами проницаемости* b трех модификаций, соответственно для динамической, диффузионной и тепловой задачи:

$$b \equiv \frac{j}{\rho u_\infty c_{f0}/2}; \quad b_D \equiv \frac{j}{\rho u_\infty St_{D0}}; \quad b_T \equiv \frac{j}{\rho u_\infty St_0}. \quad (8.45)$$

Принимают, что Ψ -факторы (8.38) являются функциями этих параметров:

$$\Psi = \Psi(b); \quad \Psi_D = \Psi_D(b_D); \quad \Psi_T = \Psi_T(b_T). \quad (8.46)$$

Следуя идее построения приближенных *факторизованных* соотношений, влияние фактора проницаемости рассматривают для базовой задачи, когда выполняются условия тройной аналогии, т.е. для *безградиентного* течения при $Pr = Pr_D = 1$.

Тогда

$$b = b_D = b_T; \quad \Psi = \Psi_D = \Psi_T. \quad (8.47)$$

Введенная для такого базового решения функция

$$\Psi = \Psi(b) \quad (8.48)$$

рассматривается как дополнительный фактор (множитель), учитывающий влияние поперечного потока массы на трение, массообмен и теплообмен в стандартных формулировках (8.34), (8.35):

$$\begin{aligned} c_f(\text{Re}_{**}, b) &= c_{f0}(\text{Re}_{**}) \cdot \Psi(b); \\ St(\text{Re}_{T**}, \text{Pr}, b_T) &= St_0(\text{Re}_{T**}, \text{Pr}) \cdot \Psi(b_T); \\ St_D(\text{Re}_{D**}, \text{Pr}_D, b_D) &= St_{D0}(\text{Re}_{D**}, \text{Pr}_D) \cdot \Psi(b_D). \end{aligned} \quad (8.49)$$

Например, для тепловой задачи при ламинарном режиме:

$$\begin{aligned} St(\text{Re}_{T**}, \text{Pr}, b_T) &= \\ &= St_0(\text{Re}_{T**}, \text{Pr}) \cdot \Psi(b_T) = \left(\frac{0,22}{\text{Re}_{T**}} \right) \left[\frac{1}{\text{Pr}^{4/3}} \right] \cdot \{\Psi(b_T)\}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Функцию $\Psi(b)$ получают при решении полных уравнений пограничного слоя (в частных производных) или из экспериментальных данных.

8.6. Ψ -коррекция

Влияние поперечного потока массы на трение и теплообмен исследуется далее посредством:

- модели асимптотического пограничного слоя с отсосом;
- модели «внезапного контакта» на проницаемой границе раздела.

Асимптотический пограничный слой формируется при продольном обтекании пластины, если задан постоянный вдоль поверхности (сильный) отсос. На некотором расстоянии от передней кромки толщина пограничного слоя стабилизируется (благодаря отсосу) и все гидродинамические переменные перестают зависеть от продольной координаты x . Это одномерная стационарная задача, имеющая простое аналитическое решение. Математическая формулировка является асимптотическим пределом полных уравнений пограничного слоя.

В модели *внезапного контакта* рассматривается полуограниченный плоский поток, внезапно заторможенный на границе, проницаемой для поперечного потока вещества (как при испарении или конденсации). Получающаяся одномерная нестационарная задача в частных производных имеет автомодельное аналитическое решение при любых значениях поперечного потока массы – отрицательных (отсос) и положительных (вдув).

Вычисления проводятся для модельных ламинарных течений, с очевидной методической установкой: рассмотреть сложную проблему на относительно простых примерах. Конечная аналитическая форма решений упрощает анализ асимптотических ситуаций. Результаты полагаются приближенно пригодными и для турбулентных потоков. Обоснованием этого служит *относительный* характер соотношений, когда фиксируется *изменение* под действием фактора проницаемости – по отношению к *стандартной* ситуации с непроницаемой стенкой. Такого рода относительные (или факторизованные) расчетные соотношения могут обеспечить удовлетворительную точность в инженерных расчетах.

Дополнительным аргументом в пользу общности получаемых рекомендаций является следующие свойства предельных режимов вдува и отсоса. При сильном *вдуве* и начинающемся оттеснении поток приобретает характер *свободного* (далекого от стенок) сдвигового слоя, в котором турбулентные коэффициенты переноса становятся практически постоянными по поперечному сечению, как и для ламинарного течения. С другой стороны, *отсос* из пограничного слоя является сильным стабилизирующим фактором, так что такие течения остаются или становятся (при включении отсоса) ламинарными даже при весьма больших числах Рейнольдса.

В общей теории тепломассообмена основным источником информации о ламинарных погранслоевых течениях на проницаемых поверхностях являются решения уравнений Фолкнера-Скэн для автомодельных течений, полученные методом *численного* интегрирования. На рисунке 8.15 показаны типичные профили скорости при вдуве и отсосе в сравнении со стандартной задачей для непроницаемой поверхности.

Для турбулентных потоков широко используется метод Кутателадзе–Леонтьева. Соответствующие расчетные соотношения сопоставляются и обсуждаются ниже.

Уравнение Фолкнера-Скэн: исследование течений на проницаемой поверхности

Решение методом Odesolve

Вдув (blowing), $f(0) < 0$:

f'

f'

Given $f''(\eta) + f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0$ $f(0) = -0.7$ $f(0) = 0$ $f(6) = 1$ $f_{\text{blowing}} := \text{Odesolve}(\eta, 6)$

Непроницаемая стенка, $f(0) = 0$:

Given $f''(\eta) + f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0$ $f(0) = 0$ $f(0) = 0$ $f(6) = 1$ $f := \text{Odesolve}(\eta, 6)$

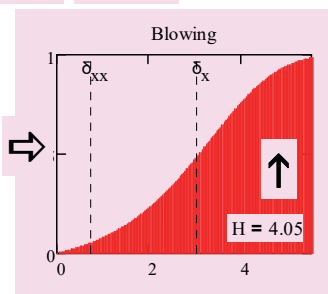
Отсос (suction), $f(0) > 0$:

Given $f''(\eta) + f(\eta) \cdot f'(\eta) = 0$ $f(0) = 7$ $f(0) = 0$ $f(6) = 1$ $f_{\text{suction}} := \text{Odesolve}(\eta, 6)$

$\eta := 0.001, 0.02.. 6$

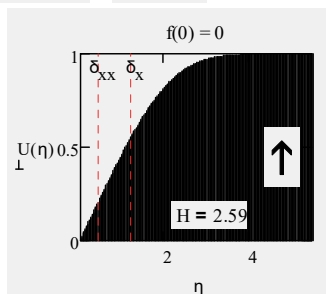
$$U_b(\eta) := \frac{d}{d\eta} f_{\text{blowing}}(\eta)$$

$\delta_x := 3.05$ $\delta_{xx} := 0.753$ $\Psi = 0.181$ $b = 2.39$



$$U(\eta) := \left(\frac{d}{d\eta} f(\eta) \right)$$

$\delta_x := 1.218$ $\delta_{xx} := 0.47$ $\Psi = 1$ $b = 0$



$$U_s(\eta) := \frac{d}{d\eta} f_{\text{suction}}(\eta)$$

$\delta_x := 0.138$ $\delta_{xx} := 0.069$ $\Psi = 2.217$ $b = -2.20$

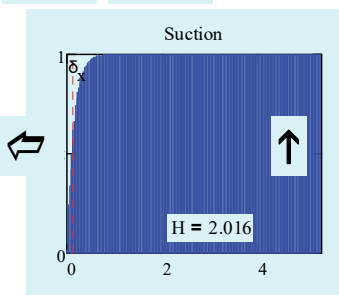


Рис. 8.15. Решения уравнения Фолкнера-Скэн (левая вертикальная ось на графиках – проницаемая стенка, поток движется вверх)

Асимптотический пограничный слой с отсосом

Для асимптотического пограничного слоя, когда течение вдоль проницаемой стенки стабилизируется благодаря сильному отсосу, из уравнения неразрывности с учетом стационарности и одномерности задачи следует:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{W})}_{\text{Уравнение неразрывности}} \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{W}) = 0 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)}_0 + \frac{\partial V}{\partial y} = 0; \quad (8.51)$$

Стабилизация вдоль x

⇓

$$V = \text{const}; \quad \rho V \equiv j = \text{const}; \quad U = U(y).$$

Таким образом, поперечный поток массы постоянен по толщине слоя (как и по координате x). Продольная скорость (U) зависит только от поперечной координаты (y). Предметом анализа является профиль продольной скорости $U(y)$ и напряжение трения на стенке (τ) при заданной плотности поперечного потока массы (j) на границе (рис. 8.16).

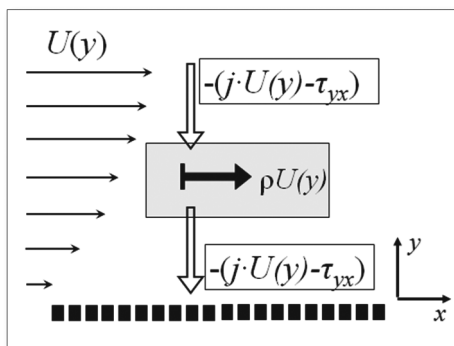


Рис. 8.16. Постоянство поперечного потока импульса в асимптотическом пограничном слое с отсосом

Рассмотрим в качестве переносимой (сохраняемой) величины *продольный* (вдоль x) импульс единичного контрольного объема ρU . Перенос происходит в *поперечном* направлении «у».

Поскольку никаких массовых сил нет, давление постоянно вдоль пластины и задача стационарная, – плотность потока импульса Φ_U должна быть постоянной, чтобы сохранялся импульс всякого контрольного объема, подобного показанному на рис. 8.16:

$$\underbrace{j \cdot U(y)}_{\substack{\text{Конвективный} \\ \text{перенос} \\ \text{импульса}}} - \underbrace{\tau_{yx}}_{\substack{\text{Вязкое} \\ \text{касательное} \\ \text{напряжение}}} \equiv \Phi_U = \text{const}; \quad (8.52)$$

$$\uparrow$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dU}{dy}.$$

Получающееся после указанной подстановки обыкновенное линейное дифференциальное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами легко интегрируется; константы интегрирования определяются из граничных условий через заданные значения скорости на стенке ($y = 0$) и на бесконечности:

$$\underbrace{\frac{dU}{dy} - \frac{j}{\mu} U(y) = \text{const}}_{\substack{\text{Дифференциальное уравнение} \\ \text{для скорости}}} \xrightarrow{\int} U(y) = c_1 e^{\frac{j}{\mu} y} + c_2; \quad j < 0 \quad (8.53)$$

$$\begin{cases} U(y=0) = c_1 + c_2 = 0 \\ U(y=\infty) = c_1 \cdot 0 + c_2 = U_\infty. \end{cases}$$

Результатом является экспоненциальное распределение:

$$U(y) = U_\infty \left(1 - e^{\frac{j}{\mu} y} \right); \quad j < 0. \quad (8.54)$$

В следующем блоке вычислений получается важный результат теории асимптотического пограничного слоя, а именно, равенство напряжения трения на стенке плотности конвективного потока импульса на внешней границе:

$y \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\Phi_U}_{\text{const}} &= j \cdot U(y) - \tau(y) = [j \cdot U(y) - \tau(y)]_{y \rightarrow \infty} \equiv \\ &\equiv j \cdot U_\infty - \underbrace{\tau(y)}_{\mu \frac{dU}{dy} \Big|_\infty \rightarrow 0} \equiv j U_\infty \end{aligned} \quad (8.55)$$

$y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \Phi_U &= [j \cdot U(y) - \tau(y)]_{y=0} \equiv j \cdot 0 - \underbrace{\tau(y=0)}_{\tau_w} = j U_\infty; \\ &\Rightarrow \tau_w = -j U_\infty. \end{aligned}$$

Этот баланс потоков импульса Φ_U и соотношение для трения τ_w на проницаемой границе при асимптотическом отсосе получается *независимо от режима* течения (ламинарного или турбулентного).

Толщина потери импульса вычисляется согласно определению:

$$\begin{aligned} \delta_{**} &= \int_0^\infty \frac{U(y)}{U_\infty} \left(1 - \frac{U(y)}{U_\infty} \right) dy; \quad \Leftarrow \frac{U(y)}{U_\infty} = 1 - e^{\frac{j}{\mu} y} \\ \delta_{**as} &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{|j|}; \quad \text{Re}_{**as} \equiv \frac{\rho U_\infty \delta_{**as}}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\rho U_\infty}{|j|}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Таким образом, толщина асимптотического пограничного слоя δ_{**as} , как и соответствующее число Рейнольдса, задается – *управляется* – плотностью поперечного потока массы (интенсивностью отсоса).

Анализ завершается вычислением Ψ – фактора, т.е. отношения коэффициентов трения

- для асимптотического пограничного слоя с отсосом

$$\frac{c_{f as}}{2} \equiv \frac{\tau_{was}}{\rho U_\infty^2} = \frac{-j U_\infty}{\rho U_\infty^2} = \frac{-j}{\rho U_\infty} \quad (8.57)$$

• и для «стандартного» ламинарного пограничного слоя на непроницаемой поверхности

$$\frac{c_{f0}}{2} = \frac{0,220523}{\text{Re}_{**}}. \quad (8.58)$$

Эти величины сопоставляются при *одинаковых* числах Рейнольдса Re_{**} :

$$\Psi \equiv \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{\text{Re}_{**}}$$

$$\text{Re}_{**} = \text{idem} \Rightarrow \text{Re}_{**} = \text{Re}_{**as} = \frac{1}{2} \frac{\rho U_\infty}{|j|}; \quad (8.59)$$

$$\Psi \equiv \left(\frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{\text{Re}_{**}} = \frac{\frac{-j}{\rho U_\infty}}{0,220523 \cdot 2 \frac{|j|}{\rho U_\infty}} = 2,26734.$$

Параметры проницаемости в двух модификациях – b и b_1 – вычисляются по определяющим формулам:

$$b \equiv \frac{j}{\rho U_\infty} \frac{2}{c_{f0}} = \left(\frac{j}{\rho U_\infty} \right) \frac{1}{\left(0,441046 \frac{|j|}{\rho U_\infty} \right)} = -2,26734; \quad (8.60)$$

$$b_1 \equiv \frac{j}{\rho U_\infty} \frac{2}{c_f} = \left(\frac{j}{\rho U_\infty} \right) \frac{1}{\left(\frac{-j}{\rho U_\infty} \right)} = -1.$$

Полученные результаты для асимптотического слоя (8.59), (8.60) полностью согласуются с численным интегрированием уравнений Фолкнера-Скэн при предельно больших отрицательных значениях параметра проницаемости: $\Psi(b_{as}) = -b_{as} = 2.268$ (гл. 2).

Итак, в асимптотическом пределе сильного отсоса, величины Ψ -фактора и параметра проницаемости b принимают конечные фиксированные значения (8.60). Однако в рамках принятой

гидродинамической модели, это не накладывает никаких ограничений на значения поперечного потока массы j , например, на скорость конденсации из парогазовой смеси при стремлении концентрации инертного газа к нулю. В действительности такие ограничения существуют, но уже за пределами принятого гидродинамического подхода. Физические соображения указывают на невозможность скорости поперечного потока при конденсации, превышающей скорость теплового движения молекул, т.е. примерно скорость звука. Более конкретный анализ проводится в рамках теории *газокинетического (фазового)* термического сопротивления при конденсации.

Модель внезапного контакта

Модельным течением (рис. 8.17) является полуограниченный плоский поток со скоростью U_∞ , внезапно заторможенный на границе, проницаемой для поперечного потока вещества (как при испарении или конденсации). Система координат, в которой записаны последующие уравнения, связана с границей раздела: ось x совпадает с плоскостью контакта, ось y (или η) – нормальна к этой плоскости и отсчитывается от нее. (Аналогичная задача в существенно более простой постановке решается в Томе 1 \ п. «Задача о прогреве полуограниченного массива»).

Вблизи поверхности раздела формируется нестационарное поле скорости. Уравнения неразрывности и движения для вязкой несжимаемой жидкости запишутся при поставленных условиях следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} U_x + V_y = 0 \\ U_x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V = V(\tau) \\ U = U(y, \tau); \quad P = P(y, \tau). \end{array} \right. \quad (8.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\tau + VU_y = \nu U_{y,y} \\ V_\tau = -\frac{1}{\rho} P_y. \end{array} \right.$$

Эволюция такого течения происходит во времени и по нормали к границе. Из уравнения неразрывности непосредственно следует, что *поперечная* составляющая скорости V не зависит от координаты y и является функцией только времени.

Посредством характерного внутреннего линейного масштаба – глубины H проникновения гидродинамических возмущений – формируется автомодельная переменная задачи η :

$$H = \sqrt{2vt} \Rightarrow \eta \equiv \frac{y}{H} = \frac{y}{\sqrt{2vt}}. \quad (8.62)$$

Заменой переменных

$$\tau = t, \quad y = \eta \sqrt{2} \sqrt{vt}; \quad U = U_\infty \cdot f(\eta) \quad (8.63)$$

дифференциальное уравнение в частных производных для продольной скорости U сводится к обыкновенному ДУ:

$$\left(-\eta + \underbrace{\frac{tV(t)\sqrt{2}}{\sqrt{vt}}}_s \right) f_\eta = f_{\eta,\eta}, \quad (8.64)$$

если поперечная составляющая V удовлетворяет условию:

$$\frac{tV(t)\sqrt{2}}{\sqrt{vt}} \equiv \frac{V(t)\sqrt{2vt}}{v} \equiv \frac{VH}{v} \equiv s = \text{const} \Rightarrow V(t) = s \sqrt{\frac{1}{2} \frac{v}{t}}. \quad (8.65)$$

Можно показать, что по такому закону изменяется скорость испарения или конденсации на границе раздела двухфазного потока принятой конфигурации. Величина s является *безразмерным параметром* задачи и задает положение точки перегиба на профиле скорости:

$$f_{\eta,\eta} \Big|_{\eta=s} = 0. \quad (8.66)$$

Интегрирование уравнения для давления P (8.61) приводит к линейному распределению по поперечной координате с произвольной функцией π от времени в качестве слагаемого:

$$P = s \frac{1}{2} \rho v \frac{y}{\sqrt{2v\tau}} \frac{1}{\tau} + \pi(\tau). \quad (8.67)$$

Это распределение несущественно для дальнейших вычислений.

Краевая задача для распределения скорости

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\eta^2} f(\eta) + (\eta - s) \left(\frac{d}{d\eta} f(\eta) \right) = 0 \\ f(0) = 0, f(\infty) = 1. \end{cases} \quad (8.68)$$

имеет аналитическое решение

$$f(\eta) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(\eta - s)\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right) + 1}, \quad (8.69)$$

показанное на рис. 8.17 при различных значениях координаты точки перегиба $\eta = s$. Левую вертикальную ось координат можно представить себе как проницаемую для поперечного потока массы границу раздела, вдоль которой в направлении вверх движется основной поток. Явление оттеснения пограничного слоя отчетливо проявляется уже при значении $s = 3$.

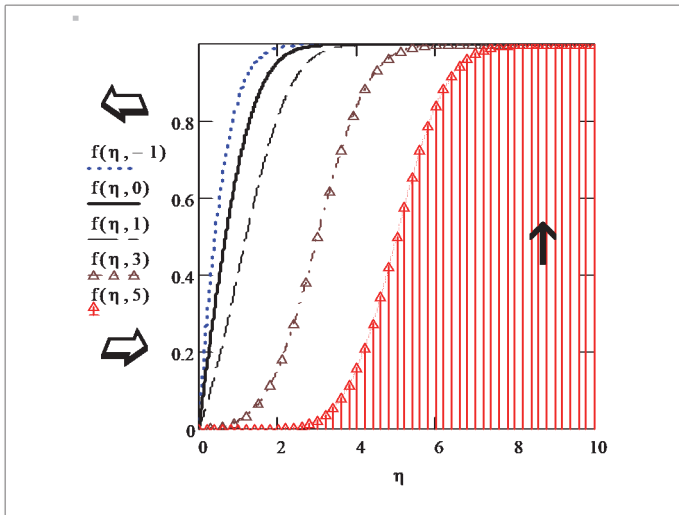


Рис. 8.17. Распределения скорости при вдуве ($s = 1; 3; 5$) и отсосе ($s = -1$); для непроницаемой поверхности $s = 0$

Предполагается, что – по крайней мере вдали от начальной сингулярной точки $\tau = 0$ – рассмотренное модельное течение удовлетворительно воспроизводит влияние поперечного потока массы на трение в пограничном слое.

Коэффициент сопротивления трения c_f определяется производной на границе раздела:

$$\frac{df(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \equiv f'_0(s) = \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}s^2}}{\sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right) + 1 \right)}; \quad (8.70)$$

$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}}{\rho U_\infty^2} = \frac{1}{\operatorname{Re}_H} f'_0(s)$$

и является функцией параметра s .

Толщина потери импульса δ_{**} , согласно определению, вычисляется как интеграл

$$\delta_{**} \equiv \frac{1}{\rho U_\infty^2} \int_0^\infty \rho U(y)(U_\infty - U(y)) dy; \quad (8.71)$$

$$\Delta_{**} \equiv \frac{\delta_{**}}{H} \equiv \frac{\operatorname{Re}_{**}}{\operatorname{Re}_H} = \int_0^\infty f(\eta)(1 - f(\eta)) d\eta,$$

что дает после подстановки распределения скорости (8.69)

$$\Delta_{**}(s) = \frac{-\sqrt{2} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right) + 1 \right) e^{-\frac{1}{2}s^2} + 2 \operatorname{erf}(s) + 2}{\sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right) + 1 \right)^2}. \quad (8.72)$$

Видно, что величины коэффициента трения и толщины потери импульса определены как функции точки перегиба s .

Непосредственной мерой эффекта ддува /отсоса является параметр *проницаемости* b_1 , определяемый как соотношение по-

перечного конвективного потока импульса на внешней границе сдвигового слоя к напряжению трения на стенке:

$$b_1 \equiv \frac{\rho V U_\infty}{\tau_w} \equiv \frac{\rho V U_\infty}{\rho U_\infty^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \right)} \equiv \frac{V}{U_\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_f}{2} \right)}. \quad (8.73)$$

Параметр проницаемости b_1 определен на интервале $(-1, +\infty)$. Левая граница (-1) соответствует режиму *асимптотической отсоса*, когда трение на стенке τ_w равно поперечному потоку импульса из внешнего потока ($\rho V U_\infty$, $V < 0$). Для непроницаемой стенки этот параметр нулевой, т.к. $V = 0$, $\tau_w \neq 0$. При интенсивном вдуве $V > 0$, $\tau_w \rightarrow 0$, поэтому $b_1 \rightarrow \infty$.

Напомним, что в задачах испарения и конденсации в парогазовых потоках параметр b_1 определяется значениями концентрации на поверхности раздела и в набегающем потоке.

Из определения (8.73) следует связь с координатой s точки перегиба:

$$\begin{aligned} b_1 \equiv \frac{V}{U_\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_f}{2} \right)} &\Rightarrow b_1 = \frac{\left(\frac{VH}{\nu} \right)}{\left(\frac{U_\infty H}{\nu} \right)} \frac{1}{\left(\frac{c_f}{2} \right)} = \\ &= \frac{s}{\text{Re}_H} \frac{1}{\left(\frac{c_f}{2} \right)} = \frac{s}{f'_0(s)}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

Исключая параметр Re_H , получают выражение для закона трения (т.е. соотношения $c_f(\text{Re}_{**}, b_1)$) в неявной, параметрической, форме, с параметром s :

$$\begin{cases} \frac{c_f}{2} \text{Re}_H \equiv f'_0(s) \\ \Delta_{**}(s) = \frac{\text{Re}_{**}}{\text{Re}_H} \end{cases} \Rightarrow \frac{c_f}{2} \text{Re}_{**} = f'_0(s) \cdot \Delta_{**}(s); \quad b_1 = \frac{s}{f'_0(s)}, \quad (8.75)$$

или

$$\frac{c_f(\text{Re}_{**}, b_1)}{2} = \frac{f'_0(s) \cdot \Delta_{**}(s)}{\text{Re}_{**}}; \quad (8.76)$$

$$b_1 = \frac{s}{f'_0(s)}.$$

Система уравнений (8.76) для $(c_f/2)$ интерпретируется как закон трения, устанавливающий связь между локальным значением коэффициента трения, с одной стороны, и локальными значениями числа Рейнольдса (по толщине потери импульса) и параметра проницаемости b_1 – с другой.

В случае непроницаемой стенки вычисления дают, в сопоставлении с классической задачей об обтекании пластины:

$$\underbrace{\frac{c_{f0}}{2} = \frac{0,263696}{\text{Re}_{**}}}_{\text{Модель внезапного контакта}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{c_{f0}}{2} = \frac{0,220523}{\text{Re}_{**}}}_{\text{Пограничный слой на пластине}}. \quad (8.77)$$

Видно, что формулировки закона трения для указанных двух моделей развивающегося течения одинаковы по структуре и лишь несколько (~20%) отличаются числовыми коэффициентами.

Фактор Ψ , учитывающий влияние поперечного потока массы на трение и тепломассообмен, вычисляется следующим образом

$$\Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**}} = \frac{f'_0(s) \cdot \Delta_{**}(s)}{f'_0(0) \cdot \Delta_{**}(0)} = \frac{f'_0(s) \cdot \Delta_{**}(s)}{0,263696}; \quad (8.78)$$

$$b_1 = \frac{s}{f'_0(s)}.$$

При расчетах полезна также модификация (b) параметра проницаемости:

$$\underbrace{b \equiv \frac{\rho V U_\infty}{\tau_{w0}|_{\text{Re}_{**}}} \equiv \frac{\rho V U_\infty}{\rho U_\infty^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau_{w0}}{\rho U_\infty^2}\right)_{\text{Re}_{**}}} \equiv \frac{V}{U_\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_{f0}}{2}\right)_{\text{Re}_{**}}}}_{\downarrow} ; \quad \Psi \equiv \frac{c_f}{c_{f0}} \Big|_{\text{Re}_{**}} \quad (8.79)$$

$$b = \Psi \cdot b_1.$$

Проницаемость стенки, согласно этому определению, соотнесена с коэффициентом трения в стандартных условиях, т.е. при обтекании *непроницаемой* стенки (индекс «0» в обозначении c_{f0}) при фиксированном Re^{**} . Напомним, что функциональная связь $c_{f0}(Re^{**})$ называется стандартным законом трения (8.58), (8.77).

Аналитические решения в параметрической форме представлены на рис. 8.18–8.22.

$$b_1(s) := s \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\frac{s^2}{2}} \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + 1 \right)$$

if $s < -5$

"asymptotic expansion"

$$\left(-1 + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^4} + \frac{15}{s^6} \right)$$

$$b_1(-\infty) = -1$$

Рис. 8.18. Функциональная связь параметра проницаемости b_1 с координатой s точки перегиба в модели внезапного контакта (Mathcad)

$$\Psi_S(s) := \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s\right) + 1 \right) \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} - 2 \cdot \operatorname{erf}(s) - 2}{e^{\frac{s^2}{2}} \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s\right) + 1 \right)^3 \cdot (-2 + \sqrt{2})}$$

if $s < -5$

"asymptotic expansion"

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{\pi \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{4 \cdot s^4 - 6 \cdot s^2 + 39}{s^4}$$

$$b(s) := b_1(s) \cdot \Psi_S(s)$$

$$b_{as} = b(-\infty) = -\Psi_S(-\infty)$$

$$b_{as} := \frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{2} - 8} = -1.896119$$

Рис. 8.19. Фактор трения ($\Psi = c_f/c_{f0}$) и параметр проницаемости b как функции координаты s точки перегиба в модели внезапного контакта (Mathcad)

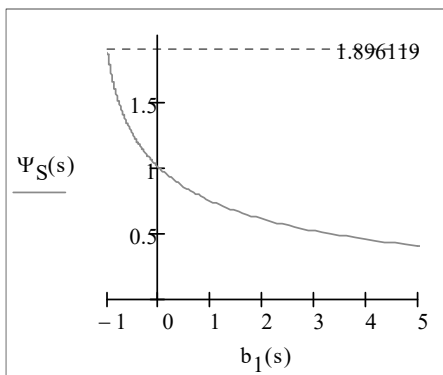


Рис. 8.20. Влияние параметра проницаемости b_1 на трение ($\Psi = c_f/c_m$) при вдуве ($0 < b_1 < +\infty$) и отсосе ($-1 \leq b_1 < 0$) в модели внезапного контакта

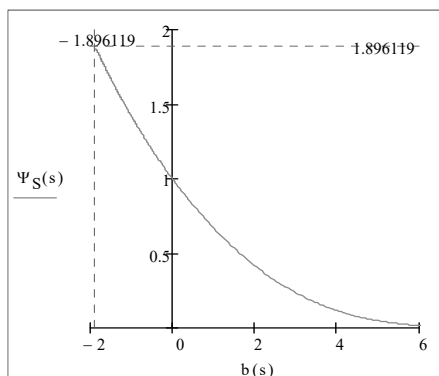


Рис. 8.21. Влияние параметра проницаемости b на трение ($\Psi = c_f/c_m$) при вдуве ($b > 0$) и отсосе ($b_{as} < b < 0$) в модели внезапного контакта

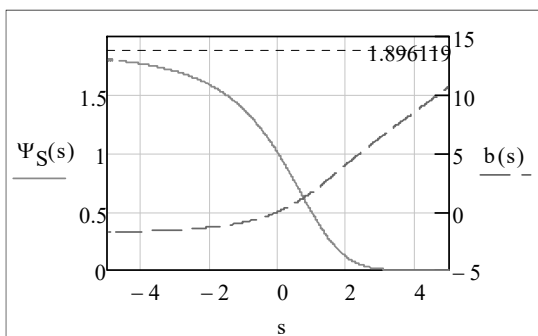


Рис. 8.22. Фактор Ψ и параметр проницаемости b как функции координаты точки перегиба в модели внезапного контакта

Общий результат состоит в том, что интенсивность процессов переноса (в данном случае, трения) на стенке уменьшается при вдуве и увеличивается при отсосе (см. зависимости $\Psi(b_1)$, $\Psi(b)$ на рис. 8.20, рис. 8.21).

Поскольку сопоставление проводится при *фиксированной* толщине пограничного слоя δ^{**} (условие $Re^{**} = \text{idem}$, см. (8.59), (8.78)), речь идет об изменении *структуры* пограничного слоя. В случае вдува профиль скорости приобретает характерную S-образную форму, при этом градиент скорости и трение на стенке уменьшаются (рис. 8.1). Напротив, при отсосе профиль «прижимается» к стенке, а градиент скорости и трение соответственно возрастают. Аналогично выглядят распределения температур и концентраций вблизи проницаемых поверхностей, так что описанные закономерности относятся также к тепло – и массообмену.

Целью дальнейших вычислений является получение удобных аппроксимаций, связывающих Ψ -фактор с параметрами проницаемости b и b_1 .

Аппроксимации для практических расчетов

Обе рассмотренные выше модели объединяются компактной аппроксимацией, представленной на рис. 8.23 и на рис. 8.24.

$$\text{root} \left[\frac{\ln[1 + r(-1)]}{r} + 2.26734, r \right] = 0.856618$$

$$\Psi_{S_appr}(b) := \begin{cases} r \leftarrow 0.856618 \\ \frac{r \cdot b}{\exp(r \cdot b) - 1} & \text{if } b \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \\ \text{NaN} & \text{if } b < -2.268 \end{cases}$$

$$\Psi_{S1_appr}(b_1) := \begin{cases} r \leftarrow 0.856618 \\ \frac{\ln(1 + r b_1)}{r \cdot b_1} \end{cases}$$

Рис. 8.23. Аппроксимация фактора Ψ , объединяющая модель асимптотического пограничного слоя с отсосом и модель внезапного контакта

Принято, что предельные параметры отсоса определяются моделью асимптотического пограничного слоя (8.60), (8.61): $\Psi(b_{as}) = -b_{as} = 2,26734$. Эта асимптотическая точка, как и «стандартная» $\Psi(0) = 1$, приняты в качестве точек колокации при построении простой зависимости логарифмического типа с единственным числовым параметром « r » (рис. 8.23).

На рисунке 8.24 демонстрируется хорошее согласование аппроксимации (см. Mathcad – функции на рис. 8.23) и точных решений модельных задач.

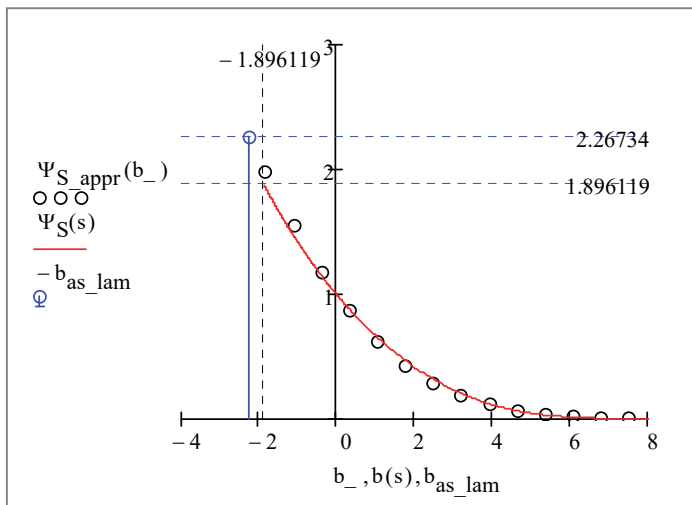


Рис. 8.24. Сопоставление точных решений (линии) и аппроксимации (кружки)

Далее для сопоставления привлечены

- формула Кутателадзе–Леонтьева как широко используемое соотношение для больших чисел Рейнольдса,
- а также аппроксимации для ламинарного пограничного слоя, полученные на базе численного решения уравнений Фолкнера–Скэн для автомодельных течений (см. Mathcad-функции на рис. 8.25).

$\Psi_{Lam}(b) :=$	$b_{as} \leftarrow -2.268$
	$b_{max} \leftarrow 3.478$
	$\left(1 - \frac{b}{5.505}\right)^{2.373622}$ if $b < 0$
	$\left(1 - \frac{b}{b_{max}}\right)^{1.4824}$ otherwise
	NaN if $b < b_{as}$

$$\Psi_{KL}(b) := \left(1 - \frac{b}{4}\right)^2$$

Рис. 8.25. Аппроксимации численного решения уравнения Фолкнера–Скэн $\Psi_{Lam}(b)$ ($b_{as} \leq b \leq b_{max}$) и формула Кутателадзе–Леонтьева $\Psi_{KL}(b)$ ($-4 \leq b \leq 4$)

Сводные результаты представлены на рис. 8.26. Как видно, различные модели дают сопоставимые результаты. Имеющиеся расхождения можно принять как меру предполагаемой универсальности факторизованного представления.

$$c_f(Re_{**}, b_1) = c_{f0}(Re_{**}) \cdot \Psi(b_1) \tag{8.80}$$

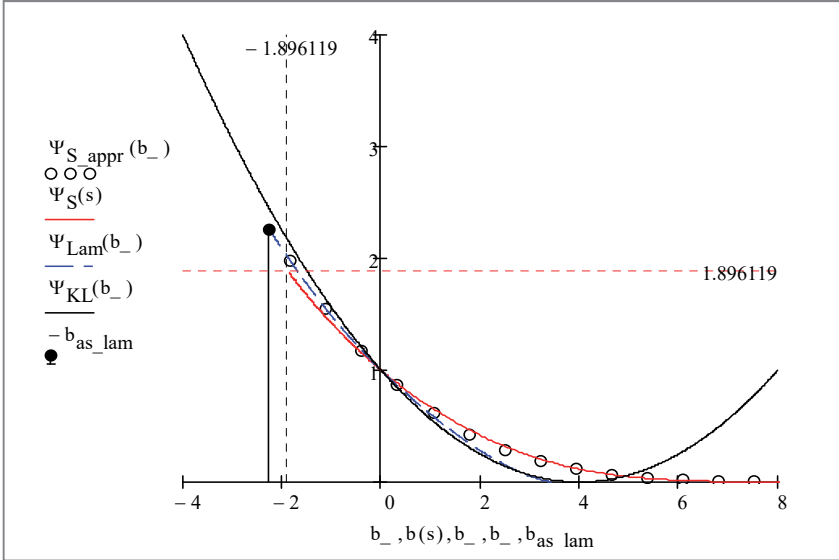


Рис. 8.26. Сопоставление зависимости $\Psi(b)$ для различных расчетных моделей

Асимптотическое поведение различных аппроксимаций при интенсивном вдуве показано на рис. 8.27. Точное решение Ψ_S для модели внезапного контакта и соответствующая аппроксимация (рис. 8.23) дают неограниченно возрастающую функцию $b(b_1)$. Аппроксимация численного решения уравнения Фолкнера–Скэн (см. Mathcad-функции на рис. 8.25) и формула Кутателадзе – Леонтьева дают ограниченное значение параметра проницаемости b_{max} (соответственно (3.478) и (4)), и, следовательно, устанавливают некоторые ограниченные значения интенсивности вдува. По-видимому, эти максимальные значения параметра b_{max} следует рассматривать как *границы применимости* соответствующих расчетных аппроксимаций. Отметим в частности, что для уравнения Фолкнера–Скэн процедура численного интегрирования становится неустойчивой при значениях параметра $b \gg 3.478$ (для таких профилей как $f(\eta, s = 5)$ на рис. 8.17).

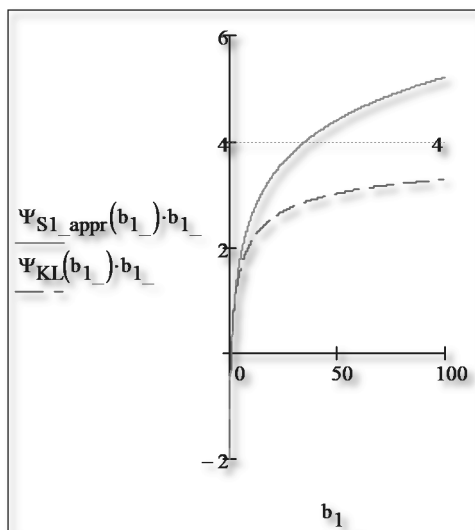


Рис. 8.27. Асимптотическое поведение решений при интенсивном вдуве

В полном списке (Ψ, b, b_1, Re^{**}) безразмерных величин, описывающих трение на проницаемой поверхности, величины (b_1, Re^{**}) можно принять за независимые переменные, в то время как (Ψ, b) определяются полученными выше функциональными зависимостями (см. Mathcad-функции на рис. 8.23).

В задачах испарения и конденсации в парогазовых потоках значение параметра b_1 определено значениями концентрации на поверхности раздела и в набегающем потоке, а число Re^{**} может регулироваться скоростью набегающего потока.

В этой системе переменных функция $\Psi(b_1, Re^{**})$ задает закон трения с учетом поперечного потока массы, а $b(b_1, Re^{**})$ определяет поперечный поток массы через границу раздела. Область определения параметра проницаемости b_1 составляет $(-1 .. \infty)$, от течения с интенсивным асимптотическим отсосом до оттесненного свободного слоя сдвига при интенсивном вдуве. Соответствующая область определения для проницаемости b должна быть $(b_{as} .. \infty)$. Верхняя граница параметра b для вдува остается неопределенной. Приемлемой расчетной моделью в этой области может быть аппроксимация модели внезапного контакта (см. Mathcad-функцию на рис. 8.23), обеспечивающая неограниченный рост поперечного потока, например, скорости испарения в парогазовую смесь при *исчезающе малой* концентрации инертного газа.

В действительности физическое ограничение на скорость поперечного потока массы существует. В задачах конденсации/испарения оно определяется скоростью теплового движения молекул, т.е. примерно скоростью звука. Но это ограничение находится за рамками рассматриваемой модели пограничного слоя в вязкой несжимаемой жидкости.

При использовании полученных аппроксимаций для практических расчетов следует иметь в виду, что коррекции подвергается «стандартное» течение – при том же значении *локального* числа Рейнольдса ($Re^{**} = idem$), но при нулевом поперечном потоке массы (см. определение (8.59) фактора Ψ):

$$c_f|_{Re^{**}} = \Psi(b_1) \cdot c_{f0}|_{Re^{**}}.$$

Можно сказать, что коррекция Ψ имеет структурный характер и учитывает деформацию профиля скорости (температуры, концентрации) – при фиксированной толщине пограничного слоя δ^{**} .

Поэтому расчетная методика имеет *локальный* характер и в основном применяется при интегрировании уравнений пограничного слоя вдоль поверхностей, как это показано в главе, посвященной анализу *локальной* теплоотдачи при поперечном обтекании цилиндра.

Однако если рассматривается *стабилизированное* течение, как в длинных каналах, то соотношения данного раздела могут быть, с некоторым приближением, использованы непосредственно, поскольку их назначение и состоит в том, чтобы учесть изменения структуры при *фиксированном* характерном поперечном размере области течения. В режиме асимптотического отсоса толщина пограничного слоя управляется величиной поперечного потока массы на стенке и должна быть сопоставлена с поперечником канала. Необходимой дополнительной информацией являются соотношения между различными мерами толщины пограничного слоя (δ^{**} , δ^* , $\delta_{0.99}$).

Приведем в заключение для справки некоторые используемые в дальнейшем определения и аппроксимации.

Параметр проницаемости:

$$b_{D1} \equiv \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D} = \frac{\left(\frac{J_{v, \text{conduct}}}{1 - c_{v0}} \right)}{\rho u_\infty} \cdot \frac{1}{\frac{J_{v, \text{conduct}}}{\rho u_\infty (c_{v0} - c_{v\infty})}} = \frac{c_{v0} - c_{v\infty}}{1 - c_{v0}}; \quad (8.81)$$

$$b_1 = b_{D1} = \frac{c_{v0} - c_{v\infty}}{1 - c_{v0}} = \frac{c_{g\infty}}{c_{g0}} - 1 = M_{\infty 0} - 1; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g\infty}}{c_{g0}};$$

$$-1 \leq b_1 < \infty.$$

Ψ -фактор, формула Кутателадзе – Леонтьева:

$$\Psi = \left(1 - \frac{b}{4} \right)^2, \quad -4 \leq b < 4;$$

$$\Psi = \frac{4}{2 + b_1 + 2\sqrt{1 + b_1}}; \quad \Psi = \frac{4}{\left(1 + \sqrt{M_{\infty 0}} \right)^2}; \quad b = b_1 \cdot \Psi(b_1). \quad (8.82)$$

Ψ -фактор, аппроксимация для асимптотического отсоса и модели внезапного контакта:

$$\begin{aligned}
 r &\cong 0,856618; \\
 \Psi(b) &= \frac{r \cdot b}{\exp(r \cdot b) - 1}; \quad b = -2,26734 \dots \infty; \\
 \Psi(b_1) &= \frac{\ln(1 + r \cdot b_1)}{r \cdot b_1}; \quad b_1 = -1 \dots \infty; \\
 b &= b_1 \cdot \Psi(b_1).
 \end{aligned}
 \tag{8.83}$$

Формпараметр пограничного слоя $H = \delta_* / \delta_{**}$ (8.25):

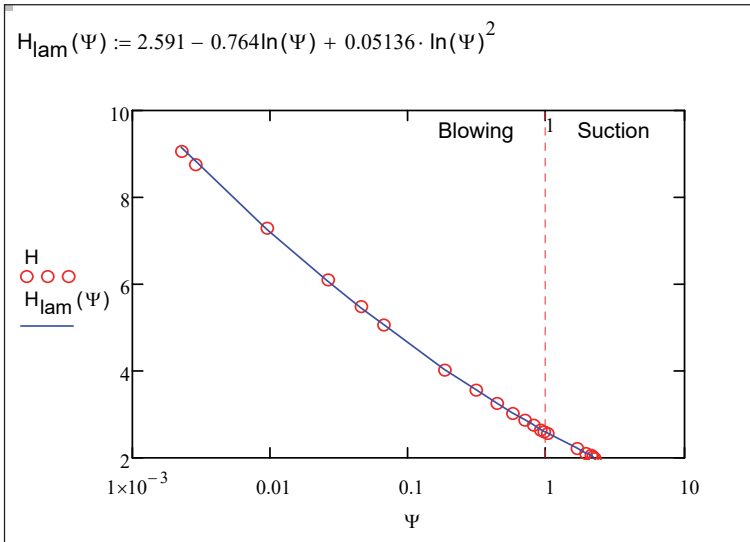


Рис. 8.28. Формпараметр для ламинарного пограничного слоя (значки – численное решение уравнения Фолкнера–Скэн, линия – аппроксимация)

Располагая

- интегральными уравнениями пограничного слоя (8.20), (8.21), (8.22);
- стандартными законами (8.34), (8.35);
- аппроксимациями (8.82), (8.83) для корректирующего фактора Ψ ,

можно решить широкий круг инженерных задач теплообмена при разнообразных граничных условиях на поверхностях раздела (пример приводится далее в п. 8.7).

Как уже отмечалось выше, законы теплообмена и массообмена *консервативны* по отношению к ускорению или замедлению внешнего потока. Однако это приближение несправедливо для гидродинамической задачи. Поэтому корректирующий фактор для *коэффициента трения* c_f в формулах (8.49), вообще говоря, зависит также от параметра ускорения потока.

8.7. Теплообмен при продольном обтекании плоской поверхности: решение интегральным методом

С целью определить влияние примесей инертных газов на скорость конденсации или испарения, мы решим далее интегральным методом следующую модельную задачу для *развивающихся* течений, таких как пограничные слои при внешнем обтекании, начальные участки каналов и т.п.

Парогазовая смесь движется вдоль изотермической поверхности со скоростью u_∞ . Заданы *постоянные* значения концентрации инертного газа на стенке и вдали от нее $c_{g,0}$, $c_{g,\infty}$. Требуется найти локальные значения плотности потока массы паровой компоненты смеси через границу, то есть определить скорость конденсации/испарения, а также трение на поверхности.

Интегральные уравнения пограничного слоя (8.42), (8.43), (8.44) переписываются в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{dRe_{**}}{dRe_X} = \frac{cf_0}{2}(\Psi(b) + b); \quad (8.84)$$

$$\frac{dRe_{D**}}{dRe_X} = St_{D0}(\Psi(b) + b); \quad (8.85)$$

$$\frac{dRe_{T**}}{dRe_X} = St_0(\Psi(b) + b), \quad (8.86)$$

где

$$\text{Re}_X \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}. \quad (8.87)$$

Согласно постановке задачи, характерные значения концентрации $c_{g,0}$, $c_{g,\infty}$ постоянны вдоль поверхности, поэтому параметр проницаемости b_1 является заданной постоянной величиной, как и $\Psi(b_1)$ и $b = b_1 \cdot \Psi(b_1)$ (см. формулы (8.81)–(8.83)).

После подстановки в (8.84), (8.85), (8.86) стандартных законов (8.34) для ламинарного режима и разделения переменных, как это сделано для динамического пограничного слоя:

$$\frac{d\text{Re}_{**}}{d\text{Re}_X} = \left(\frac{0,22}{\text{Re}_{**}} \right) \underbrace{(\Psi(b) + b)}_{\text{const}};$$

$$\text{Re}_{**} d\text{Re}_{**} = [0,22(\Psi(b) + b)] \cdot d\text{Re}_X,$$

полученные уравнения просто интегрируются:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{**} &= \sqrt{0,44 \text{Re}_X} \sqrt{\Psi(b) + b}; \\ \text{Re}_{D**} &= \sqrt{\frac{0,44 \text{Re}_X}{\text{Pr}_D^{4/3}}} \sqrt{\Psi(b) + b}; \\ \text{Re}_{T**} &= \sqrt{\frac{0,44 \text{Re}_X}{\text{Pr}^{4/3}}} \sqrt{\Psi(b) + b}. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Соотношения (8.88) описывают развитие динамического, диффузионного и теплового ламинарных пограничных слоев вдоль поверхности, через которую проходят потоки вещества (на поверхности раздела фаз происходит конденсация или испарение).

Из графиков на рис. 8.29 видно, что отсос из парагазового слоя при конденсации ($b < 0$) приводит к уменьшению, а вдув при испарении ($b > 0$) – к увеличению толщины пограничного слоя.

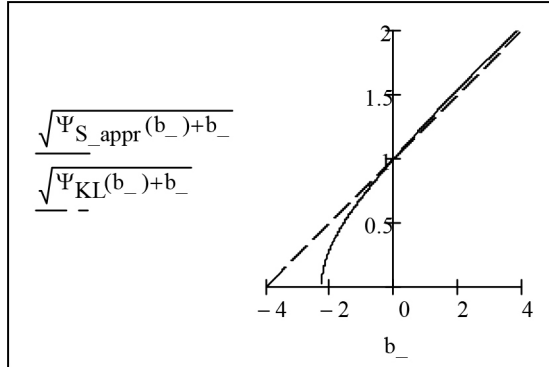


Рис. 8.29. Фактор $(\Psi+b)^{1/2}$, определяющий влияние параметра проницаемости на толщину пограничного слоя (линейная зависимость $(1+b/4)$ для модели KL)

Завершает решение задачи расчет поперечного потока массы (j) на стенке:

$$b_1 = b_{D1} = \frac{c_{v0} - c_{v\infty}}{1 - c_{v0}} = \frac{c_{g\infty}}{c_{g0}} - 1 = M_{\infty 0} - 1; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g\infty}}{c_{g0}};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{j}{\rho u_{\infty}} = b \cdot St_{D0} = b \cdot \left(\frac{0,22}{Re_{D^{**}}} \right) \left[\frac{1}{Pr_D^{4/3}} \right] \\ Re_{D^{**}} = \sqrt{\frac{0,44 Re_X}{Pr_D^{4/3}}} \sqrt{\Psi(b) + b}; \end{array} \right. \quad (8.89)$$

$$\frac{j}{\rho u_{\infty}} = \frac{0,22}{\sqrt{0,44 Re_X}} \frac{1}{Pr_D^{2/3}} \left(\frac{b}{\sqrt{\Psi(b) + b}} \right).$$

Если имеет место ламинарно-турбулентный переход, следует провести аналогичные вычисления для турбулентного пограничного слоя, выбирая в (8.34), (8.35) стандартные законы для турбулентного режима.

8.8. Управление пограничным слоем

Управление пограничным слоем посредством специально организованного вдува/отсоса может применяться с целью интенсифицировать или, напротив, блокировать тепломассообмен между элементами конструкции и потоком, целенаправленно изменить аэродинамические характеристики обтекаемого профиля и т.п. Приведем пример такого рода управления посредством изменяемой вдоль поверхности интенсивности отсоса (см. блоки Mathcad-программы на рис. 8.30–8.33).

В этой задаче выполняется численное интегрирование (рис. 8.33) уравнения пограничного слоя (8.84) с правой частью, заданной Mathcad-функцией RHS на рис. 8.32. Распределение отсоса представлено ступенчатой функцией на рис. 8.31.

Ψ -фактор вычисляется Mathcad-функцией на рис. 8.30. Область определения функции $\Psi(b)$ расширена влево по оси параметра b , чтобы обеспечить устойчивость численных процедур при расчетах в открытой окрестности режима асимптотического отсоса.

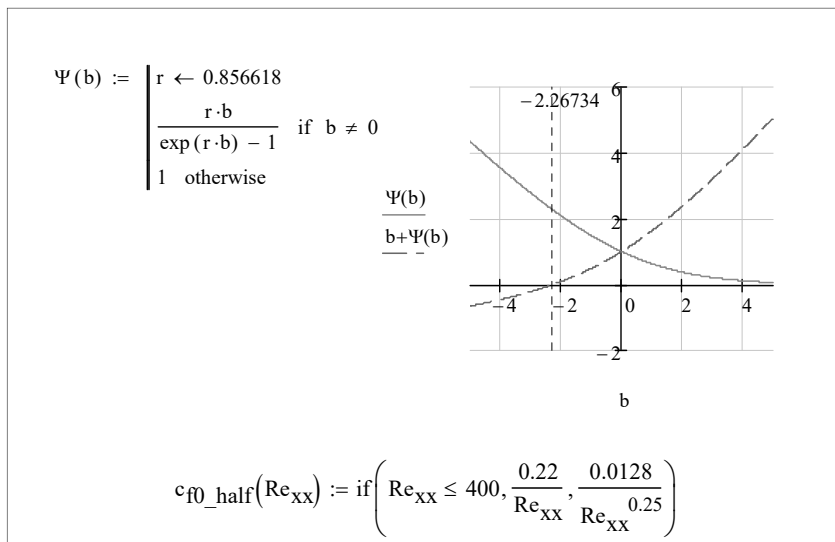


Рис. 8.30. Стандартный закон трения и Psi-коррекция на проницаемость стенки

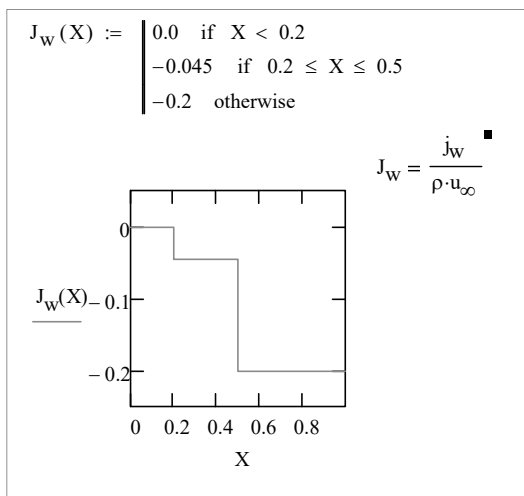


Рис. 8.31. Управляющее воздействие посредством отсоса

$$\text{Re } X_{\text{start}} := 0 \quad \text{Re } X_{\text{fin}} := 1000$$

$$\text{RHS}(\text{Re}_X, \text{Re}_{xx}) := \begin{cases} c_{f0.\text{half}} \leftarrow c_{f0.\text{half}}(\text{Re}_{xx}) \\ J_w \left(\frac{\text{Re}_X}{\text{Re}_{X_{\text{fin}}}} \right) \\ b \leftarrow \frac{c_{f0.\text{half}}}{c_{f0.\text{half}}(\Psi(b) + b)} \end{cases} \quad \text{Re}_{xx_as}(\text{Re}_X) := \begin{cases} J_{\text{wall}} \leftarrow J_w \left(\frac{\text{Re}_X}{\text{Re}_{X_{\text{fin}}}} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{J_w \left(\frac{\text{Re}_X}{\text{Re}_{X_{\text{fin}}}} \right)} \\ \text{NaN} \text{ if } J_{\text{wall}} \geq 0 \end{cases}$$

Рис. 8.32. Правая часть ОДУ

Результаты численного интегрирования методом Odesolve представлены на рис. 8.33. На начальном участке ($\text{Re}_X = u_\infty x / \nu = 0..200$) обтекаемая поверхность непроницаема, и наблюдается быстрое нарастание толщины пограничного слоя (или $\text{Re}_{x^*} = u_\infty \delta^* / \nu$). На участке $\text{Re}_X = 200..500$ включен относительно слабый отсос (рис. 8.31), и нарастание пограничного слоя практически остановилось. Далее интенсивность отсоса увеличена, и толщина погранслоя начинает быстро уменьшаться, стре-

мьясь асимптотически к теоретическому пределу (8.56) (численные значения теоретического предела (Re_{xx_as}) в зависимости от интенсивности отсоса показаны на рисунке точечной линией).

Такого рода управление применяется в специальных целях, например, для предотвращения ламинарно-турбулентного перехода или для предотвращения отрыва потока при обтекании криволинейных профилей. Пользуясь приведенной Mathcad-программой, читатели могут провести самостоятельные численные эксперименты с управлением пограничным слоем.

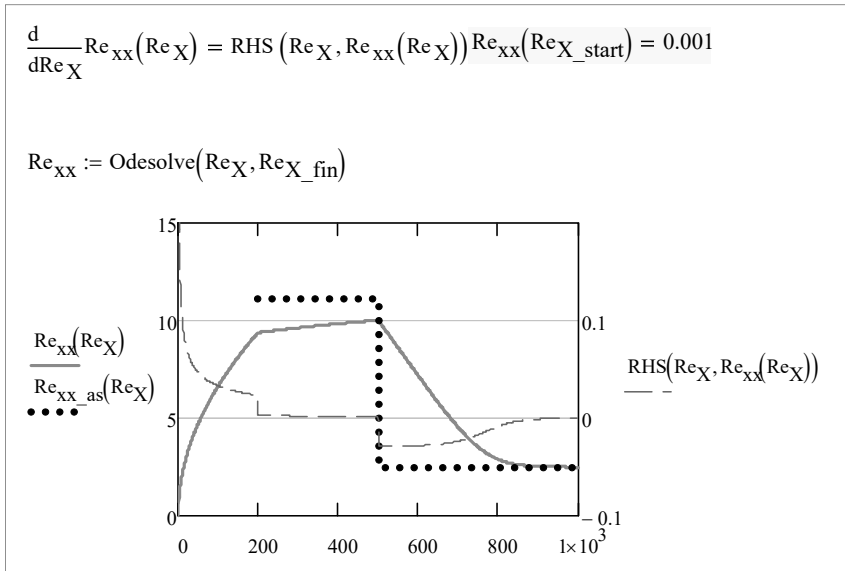


Рис. 8.33. Изменение толщины пограничного слоя в результате управляющего воздействия

8.9. Условия перехода

Диагностика режима течения необходима, прежде всего, для правильного выбора стандартных законов трения и тепломассообмена в (8.34), (8.35). В предыдущем параграфе мы ограничились указанием примерного граничного значения $Re_{cr} = 400$ (рис. 8.30), однако в действительности критическое число Рейнольдса есть функция управляющих параметров, таких как вдув/отсос, ускорение/замедление потока, шероховатость стенки и т.п.

Иногда на практике ставится задача управления ламинарно-турбулентным переходом. Например, при обтекании поверхности высокотемпературным потоком (как при входе космического аппарата в плотные слои атмосферы) предпочтительно иметь ламинарный пограничный слой, с тем, чтобы снизить интенсивность теплообмена с раскаленным потоком газа. Напротив, в теплотехнологических аппаратах желателен турбулентный режим, чтобы интенсифицировать теплоотдачу и уменьшить габариты теплообменников. Искусственная турбулизация пограничного слоя используется с целью задержать или предотвратить отрыв потока при обтекании тел и снизить, таким образом, сопротивление.

В научном плане прогнозирование перехода является одной из сложнейших и до конца не решенных проблем гидродинамики и теплообмена.

В основе инженерных методов лежит эвристическое правило, согласно которому переход происходит, если профиль скорости течения приобретает S-образную форму, имеющую точку перегиба. Это правило основывается на известном факте абсолютной неустойчивости (т.е. неустойчивости при любых конечных числах Рейнольдса) так называемых свободных слоев сдвига, как это показано на рис. 8.34 (справа). Такие течения формируются, например, на краю струи, истекающей из сопла, в следе за плохо обтекаемым телом и т.д. см. «Альбом течений» М. Ван-Дайка [3]. Термин «свободные» подчеркивает различие от течений, ограниченных твердыми стенками, такими как пограничные слои на твердых обтекаемых поверхностях, течения в трубах и т.д.

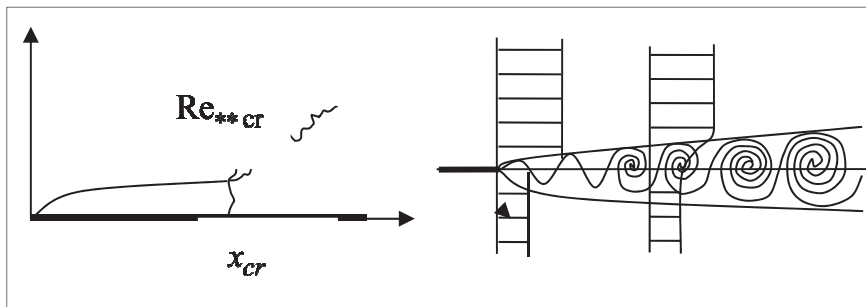


Рис. 8.34. Ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое и свободном слое смешения

Течение в пограничном слое может приобрести профиль с точкой перегиба под действием вдува ($b > 0$) или неблагоприятного градиента давления. Индикатором степени такой S-образной деформации профиля скорости может служить формпараметр H , значение которого увеличивается в вышеописанных случаях (рис. 8.28).

Профиль скорости с точкой перегиба может возникать также локально в пространственно-временной области. Если степень турбулентности внешнего потока достаточно высока, то турбулентные пульсации давления, пропорциональные плотности среды и квадрату пульсации скорости, могут привести к появлению локального неблагоприятного градиента давления и, следовательно, к возникновению неустойчивого S-образного профиля. Точно так же обтекание элементов развитой шероховатости приводит к локальному появлению неустойчивых свободных слоев сдвига, подобно тому, как это бывает при обтекании уступов [3].

Эти представления лежат в основе соотношения для расчета критического числа Рейнольдса Re_{**cr} :

$$Re_{**cr} = e^{(31,3-10H)} + \frac{2(f_{\Lambda} - f_{\Lambda_{кр}})^{1/2}}{Tu^{5/4} + \left(\frac{h_{ш}}{\delta_{**}}\right)^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}. \quad (8.90)$$

Здесь

- H – формпараметр;
- $f_{\Lambda} = \frac{(\delta_{**})^2}{\nu} \frac{du_{\infty}}{dx}$ – безразмерный градиент скорости потока;
- $f_{\Lambda_{кр}}$ – критическое значение, соответствующее отрыву пограничного слоя; $f_{\Lambda_{кр}} = -0,068$ – критическое значение для непроницаемой поверхности;
- Tu – степень турбулентности набегающего потока, т.е. отношение среднеквадратичной пульсации скорости к скорости внешнего потока;
- $h_{ш}$ – средняя высота элементов шероховатости.

График зависимости (8.90) показан на рис. 8.35. Ускорение внешнего потока ($f > 0$) и отсос ($b < 0$) стабилизируют ламинарный пограничный слой; под действием этих факторов возможен даже обратный переход – так называемая ламинаризация погра-

ничного слоя. Напротив, торможение внешнего потока, вдув и шероховатость стенки стимулируют переход от ламинарного режима к турбулентному.

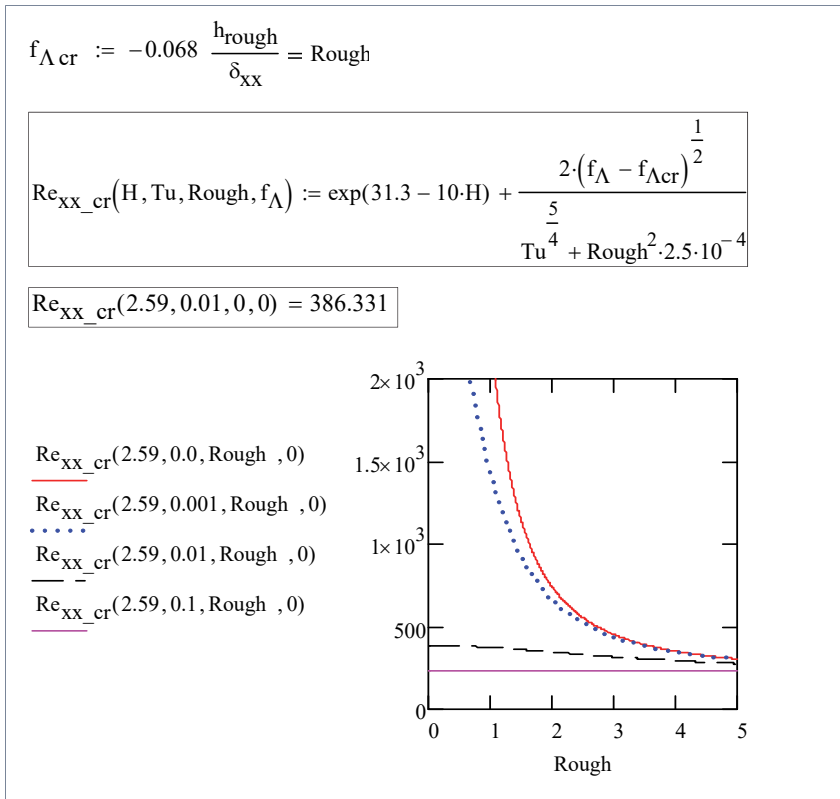


Рис. 8.35. Критическое число Рейнольдса

Только в простейших случаях величина Re_{**cr} может быть вычислена по формуле (8.90) заранее, до интегрирования уравнения динамического пограничного слоя. Например, при продольном безградиентном обтекании гладкой непроницаемой пластины и при степени турбулентности набегающего потока $Tu = 0,01$ из формулы (8.90) непосредственно получают $Re_{**cr} = 386$. В общем случае расчет Re_{**cr} по формуле (8.90) ведут параллельно с интегрированием по продольной координате x уравнения динамического пограничного слоя (8.84). Сопоставляя текущие значения Re_{**} и Re_{**cr} , решают вопрос о достижении точки перехода x_{cr} .

В соответствии с физическим смыслом уравнений сохранения импульса, энергии, концентрации следует принять, что величины потери импульса ($\rho u_\infty^2 \delta^{**}$), потери энтальпии, потери концентрации сохраняют свое значение при переходе через x_{cr} . Другими словами, турбулентный пограничный слой в точке перехода «наследует» концентрацию компонента смеси, энтальпию, импульс ламинарного пограничного слоя. Следовательно, числа Рейнольдса Re^{**} в (8.84), (8.85), (8.86) остаются непрерывными в точке перехода.

8.10. Факторизованные соотношения для трения, массоотдачи, теплоотдачи

Вычислим истинные, с учетом коррекции на поперечный поток массы, значения коэффициента трения и чисел Стантона для ламинарного пограничного слоя, посредством подстановки решений для Re^{**} , Re_D^{**} , Re_T^{**} в соотношения вида (8.50). Проведем эти подстановки подробно для теплоотдачи:

$$\begin{aligned}
 St &= St_0 \Psi = \\
 &= \left(\frac{0,22}{Re_T^{**}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{4/3}} \right] \Psi = \left(\frac{0,22}{\sqrt{\frac{0,44 Re_X}{Pr^{4/3}} \sqrt{\Psi(b)+b}}} \right) \left[\frac{1}{Pr^{4/3}} \right] \Psi = \\
 &= \left(\frac{0,33}{Re_X^{0,5}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi+b}} \right\} = St_{j=0} \Psi_x.
 \end{aligned} \tag{8.91}$$

Результирующее соотношение в последней строке имеет факторизованную структуру:

• множитель $St_{j=0}$ описывает теплоотдачу пластины в пределе нулевого поперечного потока ($b, b_1 \rightarrow 0$), т.е. для непроницаемой поверхности:

$$St_{j=0} = \left(\frac{0,33}{Re_X^{0,5}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr^{2/3}} \right]. \tag{8.92}$$

• множитель Ψ_x вводит коррекцию на конечные значения поперечного потока массы (индекс «x» призван подчеркнуть, что теперь рассматривается развивающееся вдоль x течение):

$$\Psi_x = \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}}. \quad (8.93)$$

Как и следовало ожидать, полученное интегральным методом выражение (8.92) для $St_{j=0}$ совпадает с классическим решением задачи о теплоотдаче пластины в продольном потоке. Это выражение факторизовано и содержит:

- множитель с числом Re_x («гидродинамический» фактор);
- множитель с числом Pr (фактор свойств теплоносителя).

После аналогичных вычислений для трения и массоотдачи получают

$$\frac{c_f}{2} = \frac{c_{f,j=0}}{2} \Psi_x = \left(\frac{0,33}{Re_x^{0,5}} \right) \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}; \quad (8.94)$$

$$St_D = St_{D,j=0} \Psi_x = \left(\frac{0,33}{Re_x^{0,5}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr_D^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}; \quad (8.95)$$

$$St = St_{j=0} \Psi_x = \left(\frac{0,33}{Re_x^{0,5}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}. \quad (8.96)$$

В соответствии с (8.47), используется единый параметр проницаемости, рассчитываемый по соотношениям:

$$b = b_1 \Psi(b_1); \quad b_1 = M_{\infty 0} - 1; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g\infty}}{c_{g0}}. \quad (8.97)$$

Укажем на различия между корректирующими факторами Ψ и Ψ_x . Согласно определению (8.38), фактор Ψ учитывает воздействие вдува или отсоса на *структуру* пограничного слоя, при его неизменной толщине (точнее, при фиксированной толщине потери импульса δ^{**} , или потери концентрации $\delta_{D^{**}}$, или потери энthalпии $\delta_{T^{**}}$).

Изменения структуры состоят:

- при вдуве – в характерной S-образной деформации распределений скорости, температуры, концентрации по толщине пограничного слоя, с уменьшением градиентов вблизи поверхности;

- при отсосе – напротив, в образовании более заполненных профилей с большими градиентами непосредственно на поверхности.

Корректирующий фактор Ψ_x (для ламинарного пограничного слоя),

$$\Psi_x = \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1 + \frac{b}{\Psi}}} = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1 + b_1}}, \quad (8.98)$$

учитывает *полный* эффект вдува или отсоса, как структурный, так и связанный с изменением толщины развивающихся пограничных слоев под влиянием вдува или отсоса. При вдуве (испарении в парогазовый пограничный слой) происходит увеличение толщины пограничного слоя.

Напротив, при отсосе (конденсации) пограничный слой в парогазовом потоке становится значительно тоньше, чем для обтекания непроницаемой поверхности при той же скорости набегающего потока.

Решение модельной задачи для случая турбулентного режима производится аналогично, и мы приведем только окончательный результат для фактора Ψ_x :

$$\Psi_x = \frac{\Psi}{(\Psi + b)^{0,2}} \equiv \frac{\Psi^{0,8}}{(1 + b_1)^{0,2}}, \quad (8.99)$$

где функция Ψ задается соотношениями (8.82), (8.83).

Функциональная зависимость $\Psi_x(b_1)$ представлена на рис. 8.36. Видно, что применение исходных соотношений (8.82) или (8.83) дает близкие результаты; расхождения можно считать допустимыми, учитывая общий приближенный характер метода факторизации.

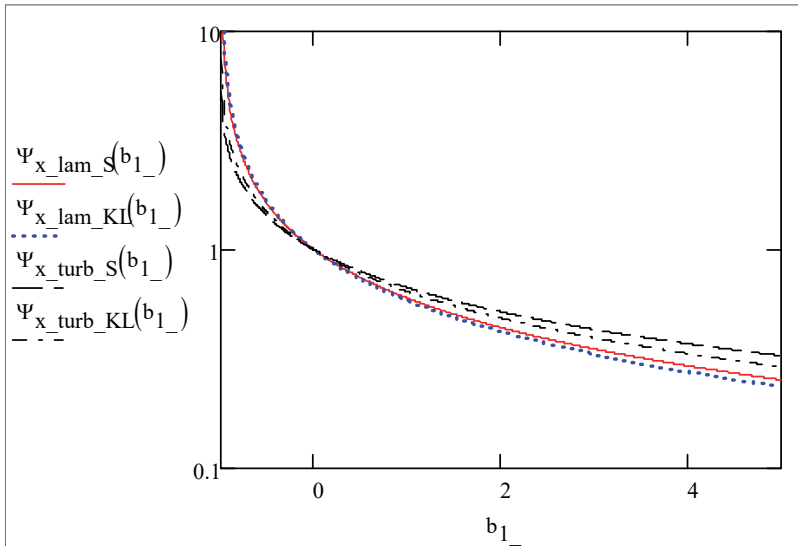


Рис. 8.36. Корректирующий фактор Ψ_x к инженерным расчетным формулам

8.11. Обобщение метода факторизации

Формулам вида (8.94)–(8.96) можно придать более общий смысл, чем только как решению конкретной задачи о продольном обтекании пластины. Предполагают, что фактор Ψ_x поперечного потока массы может быть применен для широкого круга других задач, если заменить в формулах (8.94)–(8.96) выражения в круглых и квадратных скобках (это факторы влияния скорости потока и свойств теплоносителя) другими формулами из арсенала инженерных расчетных соотношений для *непроницаемых* поверхностей.

Например, в формуле (8.95) число $St_{D,j=0}$ рассчитывается по формуле для вынужденного продольного обтекания *непроницаемой плоской поверхности*:

$$St_{D,j=0} = \left(\frac{0,33}{Re_X^{0,5}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr_D^{2/3}} \right].$$

Но если бы рассматривалась задача о *массоотдаче* при *обтекании шахматного пучка труб*, то следовало бы воспользоваться соответствующей «тепловой» формулой:

$$St_{j=0} = \left(\frac{0,4}{Re_d^{0,4}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr^{0,64}} \right] \xrightarrow[\text{и массообмена}]{\text{Аналогия тепло-}} St_{D, j=0} =$$

$$= \left(\frac{0,4}{Re_d^{0,4}} \right) \cdot \left[\frac{1}{Pr_D^{0,64}} \right],$$

где Re_d – число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру. В результате, для расчета массоотдачи в пучке труб получают:

$$St_D = St_{D, j=0} \Psi_x = \underbrace{\left(\frac{0,4}{Re_d^{0,4}} \right)}_{\text{Гидродинамика}} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{Pr_D^{0,64}} \right]}_{\text{Свойства}} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}}_{\text{Проницаемость}}.$$

Факторизация – это простой приближенный способ решения сложных задач тепломассообмена. Эффективность метода определяется правильным воспроизведением асимптотического поведения решений при изменении параметра проницаемости в широких пределах – от асимптотического отсоса до интенсивного вдува с оттеснением потока.

Тем не менее, следует помнить, что расширение области применения формул (8.94)–(8.96) посредством метода факторизации является эвристическим приемом, требующим в ответственных ситуациях дополнительных расчетно-теоретических и экспериментальных обоснований.

8.12. Расчетный пример: конденсация пара из парогазовой смеси

Схема процесса показана на рис. 8.37. Парогазовый поток при температуре t_{vg} движется с заданной массовой скоростью $(G_{\text{vapor}} + G_{\text{gas}})$, кг/(м²с), вдоль охлаждаемой поверхности с темпера-

турой t_w . Термическая проводимость пленки конденсата α_{Film} (т.е. коэффициент теплоотдачи, соотнесенный с разностью температур $(t_s - t_w)$) полагается известной величиной. Требуется рассчитать локальную скорость конденсации $j_v, \text{кг}/(\text{м}^2\text{с})$, и температуру на поверхности раздела фаз t_s на расстоянии L от входа. В качестве варьируемого параметра выбрана температура охлаждаемой стенки t_w .

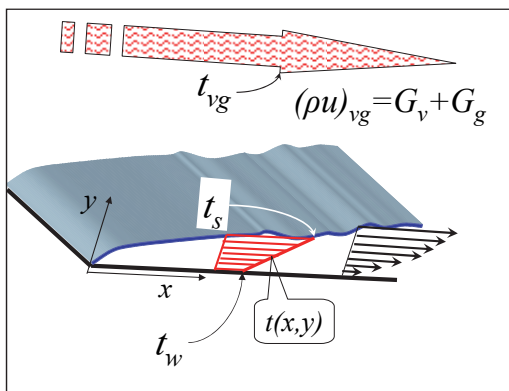


Рис. 8.37. Конденсация из парогазовой смеси

Такая постановка означает, что из полной расчетной модели конденсационной установки выделяется блок массообмена, имеющий принципиальное значение при конденсации из парогазовой смеси. К соответствующей Mathcad-программе можно обратиться по ссылке [51].

Полная модель конденсатора должна включать также гидродинамику и теплообмен конденсатной пленки, расчет системы охлаждения и т.д.

При вводе исходных данных (рис. 8.38) производится предварительная обработка параметров. В частности, вычисляется точка росы t_{dew} (температура насыщения при парциальном давлении пара) в парогазовом потоке, с целью определить допустимый интервал значений неизвестной температуры на поверхности раздела фаз. Ясно, что конденсация начнется, если температура поверхности пленки будет ниже точки росы. Для вычислений используется уравнение кривой насыщения $p_{\text{SatPa}}(T_s)$ воды.

В профессиональной вычислительной программе на этой стадии производится полная диагностика состояния парогазовой смеси, включая возможное образование тумана (мелкодисперсной влаги); в учебной программе мы ограничиваемся констатацией перегрева пара (логическая переменная Superheat имеет значение «истина» (рис. 8.38)).

Рисунок 8.39 демонстрирует программную реализацию функций для расчета интенсивности теплообмена на межфазной границе.

Исходные параметры:

Вода, водяной пар, воздух

Массовые скорости пара и газа, кг/(м² сек) $G_g := 1$ $G_v := 1$

Давление, Па $p_{mix} := 10000$ $p_{mix_Bar} := p_{mix} \cdot 10^{-5}$ $p_{mix_Bar} = 0.1$

Температуры парогазовой смеси и охлаждаемой стенки, Cels $t_{vg} := 100$ $t_w := 30$

Длина поверхности конденсации, м $L := 0.1$

Термическая проводимость пленки конденсата, Вт/(м² К) $\alpha_{Film} := 10000$

Концентрация, парциальное давление пара в потоке, точка росы

$C_{v_inf} := \frac{G_v}{(G_g + G_v)}$ $P_{vap} := \frac{p_{mix} \cdot (C_{v_inf} \cdot R_{vg})}{-C_{v_inf} + C_{v_inf} \cdot R_{vg} + 1}$ $C_{v_inf} = 0.5$

$t_{dew} := \text{root}(P_{vap} - p_{SatPa}(t_{dew} + 273.15), t_{dew}, 0, t_{vg})$ $t_{dew} = 37.69$ Cels

$Superheat := t_{vg} > t_{dew}$ $Superheat = 1$

$Re_L := \frac{(G_g + G_v) \cdot L}{\mu(t_{vg})}$ $Re_L = 1.08 \times 10^4$ $c_p := \frac{G_g \cdot c_{pg} + G_v \cdot c_{pv}}{G_v + G_g}$

Рис. 8.38. Ввод и первичная обработка исходных данных («root» – встроенная Mathcad-функция для нахождения корня уравнения)

$$\Psi_{S1_appr}(b_1) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow 0.856618 \\ \frac{\ln(1 + r b_1)}{r \cdot b_1} \end{array} \right. \quad \Psi_{KL}(b_1) := \frac{4}{2 + b_1 + 2 \cdot \sqrt{1 + b_1}} \quad \blacksquare$$

$$\Psi_{x_lam_S}(b_1) := \sqrt{\frac{\Psi_{S1_appr}(b_1)}{1 + b_1}}$$

$$\Psi_{x_turb_S}(b_1) := \frac{\Psi_{S1_appr}(b_1)^{0.8}}{(1 + b_1)^{0.2}}$$

$$Nu_{lam}(Re, Pr, b_1) := 0.66 \cdot Re^{0.5} \cdot Pr^{0.33} \cdot \Psi_{x_lam_S}(b_1)$$

$$Nu_{turb}(Re, Pr, b_1) := 0.037 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \cdot \Psi_{x_turb_S}(b_1)$$

$$Nu(Re, Pr, b_1) := \left(Nu_{lam}(Re, Pr, b_1)^4 + Nu_{turb}(Re, Pr, b_1)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

Рис. 8.39. Расчет интенсивности теплообмена на поверхности раздела фаз с учетом Ψ - коррекции

Центральное место в вычислительной программе занимает функция $\text{div}Q$, фиксирующая дисбаланс тепловых потоков на межфазной границе при некотором *пробном* значении температуры t_s на этой границе (рис. 8.40). В предпоследней строке программы записано уравнение (8.15), все члены которого собраны на одной стороне, т.е. результат ($\text{div}Q$) должен быть нулевым (здесь полезно вновь обратиться к базовым соотношениям (8.7)–(8.12), (8.15) и комментариям к ним в тексте).

$$\begin{aligned}
 \text{divQ}(t_s, t_w) := & \left(\begin{array}{l}
 p_{v_surf} \leftarrow p_{\text{SatPa}}(t_s + 273.15) \\
 C_{v_surf} \leftarrow \frac{1}{1 + R_{vg} \cdot \left(\frac{p_{\text{mix}}}{p_{v_surf}} - 1 \right)} \\
 b_1 \leftarrow \frac{C_{v_surf} - C_{v_inf}}{1 - C_{v_surf}} \\
 St_{\psi\text{corrected}} \leftarrow \frac{\text{Nu}(Re_L, Pr, b_1)}{Re_L \cdot Pr} \\
 \alpha_{vg} \leftarrow St_{\psi\text{corrected}} \cdot c_p \cdot (G_g + G_v) \\
 St_{D_ \psi\text{corrected}} \leftarrow \frac{\text{Nu}(Re_L, Pr_D, b_1)}{Re_L \cdot Pr_D} \\
 j_v \leftarrow (G_v + G_g) \cdot St_{D_ \psi\text{corrected}} \cdot b_1 \\
 \text{"Heat balance on interface"} \\
 \text{divQ} \leftarrow \alpha_{vg} \cdot (t_s - t_{vg}) + j_v \cdot r_0 - \alpha_{\text{Film}} \cdot (t_w - t_s) \\
 \left(\begin{array}{l}
 \text{divQ} \\
 j_v \\
 b_1
 \end{array} \right)
 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 8.40. Тепловой баланс на границе раздела фаз

Mathcad-программа обращается к встроенной функции «root» для нахождения корня нелинейного уравнения (рис. 8.41). Варьируя значения температуры t_s (или t_{surf} в другом обозначении) на поверхности раздела фаз, функция «root» устанавливает необходимый баланс потоков теплоты на межфазной границе.

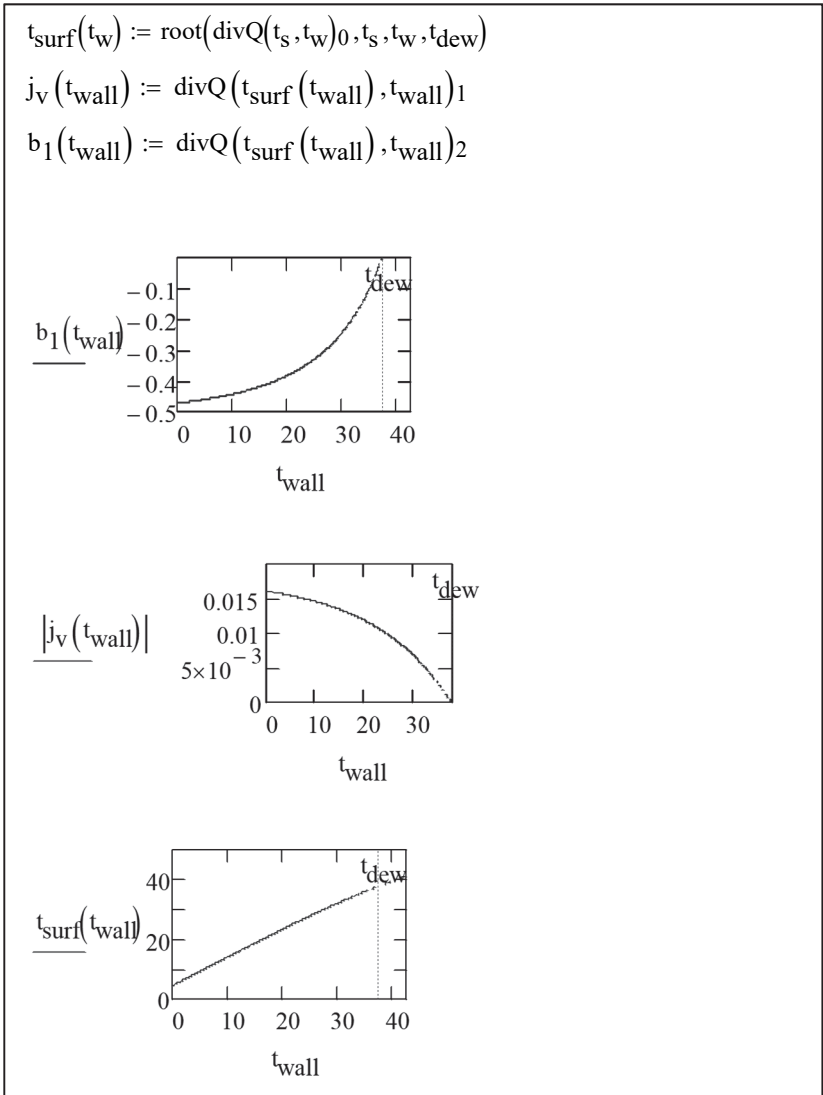


Рис. 8.41. Обращение к вычислительной программе и результаты расчета скорости конденсации из парогазовой смеси

Вычисления организованы так, что результаты зависят от заданной температуры охлаждаемой стенки t_w . В реальной конденсационной установке *уменьшения* этой температуры можно достичь *увеличением* интенсивности теплоотвода на другой стороне стенки и *уменьшением* температуры холодного теплоносителя.

Зафиксируем кратко результаты расчетов, представленные на диаграммах (рис. 8.41).

- Параметр проницаемости b_1 уменьшается по абсолютному значению и обращается в ноль при стремлении температуры охлаждаемой поверхности t_w к температуре точки росы парогазового потока t_{dew} .

- Температура межфазной границы t_{surf} растет вместе с температурой охлаждаемой стенки t_w .

- Скорость конденсации уменьшается j_v (по абсолютной величине) с ростом температуры охлаждаемой стенки t_w .

- Тепловой поток уменьшается с ростом температуры охлаждаемой стенки. Тепловой поток через пленку $\alpha_{\text{Film}}(t_{\text{surf}} - t_w)$ превышает теплоту конденсации $j_v r_0$ на величину, обусловленную перегревом пара.

Читателю предоставляется возможность провести самостоятельные детальные исследования работы конденсатора пара из парогазовой смеси, запустив Mathcad–программу [51].

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите тепломассообмен при конденсации/испарении из парогазовой среды или в нее.

2. Как, используя тройную аналогию, рассчитать характеристики тепло- и массообмена?

3. Запишите систему интегральных уравнений гидродинамического, теплового и диффузионного пограничного слоя.

4. Сформулируйте стандартные законы теплообмена, трения, массообмена. Как грамотно учесть влияние поперечного потока массы?

5. Примените интегральный метод для расчета тепло-массоотдачи при конденсации пара из парогазовой смеси.

Раздел 3. ТЕПЛООБМЕННИКИ

Глава 9. ОСНОВЫ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПОВЕРХНОСТНЫХ ТЕПЛООБМЕННИКОВ

Теплообменники являются едва ли не самыми распространенными аппаратами в технике и обыденной жизни. Наиболее значительные и масштабные устройства такого типа – это энергетические ядерные реакторы и парогенераторы тепловых электростанций. На другом полюсе находятся микроканальные теплообменники «MICRO-CATS» химических и тепловых микросистем.

Теплообменники являются необходимыми элементами сложных *теплотехнологий* в химической, металлургической, пищевой и др. отраслях промышленности. Современное жилище немислимо без эффективных теплообменников в системах отопления и кондиционирования. В каждом автомобиле работают радиаторы двигателей. В электронике, компьютерной технике проблема теплоотвода обсуждается так же остро, как и растущая частота процессоров.

В данной главе рассматриваются базовые понятия и элементарные алгоритмы проектирования теплообменников. Необходимое внимание уделено вопросам эффективности теплообменников, предельных достижимых температур подогрева (или охлаждения) теплоносителей. Приведен вывод основных уравнений для теплообменников в форме, удобной для проектирования вычислительной программы и предусматривающей обобщение на более сложные системы, например, с проницаемыми поверхностями раздела и переменными расходами теплоносителей. Рассмотрена задача многокритериальной оптимизации теплообменников.

9.1. Математическая модель теплообменника

Схема теплообменника

В теплообменниках (рис. 9.1) тепловой поток Q , Вт, передается от горячего теплоносителя к холодному через разделяющую поверхность (поверхность теплопередачи) F , м².

В наиболее распространенных *поверхностных* теплообменниках, которыми мы в дальнейшем и будем заниматься, разделяющая поверхность (стенка, перегородка) *непроницаема* для вещества. В *контактных* теплообменниках теплоносители могут быть разделены межфазной границей, проницаемой для вещества. В *регенеративных* теплообменниках горячий и холодный теплоносители попеременно обтекают насадку, соответственно отдавая или воспринимая теплоту в повторяющихся циклах.

Условимся считать Q положительной величиной и идентифицируем индексами 1 и 2 горячий и холодный теплоносители. Разделяющую поверхность будем рассматривать как *непроницаемую* для вещества.

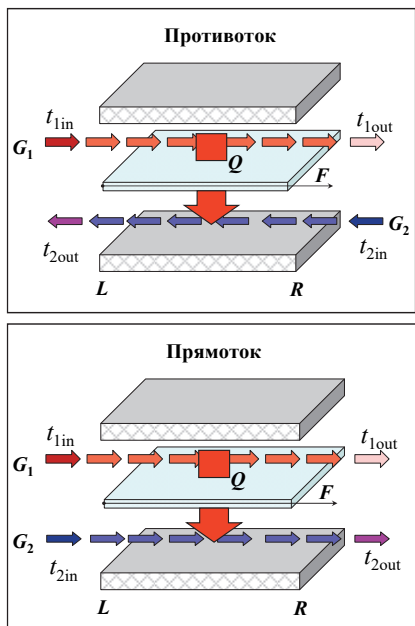
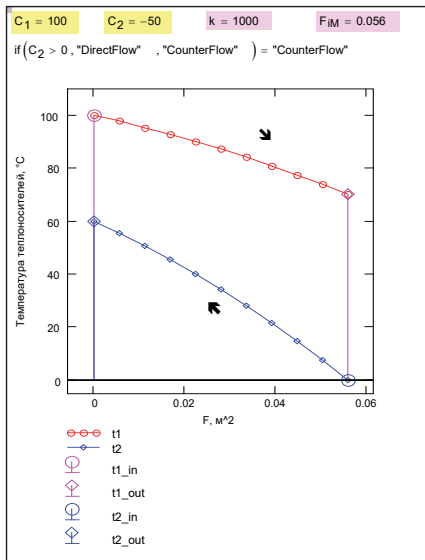
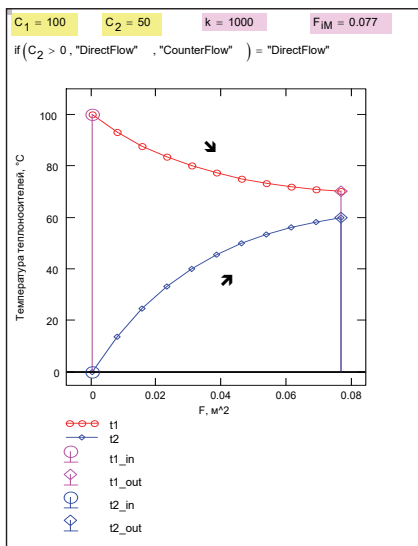


Рис. 9.1. Схематическое изображение теплообменника

Для двух основных схем движения теплоносителей – *противотока* и *прямотока* – жидкости движутся соответственно либо в противоположные стороны вдоль поверхности F , либо в одном направлении (рис. 9.1, 9.2).



a)



б)

Рис. 9.2. Противоток (а) и прямоток (б)

Координатная ось обозначена как F и ориентирована на схемах слева направо. Текущее значение F , отсчитываемое от левого сечения теплообменника, рассматривается как независимая переменная, функцией которой будут температуры сред: $t_1(F)$ и $t_2(F)$.

Будем считать расход горячего теплоносителя G_1 *всегда* положительным, а расход холодного G_2 – *отрицательным* для противотока и *положительным* для прямотока (рис. 9.1). Эти соглашения о знаках позволят унифицировать вычисления для двух рассматриваемых схем.

Уравнения сохранения для суммарных потоков

В основе математической модели теплообменника лежат формулировки законов сохранения массы и энергии. Для большинства применяемых на практике теплообменников можно принять, что

- потоки теплоносителей отделены от окружающей среды *непроницаемым* для вещества и энергии кожухом теплообменника,
- изменения механической (кинетической и потенциальной) энергии потоков пренебрежимо малы,
- внешняя работа не совершается.

В этих предположениях законы сохранения для системы, *объединяющей оба теплоносителя*, формулируются как условия постоянства вдоль F суммарного массового расхода G_Σ и суммарного потока энтальпии H_Σ :

$$G_\Sigma = G_1(F) + G_2(F) = \text{const} ; \quad (9.1)$$

$$H_\Sigma = H_1(F) + H_2(F) = \text{const} . \quad (9.2)$$

Уравнения сохранения (9.1), (9.2) утверждают, что *через любые* два поперечных сечения теплообменника потоки массы и энергии одинаковы. Если бы это было не так, то в контрольном объеме *между этими двумя сечениями* нарушались бы законы сохранения.

Уравнения сохранения для потоков теплоносителей

Рассмотрим далее горячий и холодный теплоносители как две *закрытые* системы: они обмениваются энергией, но не обмениваются веществом, поскольку поверхность теплопередачи считается *непроницаемой для вещества*.

В этом случае закон сохранения массы записывается как условие постоянства расходов:

$$G_1 = \text{const}; \quad G_2 = \text{const} . \quad (9.3)$$

Уравнение (9.2) дает для двух сечений теплообменника (левого L и правого R):

$$H_{1L} + H_{2L} = H_{1R} + H_{2R} . \quad (9.4)$$

Группируя потоки энтальпии соответственно для сред 1 и 2, получим уравнение баланса:

$$-(H_{1R} - H_{1L}) = H_{2R} - H_{2L} ,$$

согласно которому уменьшение энтальпии горячего теплоносителя равно увеличению энтальпии холодного теплоносителя.

Изменение энтальпий происходит вследствие того, что под действием разности температур ($t_1 - t_2$) возникает тепловой потока Q от горячего теплоносителя к холодному. Запишем для *каждого* теплоносителя закон сохранения энергии, согласно которому изменение энтальпии происходит вследствие подвода или отвода теплоты:

$$\begin{cases} Q = H_{1L} - H_{1R} \\ Q = H_{2R} - H_{2L} . \end{cases} \quad (9.5)$$

Напомним, что Q считается положительной величиной, т.е. это отводимый от горячего и подводимый к холодному теплоносителю тепловой поток.

Закон сохранения энергии в *дифференциальной форме* получается дифференцированием (9.5) по продольной координате F , если принять сечение L фиксированным, а сечение R текущим. Учитывая, что

$$\frac{d}{dF} Q \equiv q ,$$

где q – *локальное* значение плотности теплового потока от горячего теплоносителя «1» к холодному «2», получим:

$$\begin{cases} \frac{d}{dF} H_1(F) = -q \\ \frac{d}{dF} H_2(F) = q . \end{cases} \quad (9.6)$$

Итак, расходы теплоносителей постоянны, а изменения потоков энтальпии происходят в результате теплообмена между теплоносителями.

Условия сохранения, записанные в форме (9.6), представляют *одномерную дифференциальную модель* теплообменника. Термин «одномерная» предполагает, что изменения происходят вдоль единственной координаты (вдоль поверхности теплопередачи при прямотоке или противотоке) и поэтому мы имеем дело с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что при перекрестном токе придется записывать уже систему в частных производных, поскольку изменения происходят в двух характерных направлениях. Правые части дифференциальных уравнений (9.6) содержат плотности потоков энергии, для расчета которых, вообще говоря, может понадобиться вся информация, изложенная в полном курсе тепломассообмена.

Выразим потоки энтальпии H_1 и H_2 через расходы теплоносителей и их температуры. Если ограничиться *однофазными* теплоносителями, то удельную энтальпию h с достаточной для практических расчетов точностью можно рассчитать как

$$h_1 = c_{p1} t_1; \quad h_2 = c_{p2} t_2, \quad (9.7)$$

где удельные теплоемкости c_p принимаются приближенно постоянными величинами. Тогда для потоков энтальпии имеем:

$$\begin{aligned} H_1(F) &= G_1 h_1(F) \cong G_1 c_{p1} t_1(F) \equiv C_1 \cdot t_1(F); \\ H_2(F) &= G_2 h_2(F) \cong G_2 c_{p2} t_2(F) \equiv C_2 \cdot t_2(F), \end{aligned} \quad (9.8)$$

где C – величины массовой расходной теплоемкости:

$$G_1 c_{p1} \equiv C_1; \quad G_2 c_{p2} \equiv C_2. \quad (9.9)$$

Интегральное уравнение сохранения (9.5) можно записать теперь через значения температур, используя (9.8):

$$Q = C_1 (t_{1L} - t_{1R}) = C_2 (t_{2R} - t_{2L}). \quad (9.10)$$

Соотношение (9.6) в дифференциальной форме перепишется как:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dt_1}{dF} = -q \\ C_2 \frac{dt_2}{dF} = q. \end{cases} \quad (9.11)$$

Уравнение теплопередачи

Балансовые соотношения (9.6) или (9.11) показывают, что *скорость изменения* энтальпий (и температур) обоих теплоносителей определяется плотностью теплового потока q через поверхность теплопередачи. Локальные значения q рассчитываются по *уравнению теплопередачи*:

$$q = k \cdot (t_1(F) - t_2(F)). \quad (9.12)$$

Коэффициент теплопередачи k для плоской стенки вычисляется по формуле:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи по обеим сторонам разделяющей стенки, δ / λ – термическое сопротивление стенки. Методика определения указанных величин подробно рассматривается в других разделах курса. В данной главе коэффициент теплопередачи полагается заданным параметром.

Для сложных конфигураций перечисленные величины являются некоторыми эффективными характеристиками. Например, эффективный коэффициент теплоотдачи α оребренной поверхности может быть рассчитан по приближенной формуле:

$$\alpha = \alpha_{\text{true}} \left(\frac{F_{\text{free}}}{F} + \frac{F_{\text{finned}}}{F} E \right),$$

где E – коэффициент эффективности ребра, α_{true} – истинное значение коэффициента теплоотдачи на оребренной поверхности, которое может быть увеличено благодаря оребрению примерно в $(F_{\text{free}} + F_{\text{finned}})/F$ раз (это следует из приведенной формулы при $E \approx 1$, т.е. для ребер, сделанных из высокотеплопроводного материала).

Дифференциальная модель теплообменника

Уравнения сохранения в дифференциальной форме (9.11) с учетом (9.12) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dF} t_1 &= -\frac{k}{C_1} \cdot (t_1 - t_2); \\ \frac{d}{dF} t_2 &= \frac{k}{C_2} \cdot (t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (9.13)$$

Дифференциальные уравнения (9.13) определяют изменения искомых температур однофазных теплоносителей вдоль поверхности теплопередачи. Совместно с *граничными условиями*, задающими входные температуры теплоносителей, уравнения (9.13) составляют *математическую модель теплообменника*. Коэффициент теплопередачи k может быть переменной величиной вдоль поверхности теплопередачи F . Расходные теплоемкости C – приближенно постоянные величины.

Прямое интегрирование системы (9.13) с применением численных методов потребуются для сложных задач, с переменным и зависящим от температур коэффициентом теплопередачи (как это имеет место, например, для теплообменников с кипением и конденсацией). Если же k – постоянная величина или задана как функция $k(F)$, то следующее предварительное преобразование позволяет получить решение в аналитической форме.

Дифференциальное уравнение для температурного напора

Два обыкновенных дифференциальных уравнения (9.13) можно свести к одному уравнению относительно *локального температурного напора* Δt ,

$$\Delta t \equiv t_1 - t_2, \tag{9.14}$$

если почленно вычтуть уравнения (9.13) одно из другого:

$$\frac{d}{dF} \Delta t = -k \cdot m \cdot \Delta t, \tag{9.15}$$

где

$$m \equiv \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \text{const.} \tag{9.16}$$

Ясно, что получилось уравнение с разделяющимися переменными,

$$\frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -m \cdot (k dF), \tag{9.17}$$

интегрирование обеих частей которого в согласованных пределах

$$F = 0 \div F;$$

$$\Delta t = \Delta t_L \div \Delta t_R;$$
(9.18)

$$\int_{\Delta t_L}^{\Delta t_R} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -m \cdot \left(\int_0^F k dF \right)$$

приводит к соотношению:

$$\ln \left(\frac{\Delta t_R}{\Delta t_L} \right) = -m k_m F,$$
(9.19)

или, после потенцирования:

$$\Delta t_R = \Delta t_L \cdot \exp(-m k_m F),$$
(9.20)

где k_m – средне-интегральный коэффициент теплопередачи:

$$k_m \equiv \frac{\int_0^F k dF}{F}.$$
(9.21)

В зависимости от контекста, под F понимается либо текущее значение поверхности, либо полное для всего теплообменника.

Таким образом, в результате интегрирования уравнения (9.15) получено соотношение (9.20), определяющее изменение температурного напора вдоль теплопередающей поверхности F .

Формулы (9.19) (или (9.20)), совместно с уравнение теплового баланса (9.10), связывают значения температур на входах и выходах и дают, следовательно, решение поставленной задачи о расчете теплообменника. Однако конечные результаты можно представить в более наглядном виде. Из уравнений (9.10), (9.16) следует:

$$\frac{Q}{(t_{1L} - t_{1R})} = C_1; \quad \frac{Q}{(t_{2R} - t_{2L})} = C_2;$$

$$m = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{(t_{1L} - t_{2L}) - (t_{1R} - t_{2R})}{Q} = \frac{\Delta t_L - \Delta t_R}{Q}.$$
(9.22)

Подставляя выражение для m в уравнение (9.19) и перегруппируя члены, получим:

$$Q = k_m \left(\frac{\Delta t_R - \Delta t_L}{\ln \left(\frac{\Delta t_R}{\Delta t_L} \right)} \right) F. \quad (9.23)$$

Сравнивая (9.23) с обычной структурой уравнения теплопередачи (индекс « m » означает средние величины),

$$Q = k_m \Delta t_m F, \quad (9.24)$$

делают заключение, что в качестве среднего температурного напора следует применять так называемый *средний логарифмический напор*,

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_R - \Delta t_L}{\ln \left(\frac{\Delta t_R}{\Delta t_L} \right)}, \quad (9.25)$$

если в качестве *среднего коэффициента теплопередачи* используется *среднеинтегральное по поверхности* значение (9.21). Другими словами, в уравнении теплопередачи следует совместно (согласованно) использовать *среднеинтегральное* значение коэффициента теплопередачи и *среднелогарифмическое* значение температурного напора.

Система уравнений для теплового расчета теплообменника

Соберем вместе расчетные соотношения для теплообменника.

Уравнение теплового баланса (9.10):

$$Q = C_1 (t_{1L} - t_{1R}) = C_2 (t_{2R} - t_{2L}), \quad (9.26)$$

где

$$C_1 = G_1 c_{p1}; \quad C_2 = G_2 c_{p2}.$$

Уравнение теплопередачи (см. (9.23), (9.24)):

$$Q = k_m \Delta t_m F, \quad (9.27)$$

где

$$k_m \equiv \frac{\int_0^F k dF}{F}, \quad (9.28)$$

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_R - \Delta t_L}{\ln\left(\frac{\Delta t_R}{\Delta t_L}\right)}. \quad (9.29)$$

9.2. Эффективность теплообменника

Предельные достижимые выходные температуры и тепловой поток

Под эффективностью теплообменника понимают меру того, насколько конечные температуры теплоносителей близки к возможному пределу, *если заданы расходы и входные температуры*. Это важный практический вопрос. Например, если технологическое предназначение теплообменника – подогреть холодный воздух, то важно знать, какой максимальной температуры вообще можно достичь.

Рассмотрим противоточный теплообменник (рис. 9.2а). Обратим внимание на то, что более *сильно* меняется вдоль F температура теплоносителя с *меньшей* (по абсолютному значению) расходной теплоемкостью C , как это следует из уравнения теплового баланса (9.26). Мы видим, что на диаграмме температурная кривая с меньшим абсолютным значением C проходит с более крутым наклоном.

Пусть мы наращиваем поверхность теплопередачи F с целью увеличить количество переданного тепла Q . При этом выходная температура $t_{1\text{out}}$ горячего теплоносителя будет уменьшаться, а выходная температура $t_{2\text{out}}$ холодного – увеличиваться.

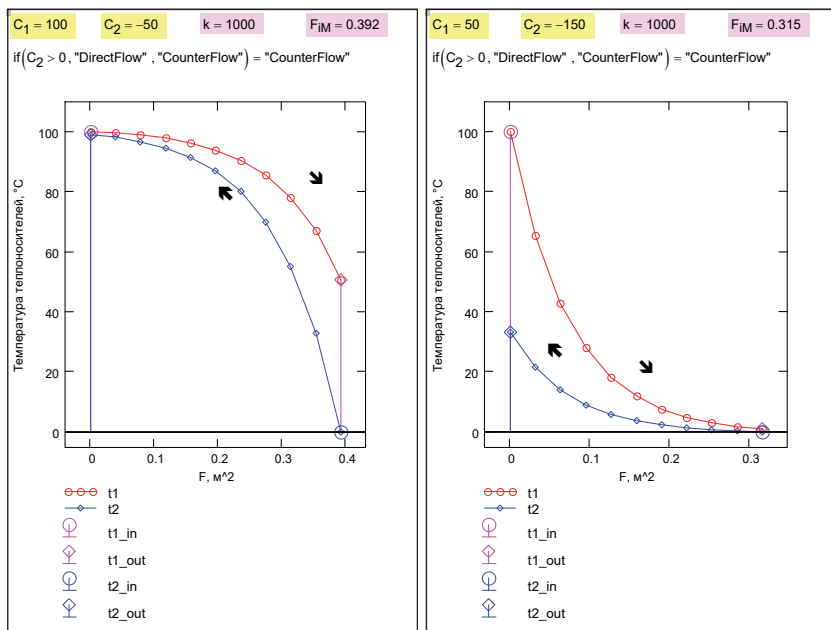
Из-за отмеченного выше различия в наклоне кривых, в пределе $F \rightarrow \infty$ получится, что если меньшее (по абсолютной величине) значение C будет у холодного теплоносителя ($|C_2| < C_1$), то он нагреется до входной температуры горячего, $t_{2\text{out}} \rightarrow t_{1\text{in}}$ (рис. 9.3а).

Если меньшее значение C будет у горячего теплоносителя ($C_1 < |C_2|$), то его можно охладить до входной температуры холодного, $t_{1out} \rightarrow t_{2in}$ (рис. 9.3б).

Таким образом, изменение температуры теплоносителя (т.е. нагрев или охлаждение) в случае противотока может достичь (при $F \rightarrow \infty$) максимально возможного значения:

$$t_{1in} - t_{2in}.$$

Очевидно, что t_{1in} – самая высокая температура в теплообменнике, а t_{2in} – самая низкая. Поэтому в рассмотренных предельных ситуациях при противотоке будет достигнут также абсолютный максимум теплового потока Q . Поскольку мы предполагаем разработать вычислительную программу для расчета теплообменников, соответствующий результат записан в алгоритмической форме в программном блоке на рис. 9.4.



а)

б)

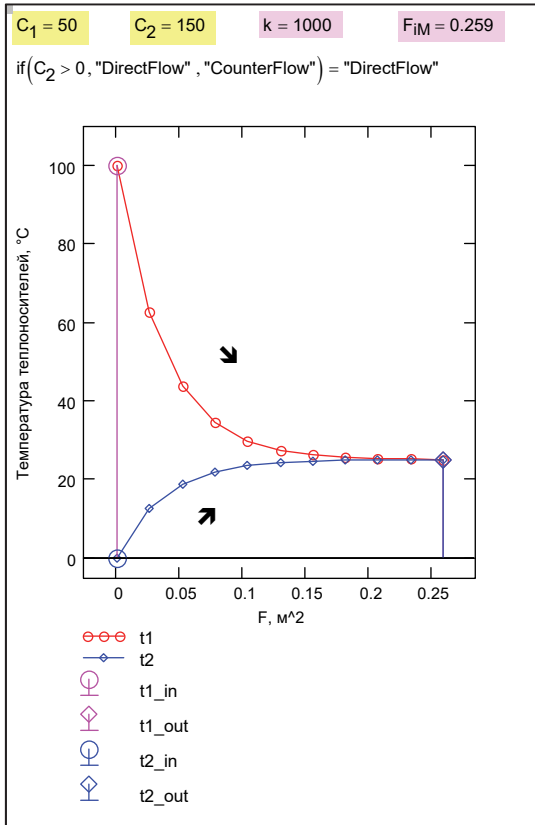
Рис. 9.3. Противоточный теплообменник максимальной эффективности

Counter Flow (CF):

$$Q_{\max CF}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}) := \begin{cases} C_1 \cdot (t_{1in} - t_{2in}) & \text{if } C_1 < |C_2| \\ |C_2| \cdot (t_{1in} - t_{2in}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 9.4. Максимальный достижимый тепловой поток для противотока

В случае прямоточного теплообменника, как видно из хода температурных кривых на рис. 9.2б, 9.5, при $F \rightarrow \infty$ выходные температуры теплоносителей *сравниваются*. Предельная температура $t_{1out_INF_DF} = t_{2out_INF_DF}$ на выходе определяется как *средневзвешенная* из t_{1in} и t_{2in} с расходными теплоемкостями C в качестве весов, как показано в программе на рис. 9.6.

**Рис. 9.5. Прямоточный теплообменник с предельной эффективностью**

Direct Flow (DF) :

Given $\frac{t_{2out} - t_{2in}}{t_{1in} - t_{1out}} = \frac{C_1}{|C_2|} \quad t_{1out} = t_{2out}$

Find $(t_{1out}, t_{2out}) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{\text{abs}(C_2) \cdot t_{2in} + C_1 \cdot t_{1in}}{\text{abs}(C_2) + C_1} \\ \frac{\text{abs}(C_2) \cdot t_{2in} + C_1 \cdot t_{1in}}{\text{abs}(C_2) + C_1} \end{array} \right)$

$Q_{\max DF}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}) := \left| \begin{array}{l} t_{1out_inf_DF} \leftarrow \frac{(C_2 \cdot t_{2in} + C_1 \cdot t_{1in})}{(C_2 + C_1)} \\ C_1 \cdot (t_{1in} - t_{1out_inf_DF}) \end{array} \right.$

Рис. 9.6. Расчет предельного теплового потока для прямотока

Сопоставляя с противотоком, мы отмечаем, что эта предельная температура ($t_{1out_INF_DF} = t_{2out_INF_DF}$), конечно, меньше чем t_{1in} и больше чем t_{2in} . Поэтому охлаждение горячего ($t_{1in} - t_{1out_INF_DF}$) или нагрев холодного теплоносителя ($t_{2out_INF_DF} - t_{2in}$) будут меньшими, чем при противотоке, когда эти разности достигали максимально возможного значения ($t_{1in} - t_{2in}$). Поэтому и предельно достижимый тепловой поток при *прямотоке* $Q_{\max DF}$ оказывается меньшим, чем при противотоке ($Q_{\max CF}$).

Располагая определением максимального достижимого теплового потока $Q_{\max CF}$ (см. программный блок на рис. 9.4), вводят количественную меру эффективности реального теплообменника

$$Eff = \frac{Q}{Q_{\max CF}} \quad (9.30)$$

как отношения теплового потока Q в теплообменнике (прямоточном или противоточном) к максимальному потоку при противотоке $Q_{\max CF}$.

Напомним, что выше в этом параграфе мы рассматривали гипотетические теплообменники с большой поверхностью теплопередачи $F \rightarrow \infty$, с целью определить предельно достижимые выходные температуры и тепловые потоки.

Ясно, что имеются ограничения на числовые значения эффективности Eff реальных теплообменников:

$$Eff = \frac{Q}{Q_{\max CF}};$$

$$Eff < 1; \text{ противоток (CounterFlow);} \quad (9.31)$$

$$Eff < \frac{Q_{\max DF}}{Q_{\max CF}} < 1 \text{ прямоток (DirectFlow)}$$

(см. программные блоки на рис. 9.4, 9.6).

Соотношение между эффективностью и числом единиц переноса тепла

Используя ранее выведенные соотношения (9.20), (9.22), можно представить расчетную модель теплообменника в виде следующего безразмерного соотношения для эффективности:

$$Eff = f\left(\frac{kF}{|C_{\min}|}, \frac{|C_{\min}|}{|C_{\max}|}\right), \quad (9.32)$$

где первый аргумент $kF/|C_{\min}|$ интерпретируется как безразмерный коэффициент теплопередачи (в литературе эту величину называют также *числом единиц переноса тепла* (Number of Heat-Transfer Units)), а второй есть соотношение расходных теплоемкостей.

Вид f в (9.32) различен для противотока и прямотока. Эти функции представлены в виде простых Mathcad-программ на рис. 9.7. Графики демонстрируют обсуждавшиеся выше различия в эффективности противоточной и прямоточной схем.

Из графиков на рис. 9.7 следует, что существуют режимы, при которых эффективность противотока и прямотока одинакова. Это возможно, если:

- расходные теплоемкости очень сильно отличаются по абсолютной величине,
- параметр NTU и соответственно величина Eff имеют малые значения.

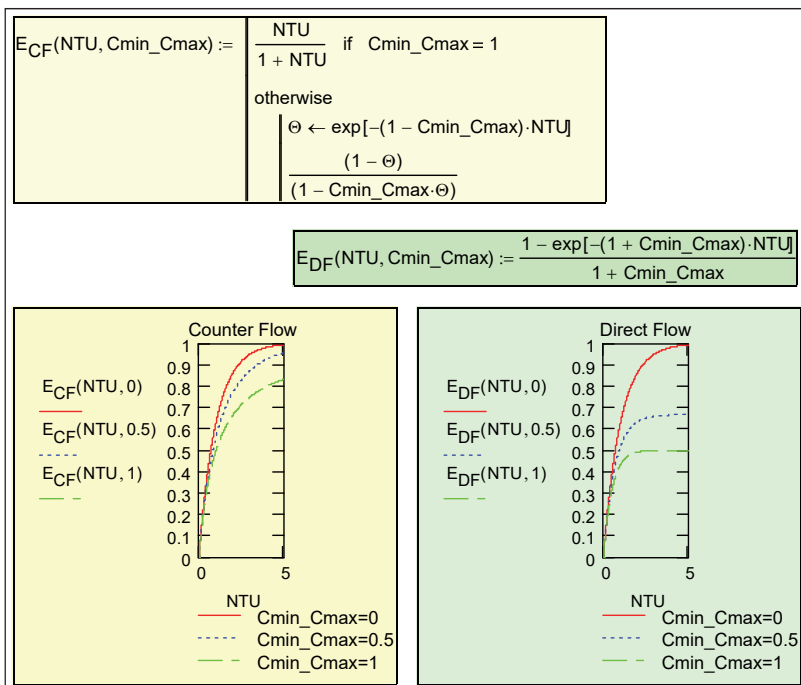


Рис. 9.7. Эффективность противоточного и прямоточного теплообменников

9.3. Программа для теплового расчета теплообменников

Конструкторский расчет

При *конструкторском расчете* теплообменника требуется рассчитать поверхность теплопередачи F , если заданы

- расходы теплоносителей,
- входные температуры теплоносителей,
- тепловой поток Q (или выходная температура одного из теплоносителей).

Это означает, что заранее задается эффективность теплообменника Eff ; недостающие величины для расчета легко определяются из уравнения теплового баланса (9.26). Следует проверить допустимость исходных данных. Должно быть $Eff < 1$, а для прямоточного теплообменника еще и $Eff < Q_{maxDF} / Q_{maxCF}$ (9.31). Эти особенности расчета показаны в программе для расчета выходной температуры по заданной эффективности (рис. 9.8).

$t_{out}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}, Eff) :=$	$maxEff \leftarrow 1 - 10^{-4}$ $Eff \leftarrow maxEff$ if $Eff \geq maxEff$ $Q_{max_max} \leftarrow Q_{maxCF}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in})$ if $C_2 > 0$ $\left[\begin{array}{l} Q_{max} \leftarrow Q_{maxDF}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}) \\ Eff \leftarrow \frac{Q_{max}}{Q_{max_max}} \cdot maxEff \text{ if } Eff \geq \frac{Q_{max}}{Q_{max_max}} \cdot maxEff \end{array} \right.$ $Q \leftarrow Eff \cdot Q_{max_max}$ $\left[(Eff) \left(t_{1out} \leftarrow t_{1in} - \frac{Q}{C_1} \right) \left(t_{2out} \leftarrow t_{2in} + \frac{Q}{C_2} \right) \right]$
---	--

Рис. 9.8. Расчет выходных температур по заданному коэффициенту эффективности

Вспомогательную роль играет подпрограмма t_{LorR} для идентификации входов и выходов теплоносителей (индексы in , out) и левого (L) или правого (R) сечений теплообменника (рис. 9.9). Заметим, что программа применима как для прямоточной, так и для противоточной схем, и мы предпочитаем, чтобы особенности этих схем учитывались автоматически, а не вручную.

$t_{LorR}(C_2, t_{1in}, t_{2in}, t_{1out}, t_{2out}) :=$	$\left(\begin{array}{l} t_{1L} \leftarrow t_{1in} \quad t_{1R} \leftarrow t_{1out} \\ t_{2L} \leftarrow t_{2out} \quad t_{2R} \leftarrow t_{2in} \\ t_{2L} \leftarrow t_{2in} \quad t_{2R} \leftarrow t_{2out} \text{ if } C_2 > 0 \\ \left(\begin{array}{l} t_{1L} \quad t_{1R} \\ t_{2L} \quad t_{2R} \end{array} \right) \end{array} \right.$
--	--

Рис. 9.9. Идентификация характерных температур

Основная программа HeatExch (HeatExchanger, теплообменник) рассчитывает поверхность теплопередачи и распределения температур теплоносителей вдоль теплообменника (рис. 9.10). Входными параметрами являются расходные теплоемкости C , входные температуры теплоносителей, коэффициент теплопередачи, эффективность Eff , число iM сечений, в которых будут вычисляться локальные характеристики. Расчеты ведутся по формулам (9.26)–(9.29), (9.20). Имея в виду демонстрационный характер программы, коэффициент теплопередачи k полагается постоянной величиной.

Распределение температур вдоль теплообменника рассчитывается в цикле для сечений F_i , смещающихся от левого к правому сечению теплообменника; значение F_{iM} с максимальным индексом iM является полной поверхностью теплопередачи. Поскольку значение Δt_L для каждого частичного теплообменника с поверхностью F_i известно (текст программы HeatExch на рис. 9.10), применима формула (9.20) для расчета локального температурного напора в каждом сечении.

$$\begin{aligned}
 \text{HeatExch}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}, k, \text{Eff}, iM) := & \left(\text{Eff } t_{1out} \ t_{2out} \right) \leftarrow t_{out}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}, \text{Eff}) \\
 & tLR \leftarrow t_{LorR}(C_2, t_{1in}, t_{2in}, t_{1out}, t_{2out}) \\
 & \left(\begin{array}{l} t_{1L} \leftarrow tLR_{0,0} \quad t_{1R} \leftarrow tLR_{0,1} \\ t_{2L} \leftarrow tLR_{1,0} \quad t_{2R} \leftarrow tLR_{1,1} \end{array} \right) \\
 & m \leftarrow \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\
 & Q \leftarrow C_1 \cdot (t_{1L} - t_{1R}) \\
 & (\Delta t_R \leftarrow t_{1R} - t_{2R} \quad \Delta t_L \leftarrow t_{1L} - t_{2L}) \\
 & \Delta tm \leftarrow \Delta t_L \quad \text{if } m = 0 \\
 & \Delta tm \leftarrow \frac{\Delta t_R - \Delta t_L}{\ln\left(\frac{\Delta t_R}{\Delta t_L}\right)} \quad \text{otherwise} \\
 & F_R \leftarrow \frac{Q}{k \cdot \Delta tm} \\
 & \text{for } i \in 1..iM \\
 & \left| \begin{array}{l} F_i \leftarrow \frac{F_R}{iM} \cdot i \\ \Delta t_i \leftarrow \Delta t_L \cdot \exp(-m \cdot k \cdot F_i) \\ Q \leftarrow k \cdot F_i \cdot \Delta t_L \quad \text{if } m = 0 \\ Q \leftarrow k \cdot F_i \cdot \frac{\Delta t_i - \Delta t_L}{\ln\left(\frac{\Delta t_i}{\Delta t_L}\right)} \quad \text{otherwise} \\ t_{1i} \leftarrow t_{1L} - \frac{Q}{C_1} \\ t_{2i} \leftarrow t_{1i} - \Delta t_i \end{array} \right. \\
 & (t_{10} \leftarrow t_{1L} \quad t_{20} \leftarrow t_{2L} \quad \Delta t_0 \leftarrow \Delta t_L) \\
 & \left(F \ t1 \ t2 \ \Delta t \ \text{Eff} \ \frac{k \cdot F_{iM}}{\min(C_1, |C_2|)} \ \frac{\min(C_1, |C_2|)}{\max(C_1, |C_2|)} \right)
 \end{aligned}$$

Рис. 9.10. Программа HeatExchanger

Выходные параметры программы HeatExch следующие: F – одномерный массив текущих значений поверхности теплопередачи, массивы t_1 , t_2 , Δt – распределения локальных температур горячего и холодного теплоносителей и температурного напора, соответственно. Далее следуют эффективность, число единиц переноса и отношение расходных теплоемкостей, т.е. величины, необходимые для построения зависимости (9.32).

Результаты работы вычислительной программы представлены на рис. 9.2, 9.3, 9.5. Прямой доступ к программе получают по ссылке [51].

Поверочный расчет

При *поверочном расчете* теплообменника заданы поверхность теплопередачи, коэффициент теплопередачи, входные температуры и расходные теплоемкости. Требуется рассчитать *выходные* значения температур и тепловой поток. Можно считать, что проводятся испытания готовой конструкции теплообменника, но на его компьютерной модели, доступ к которой можно получить по ссылке [51].

Эксперименты с компьютерной моделью теплообменника

Рекомендуется провести эксперименты с компьютерной моделью теплообменника. Предлагаются следующие темы для исследования.

- Влияние коэффициента теплопередачи на поверхность теплопередачи при заданной эффективности теплообменника Eff (провести расчеты по программе Heat_exchanger_Design, проанализировать основные теоретические соотношения (9.26)–(9.29), (9.30)).

- Сопоставление поверхности теплопередачи противоточного и прямоточного теплообменников при прочих одинаковых параметрах и формулировка рекомендации для практического применения сопоставляемых схем.

- Исследование специального случая с равными по величине расходными теплоемкостями. Сопоставление прямотока и противотока.

- Исследование теплообменников при сильно различающихся расходных теплоемкостях, когда их отношение может стремиться к нулю или бесконечности. Сопоставление прямотока и противотока.

- Анализ теплообменника при приближении эффективности к максимальному значению (при фиксированных значениях коэффициента теплопередачи, входных температур и расходных теплоемкостей).

- Применение программы HeatExch для *поверочного расчета* теплообменника, когда заданы поверхность теплопередачи, коэффициент теплопередачи, входные температуры и расходные теплоемкости, а рассчитать требуется *выходные* значения температур. Указание: следует составить уравнение для определения эффективности Eff с участием функции HeatExch.

9.4. Оптимизация теплообменников

При конструировании теплообменников стремятся получить аппарат минимальных габаритов и металлоемкости. Этого можно добиться, увеличивая скорость течения теплоносителей с целью интенсифицировать теплопередачу. Получившийся компактный теплообменник может, однако, потребовать слишком больших затрат на прокачку теплоносителей с повышенной скоростью. Чтобы судить о совершенстве аппарата, необходимо по крайней мере два критерия оценки:

- поверхность теплопередачи F ;
- затраты мощности на прокачку P .

Таким образом, задача оптимизации теплообменника является многокритериальной, причем отдельные требования могут быть противоречивыми. Одним из способов решения такого рода задач является построение *целевой функции* путем суммирования частных критериев с весовыми коэффициентами, например:

$$Z = F + Concept \cdot P \Rightarrow \min , \quad (9.33)$$

где F – площадь поверхности теплопередачи, m^2 ; P – суммарные затраты мощности на прокачку теплоносителей, Вт; $Concept$ – весовой коэффициент, $m^2/Вт$.

Если проектируется стационарная установка и большое значение придается уменьшению затрат на прокачку в течение длительного срока эксплуатации, то необходимо выбрать коэффициент *Concept* большим. Напротив, при проектировании мобильных и транспортных установок основное внимание уделяется уменьшению габаритов и металлоемкости, поэтому следует выбирать малые значения *Concept*. Таким образом, значение коэффициента *Concept* характеризует основной замысел, *концепцию* проектируемого аппарата.

При определении *Concept* можно исходить из оценок первоначальных капиталовложений (включая стоимость насосного оборудования, обеспечивающего прокачку теплоносителей), а также эксплуатационных расходов, пропорциональных затратам энергии на прокачку в течение всего срока эксплуатации. Тогда коэффициент *Concept* интерпретируется как отношение удельных затрат на эксплуатацию к удельным затратам на изготовление:

$$\underbrace{\Sigma}_{\text{Суммарные затраты, руб}} = \underbrace{C_F}_{\text{Удельные затраты на изготовление, руб/м}^2} \cdot F + \underbrace{C_P}_{\text{Удельные затраты на эксплуатацию, руб/Вт}} \cdot P \Rightarrow \min$$

$$Z = F + \text{Concept} \cdot P \Rightarrow \min$$

$$\text{Concept} = \frac{C_P \text{ м}^2}{C_F \text{ Вт}}$$

(коэффициент C_P включает также затраты на насосное оборудование).

Следует признать, что стоимостные оценки весьма нестабильны. Сам перечень критериев оптимизации на практике гораздо более широк, чем в (9.33), и его трудно формализовать, т.е. представить в количественной форме. Поэтому задачи оптимизации требуют высокопрофессионального экспертного анализа.

В учебной задаче мы ограничимся простейшей формулировкой (9.33) и примем некоторое ориентировочное значение для коэффициента *Concept*, определяющего концепцию проекта: $\text{Concept} = 0,01$.

Рассматривается теплообменник типа «труба в трубе». Один из теплоносителей (индекс 1 в программе на рис. 9.11) течет во

внутренней трубе, другой (индекс 2 в программе) – в кольцевом зазоре между трубами. Варьируя площади проходных сечений для теплоносителей, необходимо обеспечить минимум целевой функции Z . Это означает, что ищется некоторое компромиссное решение: теплообменник должен быть компактным и в то же время не требовать слишком больших затрат на прокачку теплоносителей.

Оптимальный вариант отыскивается при экспериментах с компьютерной моделью теплообменника (рис. 9.11–9.16).

Задание:
 При заданной эффективности Eff спроектировать противоточный теплообменник, оптимальный по критерию минимума суммарных затрат.

$Z = F + Concept * P \rightarrow \min$

Обозначения, основные уравнения

QmaxCF(...)

QmaxDF(...)

tOut(C1, C2, t1in, t2in, Eff)

properties

Ввод величин в СИ, см. Обозначения

Массовая расходная теплоемкость горячего теплоносителя:	$C_1 := 2500$	
Массовая расходная теплоемкость холодного теплоносителя:	$C_2 := -3750$	
Входная температура горячего теплоносителя:	$t_{1in} := 95$	
Входная температура холодного теплоносителя:	$t_{2in} := 15$	
	$Eff := 0.56$	
Начальные значения варьируемых проектных параметров:	$d_1 := 0.03$	$d_{2eq} := 0.02$
	$Concept := 0.01$	
	$R_{wall} := 0.00003$	

Рис. 9.11. Ввод исходных данных

Список определяющих параметров указан на рис. 9.11.

Отрицательное значение массовой расходной теплоемкости $C_2 = G_2 c_{p2}$ означает, что выбрана схема противотока.

Эффективность теплообменника Eff задана, и варианты оценки проводятся по алгоритму «Конструкторский расчет»: отыскивается поверхность теплопередачи F , обеспечи-

вающая заданный (опосредованно, через величину Eff) тепловой поток Q (рис. 9.12).

Заданы исходные значения варьируемых проектных параметров: диаметр внутренней трубы d_1 и эквивалентный диаметр кольцевого канала d_{2eq} :

$$d_{2eq} = d_2 - d_1,$$

где d_2 – диаметр наружной трубы. Трубы считаются тонкостенными, поэтому достаточно трех измерений (d_1, d_2, L) для описания геометрии системы. Поверхность теплопередачи $F = \pi d_1 L$, где длина труб L является искомой величиной при вариантных расчетах.

Физические параметры теплоносителей рассчитываются посредством аппроксимирующих соотношений (программа Prop) по среднеарифметической температуре теплоносителей (рис. 9.12).

Расчет

Flow := if($C_2 > 0$, "DirectFlow" , "CounterFlow") Flow = "CounterFlow"

Выходные температуры горячего и холодного теплоносителей:

(Eff Q Δtm t_{1L} t_{1R} t_{2L} t_{2R}) := $t_{out}(C_1, C_2, t_{1in}, t_{2in}, Eff)$

(Eff Q Δtm t_{1L} t_{1R} t_{2L} t_{2R}) = (0.56 1.12 × 10⁵ 42.227 95 50.2 44.867 15)

$$\begin{pmatrix} t_{1L} & t_{1R} \\ t_{2L} & t_{2R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 & 50.2 \\ 44.867 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Eff \\ Q \\ \Delta tm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 \\ 1.12 \times 10^5 \\ 42.227 \end{pmatrix}$$

Свойства

(ρ_1 c_{p1} λ_1 ν_1 Pr_1) := Prop("Water" , $\frac{t_{1L} + t_{1R}}{2}$)

(ρ_2 c_{p2} λ_2 ν_2 Pr_2) := Prop("Water" , $\frac{t_{2L} + t_{2R}}{2}$)

Расходы теплоносителей:

$G_1 := \frac{|C_1|}{c_{p1}}$ $G_2 := \frac{|C_2|}{c_{p2}}$ $G_1 = 0.595$ $G_2 = 0.893$

Рис. 9.12. Балансовые расчеты, определение свойств теплоносителей

Теплоотдача и сопротивление при течении в трубе и кольцевом канале рассчитываются в подпрограммах Tube и Ring (рис. 9.13, 9.14). Поскольку оптимизация обычно проводится на этапе начального проектирования, для расчетов в широком диапазоне чисел Рейнольдса выбраны простые аппроксимации, без учета поправок на температурную зависимость физических параметров, на наличие начальных участков и т. п.

Целевая функция (9.33) определена в подпрограмме $Z(d_1, d_{2eq})$ (рис. 9.15). Заметим, что в учебном примере при расчете мощности на прокачку P учтено только сопротивление трения в каналах теплообменника; вообще говоря, следует рассчитать весь контур циркуляции с учетом также местных гидравлических сопротивлений.

<p>Tube(w, d) :=</p> "tube" $\text{Re} \leftarrow \frac{w \cdot d}{\nu_1}$ $\text{Nu}_T \leftarrow 0.021 \cdot \text{Re}^{0.8} \cdot \text{Pr}_1^{0.43}$ $\text{Nu}_L \leftarrow 4$ $\text{Nu} \leftarrow \left(\text{Nu}_T^4 + \text{Nu}_L^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ $\alpha \leftarrow \frac{\text{Nu} \cdot \lambda_1}{d}$ $\xi_T \leftarrow \frac{0.316}{\text{Re}^{0.25}}$ $\xi_L \leftarrow \frac{64}{\text{Re}}$ $\xi \leftarrow \left(\xi_T^4 + \xi_L^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ <p>(α ξ)</p>	<p>Ring(w, d_{eq}, d) :=</p> "annular channel" $\text{Re} \leftarrow \frac{w \cdot d_{eq}}{\nu_2}$ $\text{Nu}_T \leftarrow 0.021 \cdot \text{Re}^{0.8} \cdot \text{Pr}_2^{0.43}$ $\text{Nu}_L \leftarrow 4.34 + 0.78 \cdot \frac{d + d_{eq}}{d}$ $\text{Nu} \leftarrow \left(\text{Nu}_T^4 + \text{Nu}_L^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ $\alpha \leftarrow \frac{\text{Nu} \cdot \lambda_2}{d_{eq}}$ $\xi_T \leftarrow \frac{0.316}{\text{Re}^{0.25}}$ $\xi_L \leftarrow \frac{96}{\text{Re}}$ $\xi \leftarrow \left(\xi_T^4 + \xi_L^4 \right)^{\frac{1}{4}}$ <p>(α ξ)</p>
--	--

Рис. 9.13. Расчет теплоотдачи и сопротивления в трубе

Рис. 9.14. Расчет теплоотдачи и сопротивления в кольцевом канале

Tube
Ring
Z - criterion func

$$\begin{aligned}
Z(d_1, d_{2eq}) := & \left[\begin{array}{l}
f_1 \leftarrow \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \quad f_2 \leftarrow \frac{\pi}{4} \cdot \left[(d_1 + d_{2eq})^2 - d_1^2 \right] \\
\left(w_1 \leftarrow \frac{G_1}{f_1 \cdot \rho_1} \quad w_2 \leftarrow \frac{G_2}{f_2 \cdot \rho_2} \right) \\
(\alpha_1 \quad \xi_1) \leftarrow \text{Tube}(w_1, d_1) \\
(\alpha_2 \quad \xi_2) \leftarrow \text{Ring}(w_2, d_{2eq}, d_1) \\
k \leftarrow \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + R_{\text{wall}} + \frac{1}{\alpha_2}} \\
F \leftarrow \frac{Q}{k \cdot \Delta t_m} \\
L \leftarrow \frac{F}{\pi \cdot d_1} \\
P \leftarrow \xi_1 \cdot \frac{L}{d_1} \cdot \frac{\rho_1 \cdot w_1^2}{2} \cdot \frac{G_1}{\rho_1} + \xi_2 \cdot \frac{L}{d_{2eq}} \cdot \frac{\rho_2 \cdot w_2^2}{2} \cdot \frac{G_2}{\rho_2} \\
Z \leftarrow F + \text{Concept} \cdot P \\
(Z \quad L \quad P \quad F \quad k \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \xi_1 \quad \xi_2)^T
\end{array} \right]
\end{aligned}$$

Z - criterion func
Целевая функция: $Z_{cr}(d_1, d_{2eq}) := Z(d_1, d_{2eq})_0$

Рис. 9.15. Целевая функция

Центральным пунктом модели (рис. 9.16) является обращение к встроенной Mathcad функции Minimize, отыскивающей минимум целевой функции Z , т.е. минимум суммарных затрат на теплообменник.

Наличие оптимума иллюстрируется трехмерной диаграммой $Z(d_1, d_{2eq})$ с варьируемыми проектными параметрами (d_1, d_{2eq}) на горизонтальной плоскости и суммарными затратами Z по вертикали, а также контурной диаграммой с линиями постоянных значений целевой функции Z .

Видно, что оптимизация обеспечила значительный выигрыш в суммарных затратах – примерно в полтора раза – по сравнению с исходным вариантом (ср. на рис. 9.16 пункты «Начальный вариант» и «Результат»).

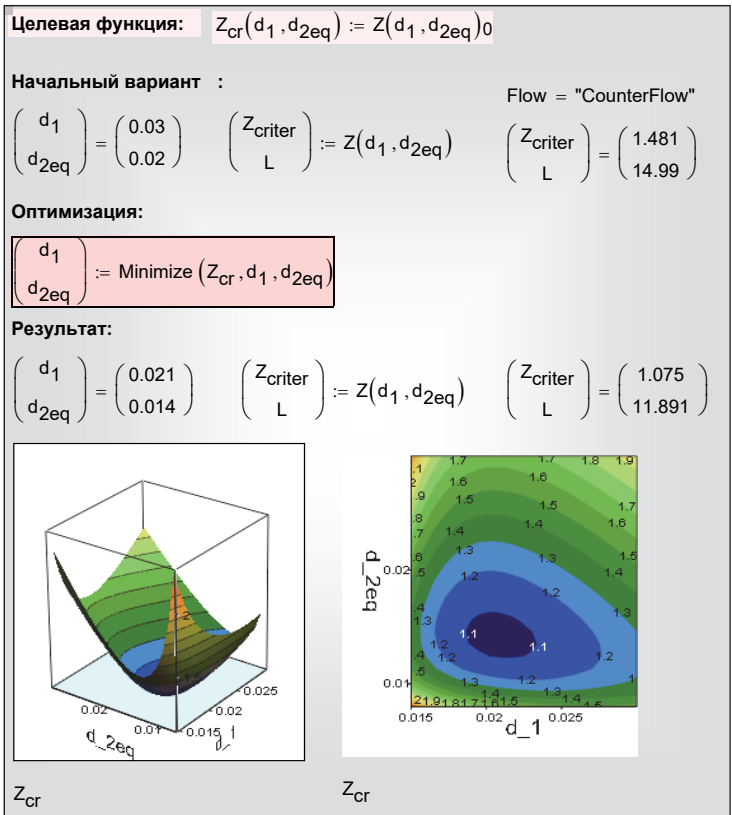


Рис. 9.16. Результат оптимизации

Mathcad программу оптимизации теплообменника можно вызвать по ссылке [51].

Предметом самостоятельных исследований могут быть следующие темы:

- усовершенствование программы $Z(d_1, d_{2eq})$ при расчете затрат на прокачку теплоносителей;
- изучение эффективности различных методов интенсификации теплопередачи (искусственная шероховатость, кольцевые выступы, оребрение);
- постановка задачи оптимизации с ограничениями;
- изменение геометрии поверхности теплопередачи;
- расширение перечня теплоносителей, исследование теплообменников газ–жидкость, газ–газ.

Заключение

Из сопоставительного анализа двух схем следует очевидное преимущество противотока перед прямотоком. Если один и тот же теплообменник испытать при противоточном и прямоточном включении, то во втором случае тепловой поток Q окажется существенно меньшим. Поэтому включение теплообменника по схеме прямотока в большинстве случаев следует рассматривать как инженерную ошибку. Однако, если изменение температуры по крайней мере одного теплоносителя мало по сравнению с температурным напором, то выигрыш от противотока нивелируется.

И все же существует ситуация, когда прямоток может быть предпочтительным. Для высокотемпературных газовых теплообменников необходимо обеспечить приемлемый уровень температуры разделяющей стенки, чтобы не допустить ее перегрева. Это легче сделать для прямоточного теплообменника, когда на входе, при самой высокой температуре горячего газа, по другую сторону поверхности имеет место контакт с самым холодным теплоносителем.

В разделе «Оптимизация теплообменников» эффективность Eff считалась предопределенной величиной при конструкторском расчете. В действительности выбор Eff – это сложная задача оптимизации более высокого уровня. Разработчик общей тепловой схемы энергетической установки стремится максимально использовать располагаемые перепады температур и задать поэтому большие, близкие к предельно возможным, значения Eff для теплообменников. Однако при этом потребуются большие поверхности теплопередачи F (п. 9.2). Теплообменники могут получиться громоздкими, дорогими в изготовлении и эксплуатации устройствами. Оптимизационные расчеты тепловой схемы установки должны показать, оправдаются ли дополнительные затраты термодинамическим выигрышем.

Если значение Eff выбрано, то можно поставить локальную задачу оптимизации теплообменника (п. 9.4), выбрав соответствующую целевую функцию, например, стремясь обратить суммарные затраты на приобретение и эксплуатацию теплообменника к минимуму. При решении этой задачи целесообразно использо-

вать интенсифицированные поверхности (с искусственной шероховатостью и т.п.).

Математическое описание в форме одномерной дифференциальной модели допускает обобщение на сложные системы с проницаемыми поверхностями раздела и переменными расходами теплоносителей, когда система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса, энергии потоков теплоносителей замыкается алгебраическими соотношениями для локальных поперечных потоков вещества, импульса, энергии.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие виды расчетов теплообменных аппаратов вы знаете?
2. Опишите метод среднелогарифмического температурного напора и ε -NTU метод теплового расчета теплообменных аппаратов.
3. Создайте дифференциальную модель теплообменника.
4. Как выглядит система уравнений теплового конструкторского и поверочного расчета теплообменного аппарата?
5. Предложите алгоритм оптимизации теплообменного аппарата на примере теплообменника типа «труба в трубе».

Глава 10. МИКРОТЕПЛООБМЕННИКИ

В зависимости от характерного поперечного размера каналов δ различают

- традиционные теплообменники с трубной насадкой:
 $\delta \sim 10 \text{ мм} \div 100 \text{ мм}$,

- компактные, в основном пластинчатые, теплообменники:
 $\delta \sim 1 \text{ мм} \div 10 \text{ мм}$,

- микроканальные теплообменники: $\delta \sim 10 \text{ мкм} \div 1 \text{ мм}$.

В соответствии с приведенной шкалой δ , микротеплообменники работают при малых значениях числа Рейнольдса ($Re = U\delta/\nu$), т.е. при ламинарном режиме течения теплоносителей. Несмотря на отсутствие турбулентного перемешивания, в микроканальных теплообменниках обеспечивается высокая интенсивность теплопередачи, благодаря малым значениям термических сопротивлений (δ/λ) стенок и теплоносителей. Поверхность теплопередачи в расчете на единицу объема достигает исключительно больших значений порядка $10^4 \text{ м}^2/\text{м}^3$, вследствие малости δ . В результате для объемной плотности теплового потока получаются экстремальные значения порядка $10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^3\text{К})$ (в расчете на единичный температурный напор). Сказанное в равной мере относится к диффузионным процессам в микрореакторах, испарителях, конденсаторах, и т.п.. Использование поверхностных каталитических реакций в микроканалах приближает эти устройства к эффективным биологическим системам.

Жидкостные микротеплообменники с их малыми размерами и экстремальными тепловыми характеристиками позволяют тесно интегрировать охлаждающие системы в устройства микроэлектроники и силовой электроники.

Прогнозируется быстрый прогресс в технологии микротеплообменников и их все более широкое применение, особенно в распределенных и мобильных технических системах, подобно тому как это произошло в электронике благодаря микроминиатюризации элементной базы.

В промышленных применениях термин «микро» относится к внутренней структуре теплообменных аппаратов, в то время как их суммарные характеристики производительности достигают значительных величин. Например, образец промышленного химического реактора высокой производительности сконструирован по модульному принципу из микрореакторов и имеет габарит 65 см и вес 290 кг. Производительность составляет 1700 кг/час жидкого реагента. Экзотермическая химическая реакция протекает в нескольких десятках тысяч микроканалов. Тепловой поток, генерируемый при химической реакции (примерно 100 кВт), передается (при температурном напоре в несколько градусов) через стенки микроструктуры к десяткам тысяч микроканалов с холодным теплоносителем. Максимальная расчетная тепловая производительность реактора как теплообменника достигает 800 кВт. Сообщается о модульном микротеплообменнике, заменяющем на порядок больший по габаритам традиционный теплообменный аппарат в схеме биодизельной установки. Достижимый выигрыш в габаритах и массе особенно важен для мобильных контейнерных установок.

Основы теплового расчета теплообменников изложены в гл 9. Далее рассматриваются особенности теплогидравлического расчета микротеплообменников. Проводятся оценки теплопередачи, сопротивления, эффективности и энергетического коэффициента. Численным методом в приближенной двумерной постановке рассчитываются *сопряженные поля температуры и скорости* в каналах и в твердой структуре с целью определения локальной теплопередачи. Приводится пример полного трехмерного моделирования с развивающимися термодинамическими полями.

10.1. Элементарные оценки теплопередачи и сопротивления

Схемы микротеплообменников

Типичные конфигурации микротеплообменников представлены на рис. 10.1, 10.2.

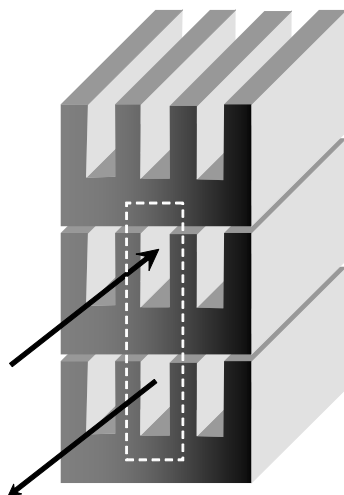


Рис. 10.1. Кремниевый микроканальный теплообменник

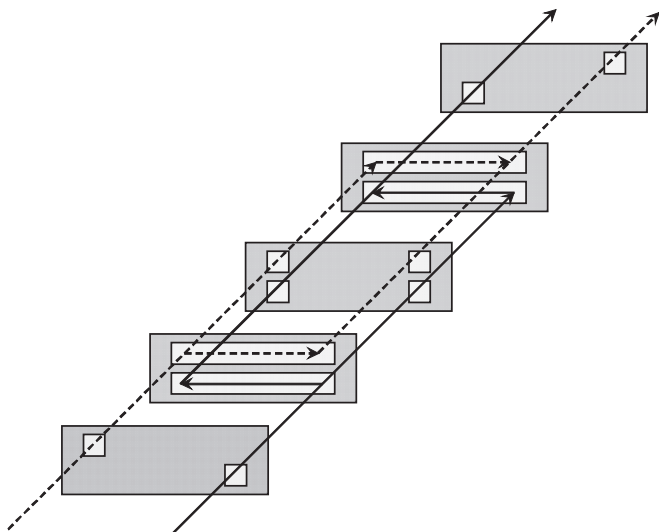


Рис. 10.2. Пластинчатый микроканальный теплообменник из нержавеющей стали

Микроканальный теплообменник (рис. 10.1) состоит из кремниевых блоков, созданных по объемной микротехнологии, аналогичной производству полупроводников. На рисунке для наглядности показана противоточная схема; оригинальный теплообменник собран по перекрестной схеме. Глубокие каналы в кремниевой подложке получены посредством анизотропного травления (глубина канала 200 мкм, ширина канала 40 мкм, толщина перегородки 40 мкм, высота секции 370 мкм). Габариты микротеплообменника составляют примерно (1 см x 1 см x 1 см), длина каналов – 1 см, объемная плотность поверхности теплообмена – $16000 \text{ м}^2/\text{м}^3$. Тепловой поток в испытаниях с водой как теплоносителем достигал 5000 Вт (т.е. $5 \cdot 10^9 \text{ Вт}/\text{м}^3$) при температурном напоре примерно 30К.

В другой технологии (рис. 10.2) матрицы параллельных микроканалов образуются при поочередном складывании пластин-перегородок и прокладок с фигурными вырезами, образующими каналы. Различная организация потоков получается при вариациях формы вырезов в прокладках. Толщина прокладок (минимальный размер поперечного сечения каналов) составляет 25–250 мкм. Необходимая конфигурация прокладок из нержавеющей стали создается фотохимическим травлением. Возможны также технологии лазерной обработки или штамповки при массовом производстве. Соединение пластин обеспечивается диффузионной сваркой. Описываются применения таких устройств в качестве камер сгорания и высокотемпературных химических реакторов.

Конструкции с плоскими щелевыми каналами шириной несколько десятков микрометров являются типичными для микротеплообменников. В перечень материалов входит нержавеющая сталь, кремний с его высокой теплопроводностью, температурной и коррозионной стойкостью, керамика для высокотемпературных и коррозионно-активных сред. Технологии изготовления дополняются обычными способами механической обработки, но с применением микроинструментов.

Геометрические характеристики

Характерным размером модельного микроканального теплообменника пластинчатой структуры (рис. 10.3) является ширина канала δ или примерно равная ей толщина перегородки. Параметр

ры пористости Por и объемной плотности поверхности теплопередачи F_{Vol} , m^2/m^3 определяются уравнениями:

$$Por \equiv \frac{\delta(L_y L_z)}{2\delta(L_y L_z)} = \frac{1}{2}; \quad F_{Vol} \equiv \frac{(L_y L_z)}{2\delta(L_y L_z)} = \frac{1}{2\delta}. \quad (10.1)$$

Параметр Por задает также долю фронтального сечения $L_x L_y$, занятую каналами.

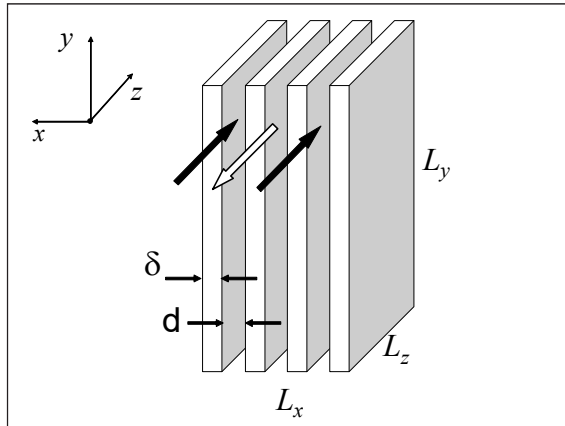


Рис. 10.3. Геометрические характеристики теплообменника

Теплопередача

Оценим коэффициент теплопередачи, принимая во внимание заведомо ламинарный характер течения в микроканалах, благодаря малым значениям числа Рейнольдса. Будем считать одинаковыми оба теплоносителя, т.е. рассмотрим, например, «водяной» или «газо-газовый» теплообменники. Примем также предположение о достаточной длине каналов, чтобы считать течение гидродинамически стабилизированным. Тогда для коэффициента теплоотдачи справедлива оценка $\alpha \sim \lambda_f / \delta$, а для коэффициента теплопередачи – соответственно:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\lambda_s} + \frac{1}{\alpha}} \approx \frac{1}{\frac{\delta}{\lambda_f} + \frac{\delta}{\lambda_s} + \frac{\delta}{\lambda_f}} \approx \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\delta}, \quad (10.2)$$

где λ_f и λ_s – теплопроводность теплоносителя и стенки.

Объемная плотность теплового потока q_{Vol} , Вт/м³ при температурном напоре ΔT оценивается следующим образом, с учетом (10.1), (10.2):

$$q_{Vol} = kF_{Vol} \Delta T \approx \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\delta} \frac{1}{2\delta} \Delta T. \quad (10.3)$$

Сопротивление

Средняя массовая скорость при пуазейлевском течении в плоском щелевом канале рассчитывается по уравнению:

$$\rho w = \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\nu_f} \left(\frac{dp}{dz} \right). \quad (10.4)$$

Приведенная (отнесенная к единице фронтального сечения теплообменника) массовая скорость каждого теплоносителя составляет:

$$\rho W = \left(\frac{1}{2} Por \right) \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\nu_f} \left(\frac{dp}{dz} \right) \Rightarrow \rho W = \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\nu_f} \left(\frac{dp}{dz} \right). \quad (10.5)$$

Затраты мощности на прокачку в расчете на единичный объем N_{Vol} , Вт/м³ определяются как произведение объемного расхода на градиент давления:

$$N_{Vol} = W \frac{dp}{dz} = \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{\nu_f \rho_f} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2. \quad (10.6)$$

Энергетический коэффициент теплообменника

Оценим теплогидравлическое совершенство микротеплообменника посредством энергетического коэффициента М.В. Кирпичева – E , определяемого как отношение теплового потока к мощности на прокачку теплоносителей:

$$E = \frac{q_{Vol}}{N_{Vol}} = \frac{kF_{Vol} \Delta T}{N_{Vol}}. \quad (10.7)$$

Удобно считать, что рассматриваются теплообменники с единичной фронтальной поверхностью и варьируемой длиной по ходу потока L_z . Зафиксируем при вариантных расчетах соотноше-

ние расходных теплоемкостей Gc_p и число единиц переноса NTU, а именно, примем единичные значения этих параметров:

$$\frac{(Gc_p)_{\min}}{(Gc_p)_{\max}} = 1; \quad NTU \equiv \frac{kF}{Gc_p} = 1. \quad (10.8)$$

Для эффективности теплообменника Eff , т.е. отношения фактического теплового потока к максимально возможному в противоточном теплообменнике,

$$Eff \equiv \frac{Q}{Q_{\max}} = f \left(\frac{kF}{(Gc_p)_{\min}}, \frac{(Gc_p)_{\min}}{(Gc_p)_{\max}} \right), \quad (10.9)$$

в случае противоточного теплообменника с одинаковыми теплоносителями справедливо уравнение:

$$Eff = \frac{NTU}{1 + NTU}; \quad NTU=1 \Rightarrow Eff = 0,5. \quad (10.10)$$

Таким образом, рассматривается характерный класс противоточных микротеплообменников с фиксированным параметром $NTU = 1$ и фиксированной эффективностью $Eff = 0,5$. В таких аппаратах передается половина максимально возможного теплового потока. Заметим, что увеличение NTU выше значения 1 привело бы уже к непропорционально меньшему росту эффективности Eff , чем и обосновывается выбор параметров модельного теплообменника.

Выпишем условие фиксированного числа единиц переноса ($NTU = 1$, $Eff = 0,5$), используя соотношения для теплопередачи (10.3) и расхода (10.5):

$$NTU \equiv \frac{kF}{Gc_p} = \frac{k F_{Vol} L_z}{\rho W c_p} = \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s) \frac{1}{\delta} \frac{1}{2\delta} L_z}{c_{p_f} \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{v_f} \left(\frac{dp}{dz} \right)} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dp}{dz} = \left(\frac{\min(\lambda_f, \lambda_s) \frac{1}{\delta} \frac{1}{2\delta}}{c_{p_f} \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{v_f}} \right) L_z. \quad (10.11)$$

Видно, что увеличенной длине L_z при $NTU = \text{const}$ соответствует увеличенный расход и, следовательно, повышенный градиент давления.

Теперь, используя уравнения (10.7), (10.3), (10.6), (10.11) можно рассчитать энергетический коэффициент E :

$$E = \frac{\frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\delta} \frac{1}{2\delta} \Delta T}{2 \frac{1}{4} \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{v_f \rho_f} \left(\frac{dp}{dz} \right)^2} = \frac{1}{48} \left(\frac{\delta^2}{L_z^2} \right) \left(\delta^2 \frac{(\rho_f c_{pf})^2 \Delta T}{\min(\lambda_f, \lambda_s) \cdot \mu_f} \right). \quad (10.12)$$

Формула (10.12) справедлива для характерного противоточного микротеплообменника с одинаковыми теплоносителями («вода–вода», «газ–газ») и со значениями параметров: $(Gc_p)_1 / (Gc_p)_2 = 1$, $NTU = 1$, $E_{eff} = 0,5$.

Кроме размеров δ и L_z и свойств теплоносителя, выражение (10.12) включает температурный напор как режимный параметр. Числовые значения энергетического коэффициента обычно указывают для единичного температурного напора, имея в виду пропорциональность $E \sim \Delta T$.

Ограничения, связанные с затратами мощности на прокачку

Вариантные расчеты (рис. 10.4, 10.5) проведены по уравнению (10.12) при $\min(\lambda_f, \lambda_s) = \lambda_f$ для двух значений ширины канала ($\delta = 40$ мкм и $\delta = 400$ мкм) и для двух видов теплоносителя (оба теплоносителя – вода или оба теплоносителя – воздух).

На графиках представлен обратный энергетический коэффициент E^{-1} , т.е. отношение затрат на прокачку к тепловому потоку как функция от длины канала L_z , м. Граничная ситуация отмечена горизонтальной линией на уровне 1, а приемлемый, на порядок меньший уровень затрат – на уровне 0,1. Эти граничные числовые значения являются ориентировочными; обоснованием выбора должны служить оптимизационные расчеты теплообменников. Возможно, что в специальных приложениях затраты на прокачку будут учитываться с малым весовым вкладом, например, если основной задачей является обеспечение заданного температурного режима.

При ширине каналов $\delta = 40$ мкм в случае воды как теплоносителя приемлемый уровень затрат на прокачку получается для $L_z \leq 1$ см (рис. 10.4).

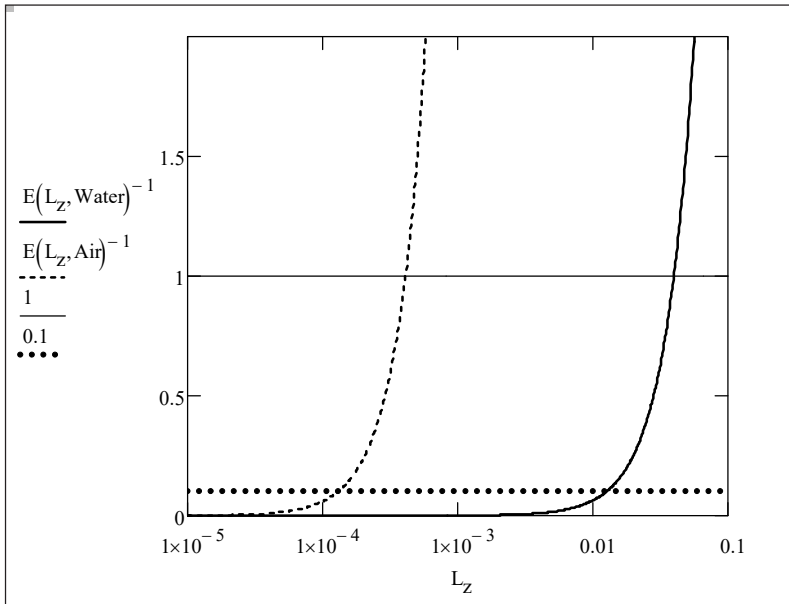


Рис. 10.4. Энергетический коэффициент теплообменника с фиксированной толщиной канала 40 мкм и переменной длиной L_z , м

Цифровые оценки иллюстрируют исключительно высокие значения поверхности переноса в единице объема ($F_{vol} \sim 10^4$ м²/м³, формула (10.1)) и объемной плотности теплового потока ($kF_{vol} \sim 10^8$ Вт/(м³К), формула (10.3)). Они согласуются с данными испытаний для теплообменника на рис. 10.1.

Для воздушного теплообменника принятый поперечный размер канала ($\delta = 40$ мкм), по-видимому, слишком мал, поскольку затраты на прокачку слишком велики даже для очень коротких каналов (рис. 10.4, кривая $E(L_z, \text{Air})$). Решение проблемы состоит в увеличении толщины канала. Разумная граница $L_z \leq 1$ см обеспечивается при десятикратно увеличенной ширине канала до $\delta = 400$ мкм (рис. 10.5).

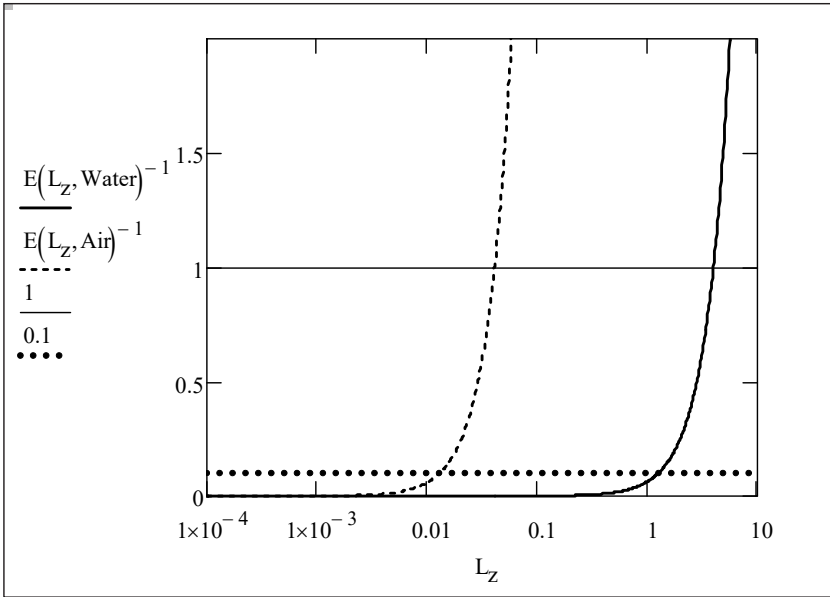


Рис. 10.5. Энергетический коэффициент теплообменника с фиксированной толщиной канала 400 мкм и переменной длиной по ходу теплоносителя

Проведенные оценки поясняют особенность компоновки микроканальных теплообменников: они имеют небольшую протяженность по ходу теплоносителя и развитую фронтальную поверхность, чтобы обеспечить приемлемое значение энергетического коэффициента E , если проектируется установка с относительно высоким расходом теплоносителя.

Представим результаты в более компактной форме. Пусть при проектировании выбрано некоторое критическое значение энергетического коэффициента (например, $E_{cr} = 10$). Тогда из уравнения (10.12) следует оценка максимальной относительной длины микроканала (обозначение L_{δ_max} на рис. 10.6), при которой потери еще не превышают допустимого уровня:

$$\left(\frac{L_z}{\delta} \right)_{\max} = \delta \frac{\rho_f c_{pf}}{\sqrt{\min(\lambda_f, \lambda_s) \cdot \mu_f}} \sqrt{\frac{1}{(E_{cr} / \Delta T) 48}}. \quad (10.13)$$

Результаты оценок

Когда длина канала $L_{\delta_{\max}}$ выбрана ($L_{\delta_{\max}} \approx 315$ в числовом примере с водой), можно оценить абсолютные величины потерь. Для рассматриваемого теплообменника с $NTU = 1$ из (10.11) следует выражение для истинной скорости теплоносителя:

$$\rho_f W c_{pf} = NTU \cdot k F_{vol} L_z = 1 \cdot \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\delta} \frac{1}{2\delta} L_z \Rightarrow$$
$$W = \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\rho_f c_{pf}} \frac{1}{2\delta} \frac{L_z}{\delta} \Rightarrow w = \frac{W}{Por / 2} = \frac{2}{Por} \cdot \frac{\min(\lambda_f, \lambda_s)}{\rho_f c_{pf}} \frac{1}{2\delta} \left(\frac{L_z}{\delta} \right).$$

Дальнейшие вычисления по приведенным выше формулам дают значения средней расходной скорости $w = 2,24$ м/с, числа Рейнольдса $Re_{d_{eq}} = 179$, перепада давления $\Delta p = 0,211$ МПа. Эти расчеты для модельной конструкции (рис. 10.3, «вода–вода», $\delta = 40$ мкм) удовлетворительно согласуются с данными испытаний кремниевого микротеплообменника рис. 10.1.

Проведенные элементарные оценки определяют порядок величин теплопередачи и сопротивления для характерного модельного микротеплообменника (рис. 10.3) с характеристиками (10.8), (10.10). Основные результаты представлены уравнениями (10.3) для объемной плотности теплового потока, (10.6) – для затрат мощности на прокачку, (10.12) – для энергетического коэффициента микротеплообменника. Цифровые оценки дают исключительно высокие значения поверхности переноса в единице объема (порядка 10^4 м²/м³) и объемной плотности теплового потока (порядка 10^8 Вт/(м³К) для водо-водяного теплообменника).

Ограничение, связанное с затратами на прокачку, выражено формулой (10.13) и графиками на рис. 10.6.

Для водо-водяного теплообменника приемлемым сочетанием размеров канала является $\delta = 40$ мкм и $L_z = 1$ см. Для воздушного теплообменника при той же длине $L_z = 1$ см ширина канала должна быть на порядок больше: $\delta = 400$ мкм.

При расчете реальных конструкций следует учитывать особенности конфигурации каналов и перегородок, конкретное соот-

ношение коэффициентов теплопроводности жидкости и твердой структуры. В микротеплообменниках эквивалентный диаметр канала соизмерим с характерной толщиной твердой структуры, поэтому обычная схема теплопередачи через тонкую стенку становится, вообще говоря, неприменимой.

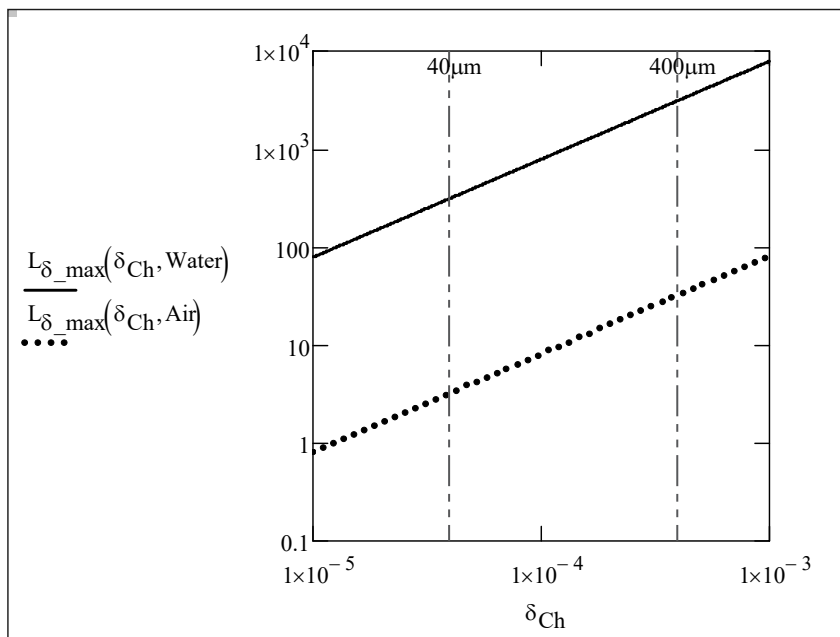


Рис. 10.6. Максимальная относительная длина микроканала L_{δ_max} как функция ширины канала δ_{Ch} , м

Дополнительные осложнения вносятся возможной зависимостью свойств от температуры. Естественным разрешением указанных проблем является многомерное численное моделирование сопряженных полей температуры и скорости в каналах и в твердой структуре с целью надежного определения локальной теплопередачи.

10.2. Численное моделирование теплопередачи в микротеплообменниках

Математическая постановка сопряженной задачи теплопроводности и конвекции в каналах

Постановка двухмерной сопряженной задачи для температурного поля в потоке жидкости и в твердой структуре призвана учесть возможную сильную неоднородность температуры и плотности теплового потока по периметру канала. Целью расчетов является определение эффективного коэффициента теплопередачи как функции от геометрии микроструктуры и соотношения теплопроводностей теплоносителя и твердого скелета.

Объектом численного моделирования является микротеплообменник, представленный на рис. 10.1, где пунктиром выделена расчетная область. Предполагается вынужденное течение в микроканалах под действием продольного градиента давления. Влияние свободной конвекции не учитывается, вследствие относительно малых значений характерного комплекса Gr/Re^2 . Благодаря значительной протяженности микроканалов течение можно считать гидродинамически стабилизированным. При постоянных, не зависящих от температуры свойствах жидкости гидродинамическая задача может быть решена независимо от тепловой задачи. Хотя решение для ламинарного течения в прямоугольных каналах известно, целесообразно провести его численным методом, имея в виду перспективу развития расчетной модели в более общей постановке.

При установившемся, параллельном стенкам канала течении отлична от нуля только продольная составляющая скорости:

$$w = w(x, y); \quad u = 0; \quad v = 0.$$

Уравнение движения вязкой жидкости при этом упрощается до уравнения Пуассона:

$$0 = -\frac{dp(z)}{dz} + \mu \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right),$$

где градиент давления должен быть постоянной величиной:

$$\frac{dp(z)}{dz} = \text{const},$$

принимаемой в качестве числового параметра, определяющего среднюю скорость или расход теплоносителя.

Температурное поле в канале трехмерное: температура переменна по сечению канала из-за теплоотвода к стенкам, и по той же причине убывает (или возрастает при подводе теплоты) по длине канала:

$$0 = -w(x, y) \frac{\partial t(x, y, z)}{\partial z} + a \left(\frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial z^2} \right).$$

Однако если пренебречь продольной теплопроводностью,

$$\frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial z^2} \ll \max \left(\frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 t(x, y, z)}{\partial y^2} \right)$$

и принять для продольной производной от температуры допущение:

$$\frac{\partial t(x, y, z)}{\partial z} \approx \frac{d}{dz} t_f(z) = \text{function}(z),$$

где производная (dt_f/dz) от средней по теплосодержанию температуры t_f связана с тепловым потоком q_l балансовым уравнением:

$$\frac{d}{dz} (Gc_p t_f(z)) = q_l(z) \Rightarrow \frac{d}{dz} t_f(z) = \frac{q_l(z)}{Gc_p},$$

то в качестве определяющего уравнения для температуры жидкости вновь получается двухмерное уравнение Пуассона:

$$0 = -w(x, y) \frac{dt_f}{dz} + a \left(\frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \right).$$

Производная (dt_f/dz) является числовым параметром, определяющим, в конечном счете, локальный температурный напор в теплообменнике (т.е. разность между средними по теплосодержанию температурами теплоносителей в данном сечении z). Это же уравнение, но с нулевым значением скорости, описывает температурное поле в твердой структуре.

Расчеты проводились для водо-водяного противоточного микротеплообменника с одинаковыми расходами теплоносителей, поэтому значение параметра (dt_f/dz) в двух каналах принято одинаковым по абсолютной величине, но противоположным по знаку.

Граничные условия были следующими. Для гидродинамической задачи ставилось условие прилипания на внутренних стенках каналов. Для тепловой задачи на внутренних границах реализовывались условия идеального теплового контакта между теплоносителем и стенкой. Вертикальные боковые границы (пунктир на рис. 10.1) считались адиабатическими вследствие симметрии. На верхней и нижней границах ставились так называемые периодические условия – с одинаковыми распределениями температуры и теплового потока.

Имеется особенность при постановке такой краевой задачи, поскольку абсолютный уровень температуры не определен, а задается только перепад температур между теплоносителями (как указывалось выше, параметром (dt_f/dz)). Чтобы обеспечить сходимость при счете, применялась следующая регуляризация: на внешних боковых поверхностях допускался очень слабый теплообмен с окружающей средой при некоторой заданной температуре. Доля «тепловых потерь» была пренебрежимо малой по сравнению с тепловым потоком между теплоносителями в каналах теплообменника.

Результаты численного интегрирования двумерной задачи

Поля скоростей и температур рассчитывались численным методом конечных элементов. Вариантные расчеты производились для фиксированной конфигурации канала (рис. 10.7), но при различных сочетаниях коэффициентов теплопроводности теплоносителей и структуры.

Базовыми случаями были два теплообменника: а) с одинаковой теплопроводностью теплоносителя и стенок $\lambda_f = \lambda_s = 0,6$ Вт/мК (рис. 10.7а, условно «водо-водяной керамический теплообменник») и б) с теплопроводностью стенки, намного большей теплопроводности теплоносителя (рис. 10.7б, условно «водо-водяной кремниевый теплообменник», $\lambda_s = 120$ Вт/мК, $\lambda_s \gg \lambda_f$).

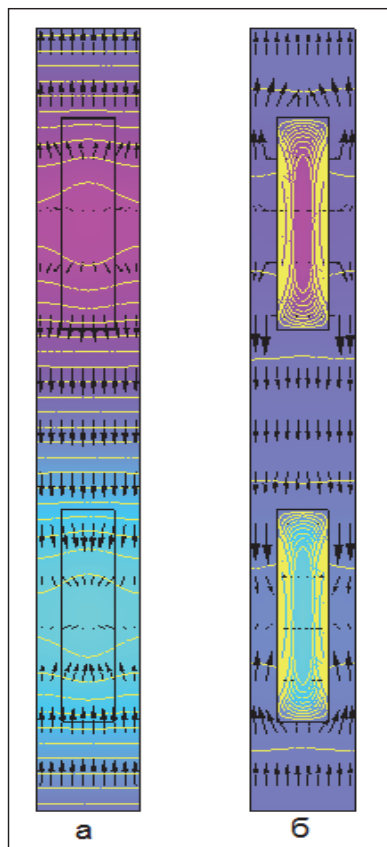


Рис. 10.7. Поля температур и тепловых потоков в керамическом (а) и кремниевом (б) водо-водяном микротеплообменнике (внутренние прямоугольники – каналы, сплошные линии – изотермы, стрелки – векторы плотности теплового потока, холодные оттенки цвета – низкие температуры, теплые оттенки – высокие температуры)

Температурные поля в сопоставляемых случаях существенно различны. Кремниевая структура с высокой теплопроводностью почти изотермична, а основные изменения температуры сосредоточены в каналах (рис. 10.7б). В керамическом теплообменнике градиенты температуры более равномерно распределены по всей расчетной области, включающей каналы и твердую структуру (рис. 10.7а). Распределения по периметру канала отличаются, вообще говоря, от обычно принимаемых простых условий постоянного теплового потока или постоянной температуры (рис. 10.8).

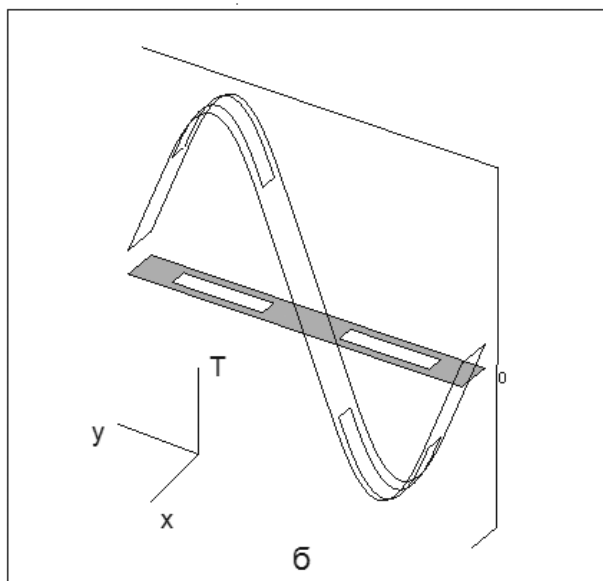
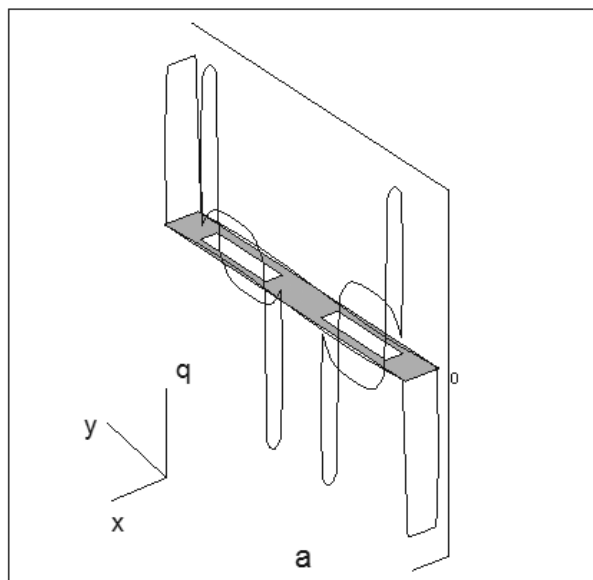


Рис. 10.8. Распределение тепловых потоков (а) и температур (б) по границам в керамическом водо-водяном микротеплообменнике (горизонтальная плоскость – расчетная область с прямоугольными каналами)

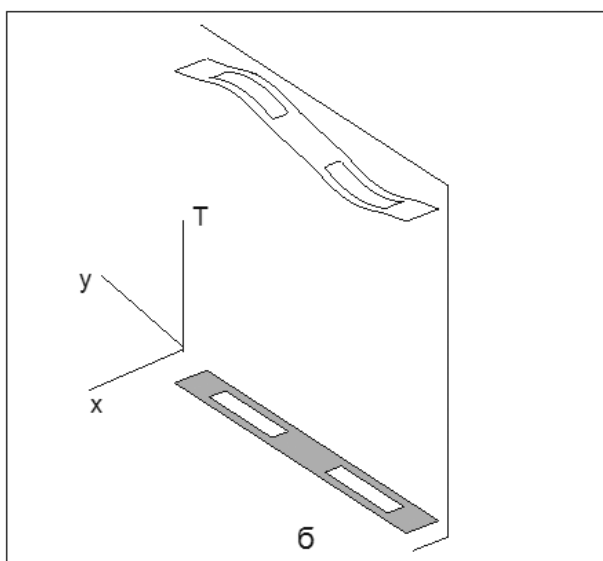
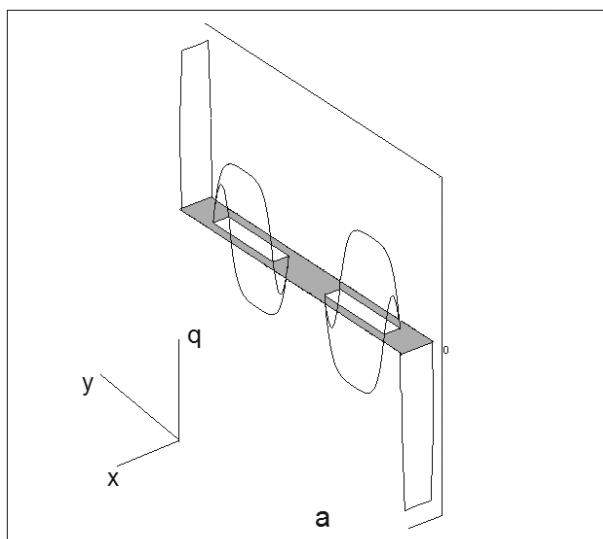


Рис. 10.9. Распределение тепловых потоков (а) и температур (б) по границам в кремниевом водо-водяном микротеплообменнике

Предельные случаи изотермической стенки имеют место в двух ситуациях:

1) при высокой теплопроводности твердой структуры (примерно как для кремниевого теплообменника, рис. 10.9, $\lambda_s = 120 \text{ Вт/(м К)}$, $\lambda_s \gg \lambda_f$);

2) при очень низкой теплопроводности твердой структуры $\lambda_s \ll \lambda_f$ (как в гипотетическом керамическом теплообменнике с жидкометаллическим теплоносителем).

В первом случае теплопередача лимитируется интенсивностью теплоотдачи в каналах. Для прямоугольного канала с отношением сторон $40 \text{ мкм}/200 \text{ мкм} = 1/5$ специальный расчет приводит к значению $\text{Nu}_{d,\text{eq}} = 5,778$, что согласуется с известными литературными данными. Соответственно, предельное значение объемного коэффициента теплопередачи ($k_{\text{Vol_max}}$, рис. 10.10) для заданной конфигурации каналов с водным теплоносителем составляет $2,108 \cdot 10^8 \text{ Вт/(м}^3\text{К)}$.

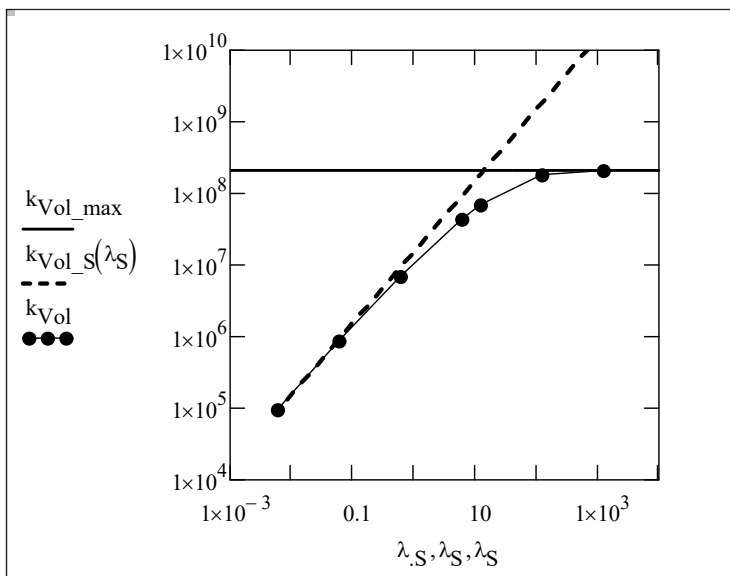


Рис. 10.10. Объемный коэффициент теплопередачи в водо-водяном микротеплообменнике как функция теплопроводности твердой структуры (по результатам численного моделирования)

Во втором случае теплопередача контролируется процессом теплопроводности в твердой структуре, $k_{vol_s} \sim \lambda_s$. На внутренних поверхностях температуры постоянны по периметру (но различны для двух каналов). Численный анализ этой предельной задачи приводит к зависимости, показанной на рис. 10.10 наклонной пунктирной прямой линией. Коэффициент пропорциональности ($1,531 \cdot 10^7$, m^{-2}) зависит от формы и линейного масштаба твердой структуры, но не от свойств материала.

Кривая $k_{vol}(\lambda_s)$ с указанными выше асимптотами построена при обработке рассчитанных полей температуры и скорости. Вычислялись значения расхода и теплового потока, средние по теплоемкости температуры теплоносителей, температурный напор и, наконец, коэффициент теплопередачи. Отметим, что рассчитанное значение $k_{vol} = 1.783 \cdot 10^8$ Вт/(m^3K) для кремниевого теплообменника хорошо согласуется с результатами испытаний, где приводится значение $1,885 \cdot 10^8$ Вт/(m^3K).

Диаграмма такого вида, как на рис. 10.10, содержит всю необходимую информацию для расчета локальной теплопередачи в микротеплообменниках со структурой, показанной на рис. 10.1 (т.е. для расчета теплового потока между теплоносителями при заданном локальном температурном напоре). Полный расчет микротеплообменника может быть произведен далее по стандартной методике среднеарифметического температурного напора.

Трехмерная модель микротеплообменника

В специальных случаях может потребоваться трехмерное моделирование, которое позволяет учесть особенности теплоотдачи на входных участках каналов (т.е. на участках тепловой и гидродинамической стабилизации), влияние продольной теплопроводности, различные схемы относительного движения теплоносителей и т.п.

В качестве иллюстрации сложности получающейся тепловой картины, приведем трехмерное представление температурного поля на входном участке двухканального прямоточного теплообменника (рис. 10.11). Распределение температуры в трех вертикальных сечениях показано цветом. Дополнительно изображены линии (трубки) тока векторного поля плотности теплового потока.

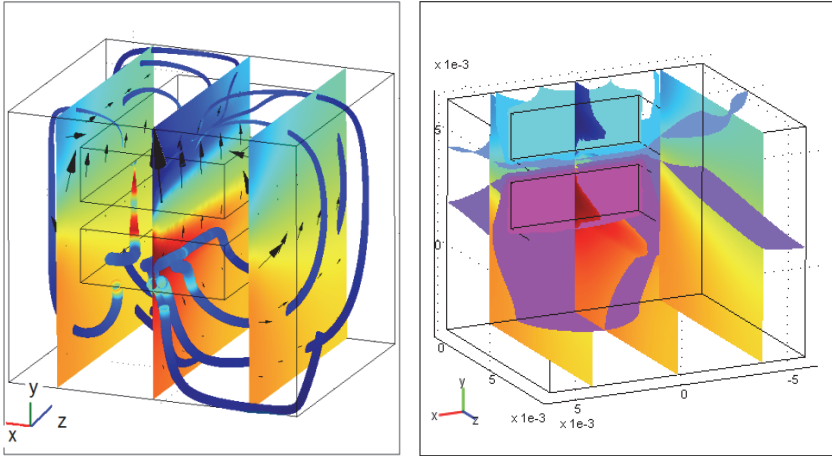


Рис. 10.11. Трехмерное моделирование микротеплообменника

Имея в виду инженерные приложения, предпочтительным является двухмерный анализ локальной теплопередачи, как в предыдущем параграфе. Дальнейший расчет противоточной, прямоточной или перекрестной схем может быть проведен стандартными методами среднелогарифмического температурного напора. В случае необходимости, возможно применение одномерных или двухмерных дифференциальных моделей для нахождения распределений средних по теплосодержанию температур теплоносителей по длине каналов.

Воздушный теплообменник с ударяющимися струями

Как было показано выше, в микротеплообменниках с водным теплоносителем коэффициент теплоотдачи достаточно велик благодаря малому характерному размеру канала. Однако для газовых теплоносителей в связи с их малой теплопроводностью проблема интенсификации теплоотдачи остается актуальной и для микротеплообменников. Одно из решений состоит в организации обтекания поверхностей ударяющимися струями.

Расчет теплоотдачи был проведен для единичной ячейки с осевой симметрией (рис. 10.12). В верхний канал микротеплооб-

менника поступает холодный воздух со скоростью 0,2 м/с и затем подается на горячую нижнюю поверхность через отверстия диаметром 500 мкм. Максимальный коэффициент теплоотдачи (540 Вт/(м²К)), на порядок превышающий обычные для воздушных теплообменников значения, был зафиксирован в окрестности эпицентра падающей струи.

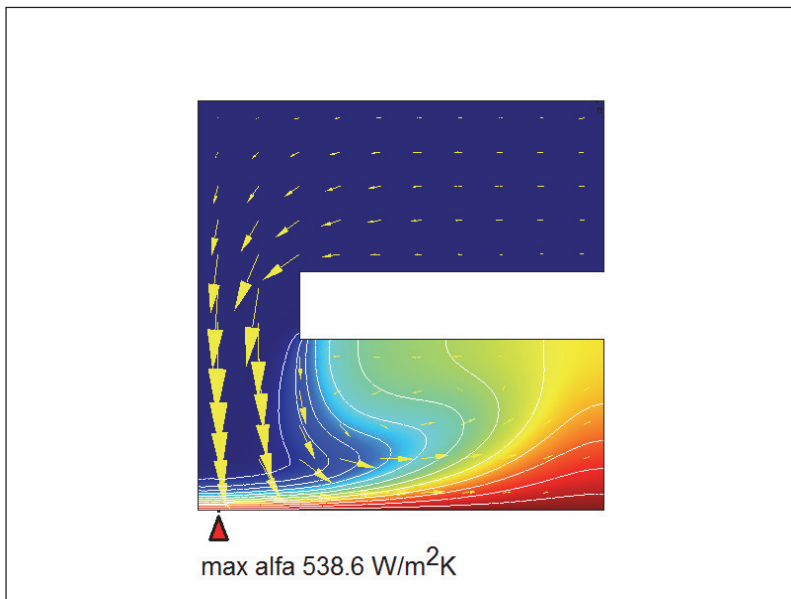


Рис. 10.12. Численное моделирование микротеплообменника с ударяющимися струями (стрелки – поле скоростей, линии – изотермы, цвет – температура)

Микрооребрение при кипении

Специальным примером микротеплообменных устройств являются поверхности с микрооребрением для интенсификации теплопередачи при кипении органических теплоносителей.

Результаты численного моделирования, выполненного методом конечных элементов с применением оригинального программного кода, представлены на рис. 10.13. Показаны конфигурация трапециевидного и Т-образного микрооребрения и линейный масштаб, поля температуры в форме изотерм и векторные поля плотности теплового потока.

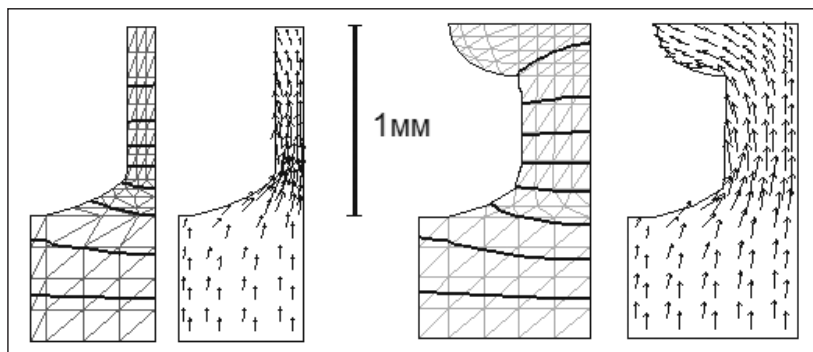


Рис. 10.13. Микрооробрение для кипящих органических теплоносителей

Двухмерное численное моделирование представляется целесообразным ввиду сложной формы коротких ребер (в особенности, Т-образной конфигурации), высокой интенсивности теплоотдачи, ее сильной зависимости от температурного напора и, следовательно, заметных изменений вдоль поверхности. Анализ актуален также для интерпретации экспериментальных результатов по кипению на микрооробренных поверхностях.

Заключение

Для однофазных теплообменников имеют место исключительно высокие значения поверхности переноса в единице объема (порядка $10^4 \text{ м}^2/\text{м}^3$) и объемной плотности теплового потока (порядка $10^8 \text{ Вт}/(\text{м}^3\text{К})$ для воды).

Существует ограничение на относительную длину микроканалов, диктуемое соотношением затрат мощности на прокачку и полезной тепловой мощности теплообменника. При характерной длине по ходу теплоносителя порядка 1 см эквивалентный диаметр каналов составляет десятки микрон для водяного теплообменника или сотни микрон для воздушного теплообменника.

В области указанных линейных масштабов остаются справедливыми обычные для макроскопического подхода предположения о сплошности сред. Учитывая ламинарный режим течения в микроканалах, можно утверждать, что математическое модели-

рование однофазных микротеплообменников является хорошо определенной и относительно простой задачей. Особенностью, усложняющей инженерные расчеты теплопередачи и сопротивления, является необходимость многомерного численного моделирования сопряженных полей температуры и скорости в каналах и в твердой структуре различной конфигурации с целью надежного определения локальной теплопередачи.

Существенно более многообразные и сложные проблемы имеют место в микротеплообменниках с двухфазными или многожидкостными потоками. Хотя малая величина инерционных сил по отношению к вязким силам упрощает картину течения и исключает турбулентность, особую значимость приобретают физико-химические аспекты проблемы: капиллярные эффекты первого и второго рода, устойчивость разделяющих тонких пленок жидкости, смачиваемость, движение линий контакта в системах «газ–жидкость–твердое тело» и т.п. Специальный случай нестационарных двухфазных микротечений представляет пузырьковое кипение. В последнее время развивается технология экспериментальных исследований кипения на матрицах микронагревателей, изготавливаемых по микроэлектронным стандартам. Эти работы инициируются интенсивным развитием микроэлектромеханических систем (MEMS) – технологии, включающей также применение микротеплообменных и микроэнергетических устройств.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем особенности микротеплообменных аппаратов?
2. Укажите особенности расчета теплоотдачи и сопротивления микротеплообменников.
3. Как оценить энергетический коэффициент микротеплообменника?
4. Укажите последовательность действий при численном моделировании теплопередачи в микротеплообменниках.

Раздел 4. ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОЦЕССОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ТЕПЛООБМЕННИКАХ

Глава 11. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

11.1. Примеры решения задач в пакетах MathCad и ANSYS

Примеры решения задач в MathCad, сгруппированы по главам, частично включены непосредственно в текст соответствующих разделов учебника, т.е. по месту применения, и могут быть представлены по запросу, ниже представим примеры решения задач конвективного теплообмена в пакете Ansys. В настоящее время пакет Ansys представляет собой многодисциплинарный программный комплекс для решения задач механики твердого тела, электротехники, магнитодинамики, теплообмена и гидродинамики как в одномерной постановке, так и в рамках 2-D и 3-D моделирования.

Процесс численного решения задач конвективного теплообмена включает пять основных этапов:

1. **Создание геометрической модели «Geometry».** Для расчёта необходимо сформировать компьютерную геометрическую модель интересующей области течения. **Ansys Fluent** позволяет производить решение как в двумерной, так и в трёхмерной постановках.

2. **Создание сеточной модели расчётной области на базе геометрической «Mesh».** Созданную в предыдущем пункте модель необходимо разбить на отдельные контрольные объёмы. Эта процедура производится полуавтоматически в специальных системах – генераторах сетки.

3. **Применение граничных условий «Boundary conditions».** В первую очередь, задаётся набор дифференциальных уравнений сохранения, которые требуется решать. Для задач теплопроводности – это уравнение сохранения энергии, для потоков жидкости – уравнение неразрывности и уравнения сохранения

количества движения по двум или трём осям. Если в расчёте используется моделирование турбулентных явлений, к общему набору уравнений добавляются ещё уравнения модели турбулентности и т.д. После определения набора решаемых уравнений указываются «входные данные» для решения системы уравнений – это условия на границах области и в тех элементах, характеристики потоков в которых известны (*граничные условия*). В случае нестационарной задачи кроме граничных условий требуется ещё и задание начальных параметров в каждом узле расчётной области (*начальные условия*).

4. Поиск решения «Solve». На данном этапе производится итерационное решение системы алгебраических аналогов дифференциальных уравнений сохранения в каждом узле расчетной области. Результатом решения являются значения искомых величин (например, температуры, давления, компонентов вектора скорости и т.д.) в каждом узле расчетной сетки.

5. Представление результатов расчёта «Results». Результаты численного анализа могут быть представлены в виде графиков, цветовых или векторных полей распределения параметров, линий тока, изоповерхностей параметров, числовых значений параметров в заданных областях.

Рассмотрим все этапы численного решения в Ansys на конкретных задачах:

Задача №1: Численное исследование теплообмена и гидродинамики одиночных труб каплевидной формы с помощью программного пакета ANSYS WorkBench– Fluent.

Труба каплевидного сечения (рис. 11.1) из алюминия помещена в канал квадратного поперечного сечения со стороной 305 мм и длиной 780 мм. В качестве внешнего теплоносителя, рассматривается поток воздуха со скоростью на входе в канал $u_{ax}=1-15$ м/с, что соответствует числам Рейнольдса $1,3 \times 10^3 \leq Re \leq 20 \times 10^3$, при температуре $56,5^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении, средняя температура стенки трубы равна $20,8^\circ\text{C}$. Поток симметричен по обеим сторонам оси абсцисс, поэтому можно использовать условие симметрии «Symmetry» по оси абсцисс. Расчетная область с граничными условиями показана на рис. 11.2. Найти поля температуры, давления и скорости.

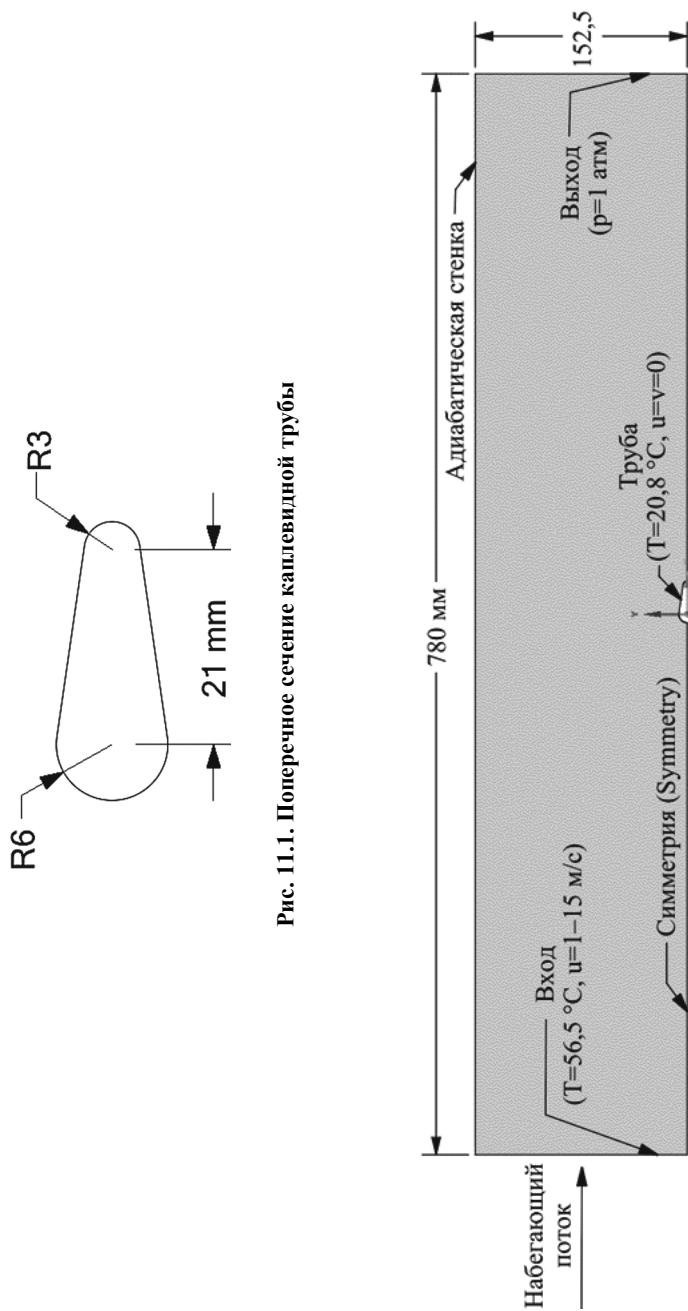



Рис. 11.1. Поперечное сечение каплевидной трубы

Рис. 11.2. Расчетная область с граничными условиями

Решение: Запуск ANSYS WorkBench осуществляется из главного меню: Пуск → Программы → ANSYS →  Workbench .

• Окно программы (рис. 11.3) состоит из рабочего поля проекта, окна сообщений, списка компонентов и ещё нескольких элементов, которые могут быть включены опционально (список файлов, окно статуса проекта и т.п.)

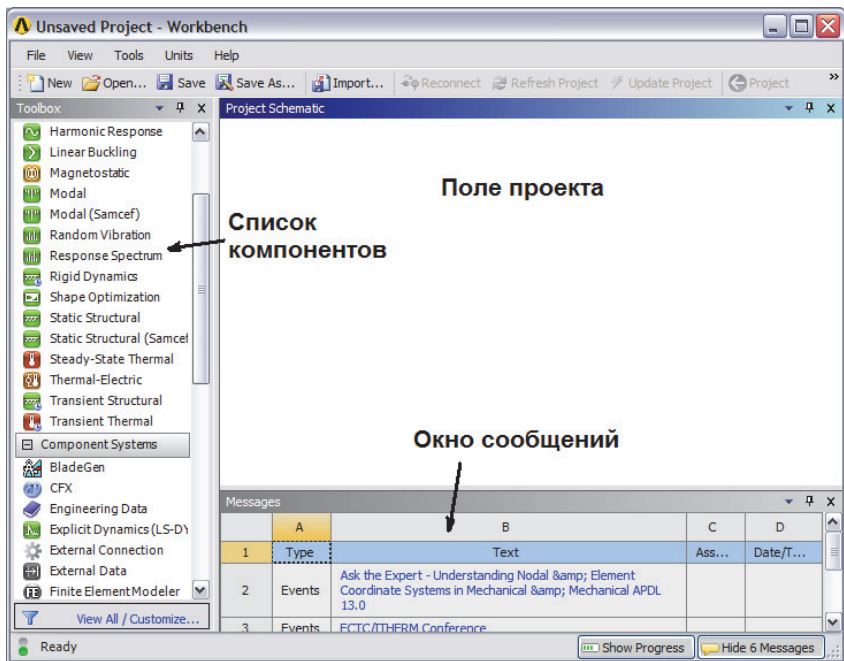


Рис. 11.3. Вид окна программы Ansys WorkBench

• Найдем в списке компонентов анализа **Fluid Flow (Fluent)** [Toolbox → Analysis Systems → Fluid Flow (Fluent)] и совершим одно из действий.

1. «Захватите» компонент (нажав и удерживая левую кнопку мыши) и перетащите его на свободное поле проекта к любому месту, где появится зелёный пунктирный прямоугольник, разрешающий размещение, и «сбросьте» его там (отпустите кнопку мыши) (рис. 11.4).

2. Дважды щелкните по компоненту левой кнопкой мыши. При этом он будет автоматически перенесён на первое свободное место поля проекта.

• На поле проекта появится таблица **Fluid Flow (Fluent)**, в нижней части которой предлагается ввести название. Чтобы оставить название по умолчанию достаточно нажать **Enter** или кликнуть мышью на свободное поле проекта.

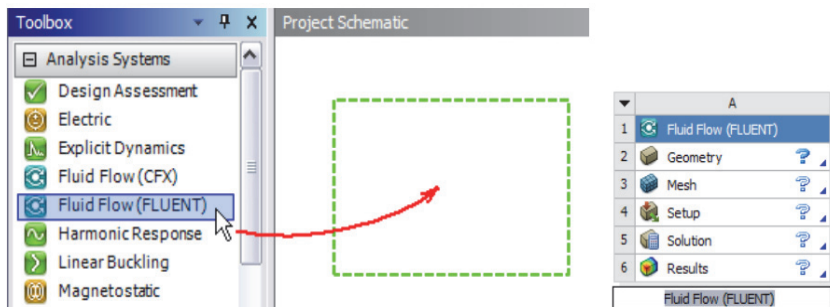


Рис. 11.4. Перенос системы анализа потоков Fluent на поле проекта

Таблица **Fluid Flow (Fluent)** состоит из шести строк.

1. Тип системы **Fluid Flow (Fluent)**.
2. **Geometry** (геометрическая модель).
3. **Mesh** (сетка).
4. **Setup** (постановка задачи).
5. **Solution** (решение).
6. **Results** (анализ результатов).

Шаг 1. Создание геометрической модели.

- Геометрическую модель (*Geometry*) обрабатывает встроенная в **WorkBench** система двумерного и трёхмерного моделирования *SpaceClaim*, нажав правую кнопку мыши на первой строке, выбираем «*NewSpaceClaim Geometry*» (рис. 11.5). Затем выбираем тип анализа, будь то двумерный или трехмерный «правая кнопка мыши → **properties** → **analysis type** → **2D**» (в нашем случае здесь — двумерная модель) как показано на рис. 11.6.

- Основную часть окна *SpaceClaim* (рис. 11.7) занимает графическое окно с градиентной заливкой (*Graphics*), слева от которого расположено структурное окно (*Structural window*) и окно свойств (*Properties window*). Также имеются главное меню и панели быстрого доступа, на которых расположены кнопки вызова часто используемых команд. Все панели можно перемещать с помощью мыши, для создания удобного пользователю пространства. Следующим шагом является создание расчетной модели в соответствии с требуемыми размерами (рис. 11.7).

- После создания расчетной модели выбираем все отрезки и нажимаем на команду «**Fill**» как показано на рис. 11.8а. На данный момент проект содержит одну часть и она является поверхностью (рис.11.8б).

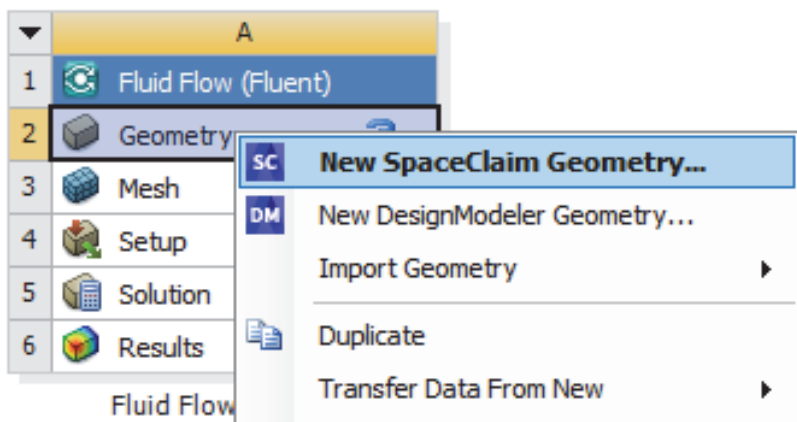


Рис. 11.5. Создание новой геометрической модели

Properties of Schematic A2: Geometry		
	A	B
1	Property	Value
2	[-] General	
3	Component ID	Geometry
4	Directory Name	FFF
5	[-] Notes	
6	Notes	
7	[-] Used Licenses	
8	Last Update Used Licenses	
9	[-] Basic Geometry Options	
10	Solid Bodies	<input checked="" type="checkbox"/>
11	Surface Bodies	<input checked="" type="checkbox"/>
12	Line Bodies	<input type="checkbox"/>
13	Parameters	Independent
14	Parameter Key	ANS;DS
15	Attributes	<input type="checkbox"/>
16	Named Selections	<input type="checkbox"/>
17	Material Properties	<input type="checkbox"/>
18	[-] Advanced Geometry Options	
19	Analysis Type	3D
20	Use Associativity	3D
21	Import Coordinate Systems	2D

Рис. 11.6. Выбор типа анализа

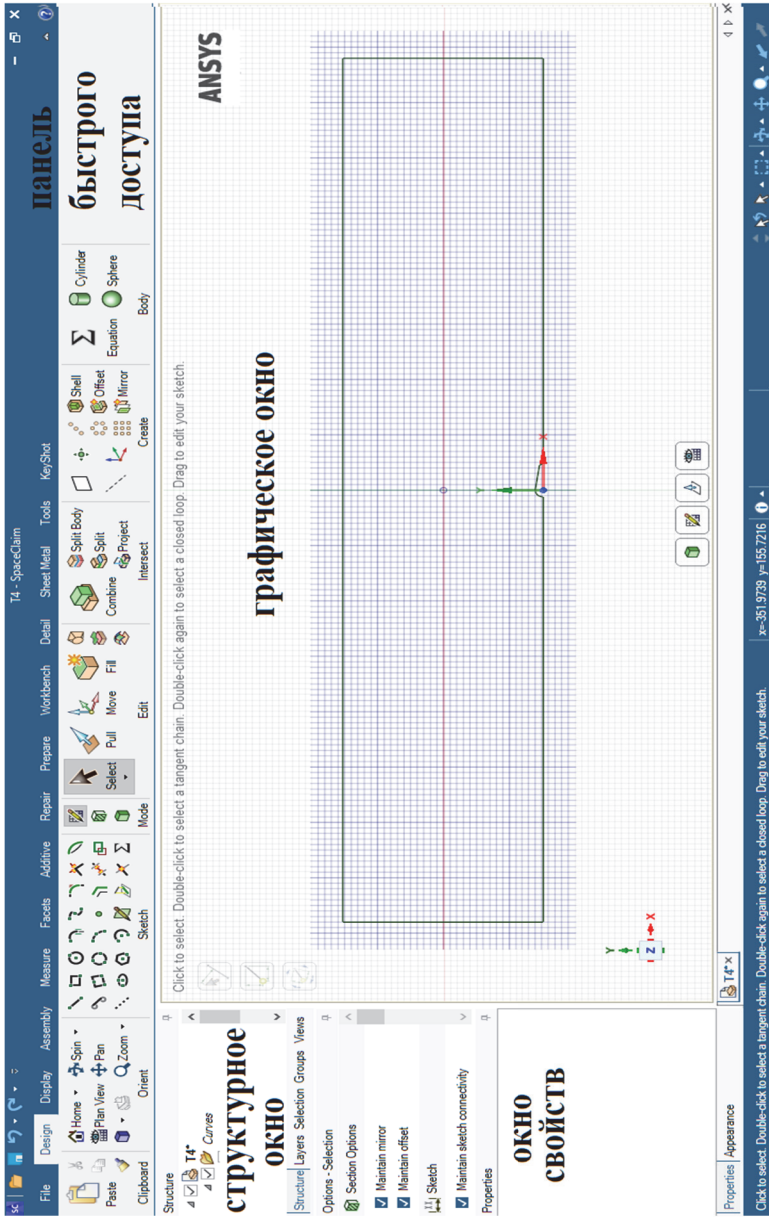
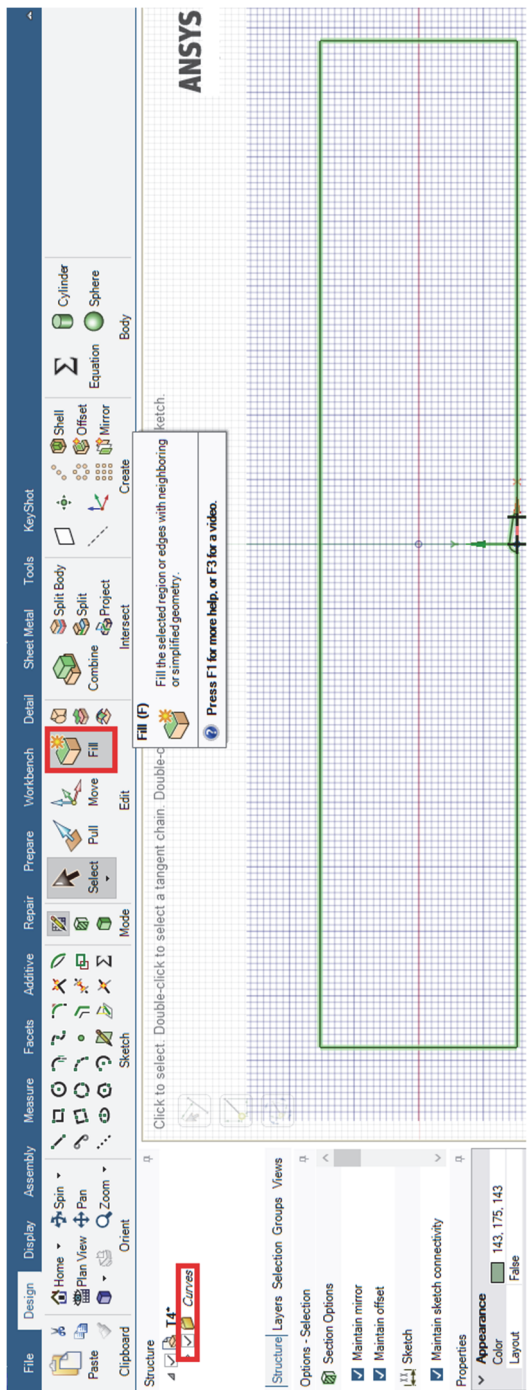
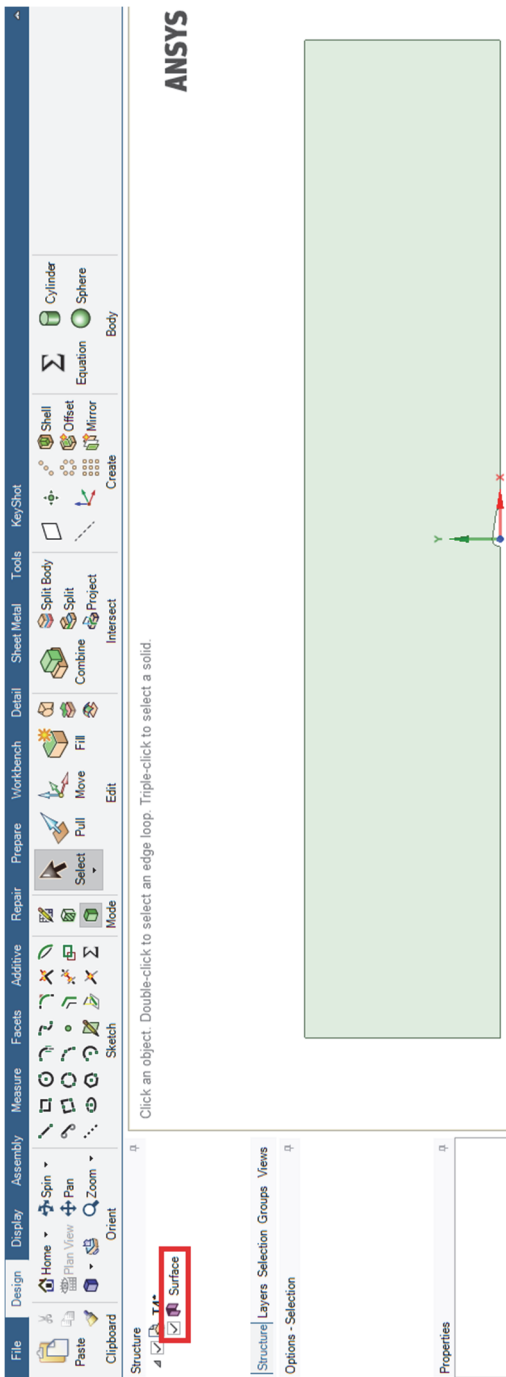


Рис. 11.7. Перенос системы анализа потоков Fluent на поле проекта



a)

Рис. 11.8. Преобразование отрезков (а) в поверхности (б)



ANSYS

б)
Окончание рис. 11.8.

- После окончания построения модели можно закрыть *SpaceClaim* и вернуться в **WorkBench**. При этом сохранение модели будет выполнено автоматически и в строке геометрической модели (*Geometry*) появится зелёная галочка, означающая завершённое состояние элемента (рис. 11.9).
- В строке сетки (*Mesh*) отображаются зелёные стрелочки, что означает, что входная информация данного блока изменилась и требуется обновление. Чтобы открыть генератор сетки, достаточно дважды щёлкнуть левой кнопкой мыши по данному пункту. При этом произойдёт автоматическая загрузка в генератор сетки рессмагриваемой геометрической модели.



Рис. 11.9. Состояние проекта при возвращении в окно Workbench

Шаг 2. Создание сеточной модели.

- Окно генератора сетки (рис. 11.10) состоит из графической части, где можно видеть автоматически импортированную модель, дерево проекта, окна визуализации, а также других элементов, аналогичных элементам *Design Modeler*.
- Перед непосредственным построением сетки необходимо разметить отрезки геометрической модели, соответствующие разным параметрам потока, чтобы в дальнейшем им можно было задать разные граничные условия.
- Выберем отрезки (каждый отдельно). Выбранный отрезок станет зеленым.

Далее нужно нажать правой кнопкой мыши на свободном поле графического окна вызвать контекстное меню (рис. 11.11) и выбрать в нем пункт *Create Named Selection* (создать поименованную группу).

В появившемся окне *Selection Name* (название группы) нужно ввести название границы **Inlet** у входа в канал. Название не должно содержать пробелов, может включать латинские буквы, цифры, знаки «<-» и «_» и должно начинаться с буквы.

После подтверждения ввода (нажатия кнопки ОК), в дереве проекта появится группа *Named Selections* (поименования), содержащая только что созданный элемент **Inlet** (рис. 11.11).

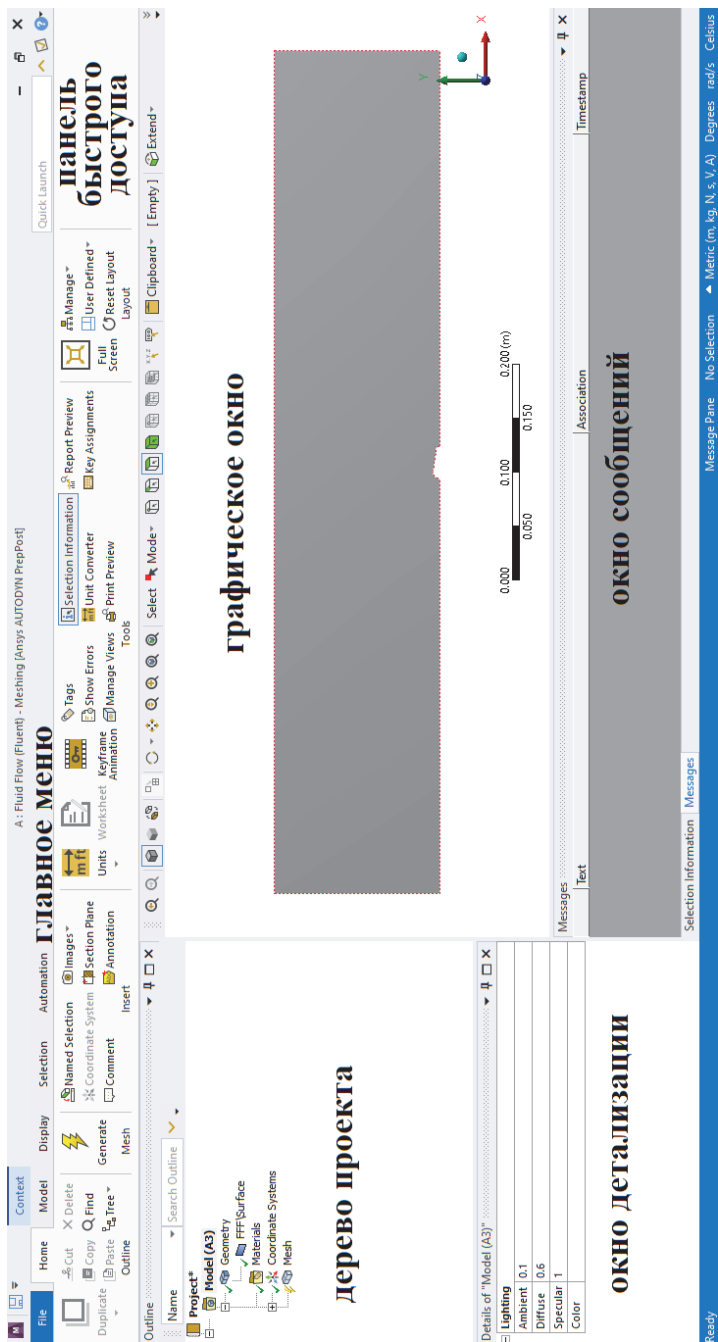


Рис.11.10. Окно генератора сетки Meshing

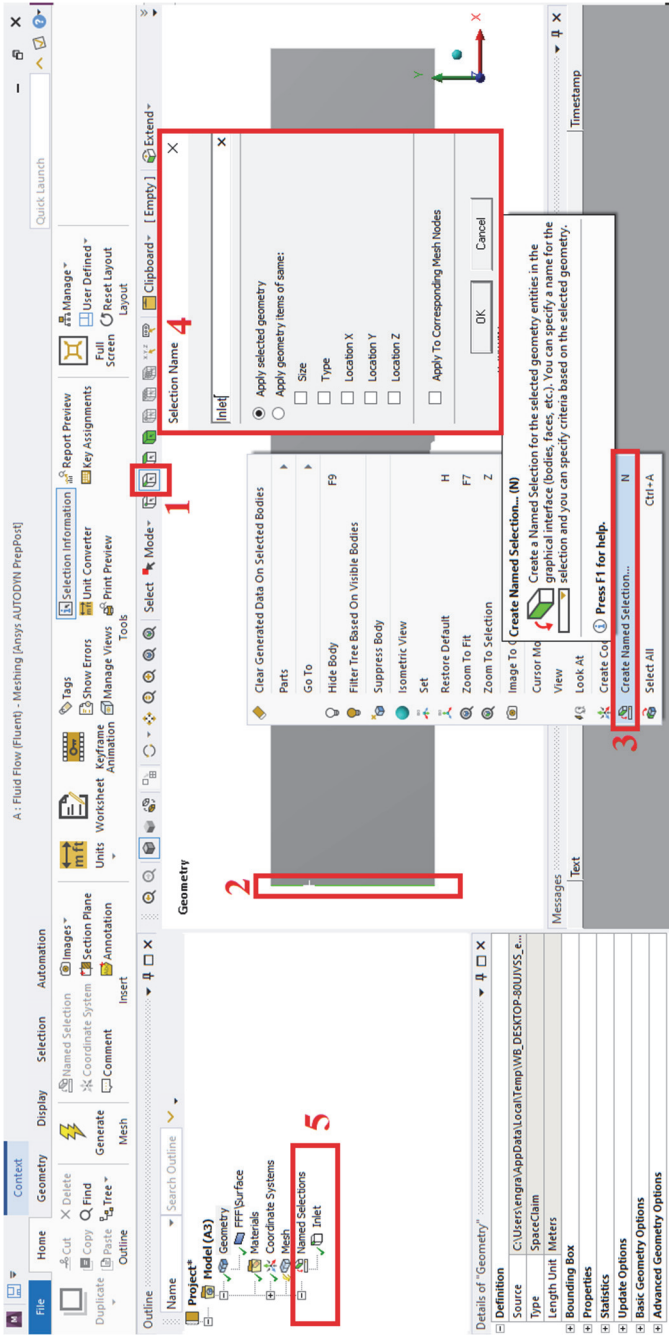


Рис. 11.11. Поименованная граница Inlet

- Аналогичным образом необходимо подписать границы **Outlet** на выходе из канала, **Tube** для поверхности трубы, **Wall** на верхней поверхности канала и **Symmetry** на оси симметрии канала (рис. 11.2). После подтверждения ввода (нажатия кнопки ОК), в дереве проекта появится группа **NamedSelections** (рис. 11.12).

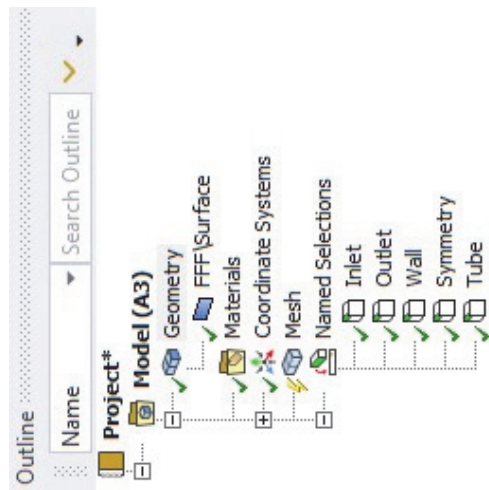


Рис. 11.12. Все поименованные границы

- После создания наименований необходимо задать параметры сетки и построить её. Для этого выбираем в дереве проекта пункт **Mesh** (сетка) и задаем параметры сетки. Для наиболее точного численного анализа за сетка строилась со сгущением в пристеночном слое (**Inflation**) как показано на рис. 11.13.

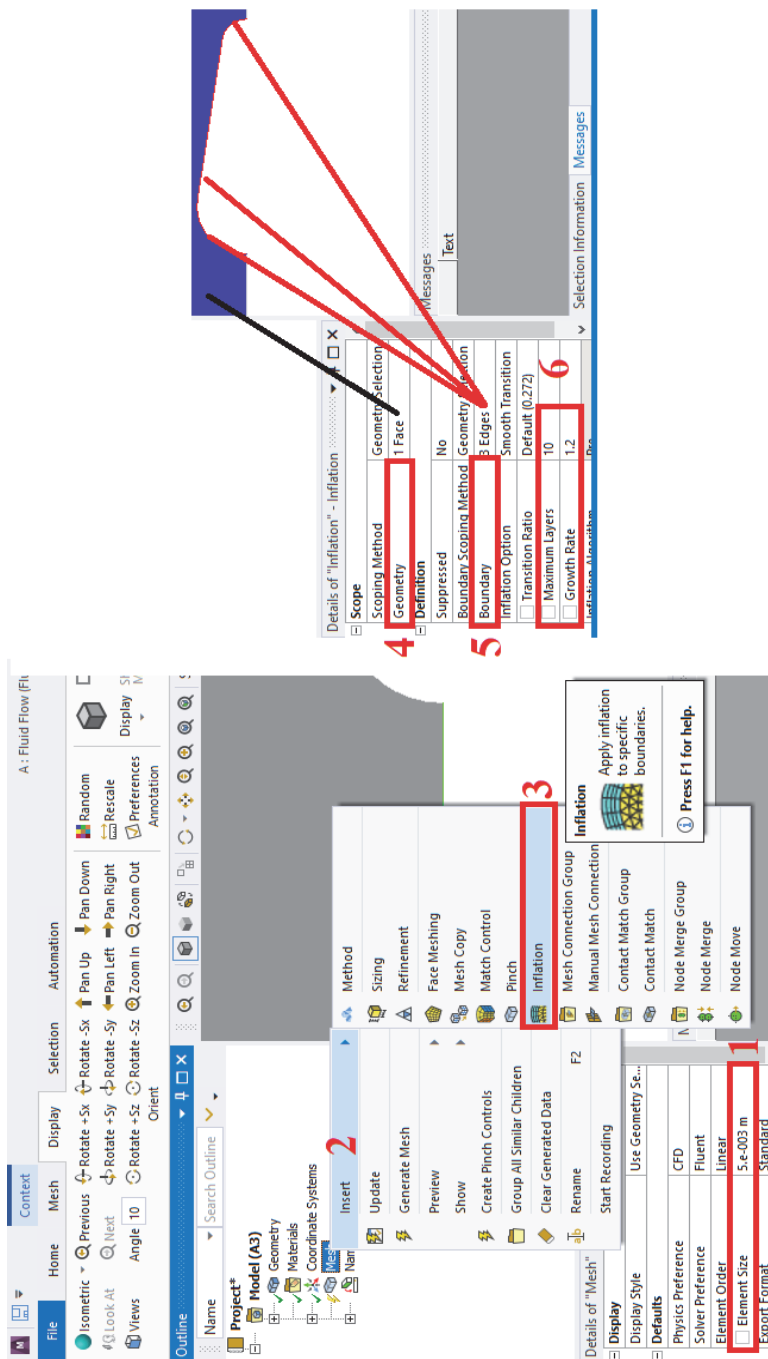


Рис. 11.13. Задание параметров сетки

- Для построения сетки нужно правой кнопкой мыши вызвать контекстное меню и выбрать пункт **Update** или **Generate Mesh** (рис. 11.14). Можно также использовать аналогичные кнопки на панели инструментов. Через какое-то время генерация сетки (рис. 11.15) закончится, и, если в дереве проекта выделить элемент **Mesh**, можно будет видеть расчётную сетку (рис. 11.16).

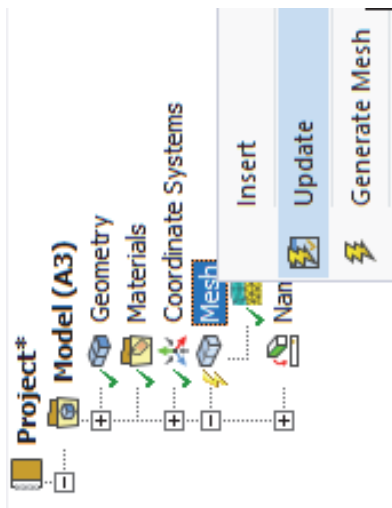


Рис. 11.14. Запуск генерации сетки



Рис. 11.15. Процесс генерации сетки

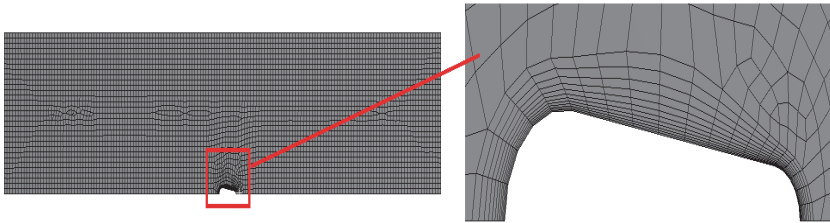


Рис. 11.16. Построенная сетка со сгущением линий сетки в пристеночном слое

- После этого генератор сетки (*Meshing*) можно закрыть и вернуться в **Workbench**. Сохранение сетки при этом произойдёт автоматически. На этом этапе можно сохранить расчётный проект, нажав в окне **Workbench** (рис. 11.17) кнопку **Save** или **Save As...**. Название необходимо давать латинскими буквами.

- Теперь можно видеть, что статус расчётной сетки проекта «выполнено» (✓). А строка описания расчётной задачи (**Setup**) готова к обновлению (↻). Чтобы перейти в пре-процессор, дважды щелкните на элементе **Setup**. При этом появится окно загрузки программы **Fluent** (рис. 11.18). В нём можно оставить все параметры по умолчанию и нажать **OK** для запуска **Fluent**.

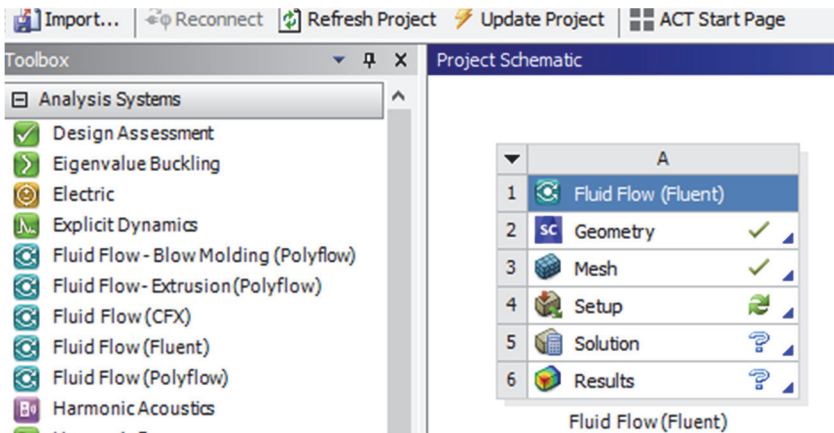


Рис. 11.17. Сохранение результатов генерации сетки

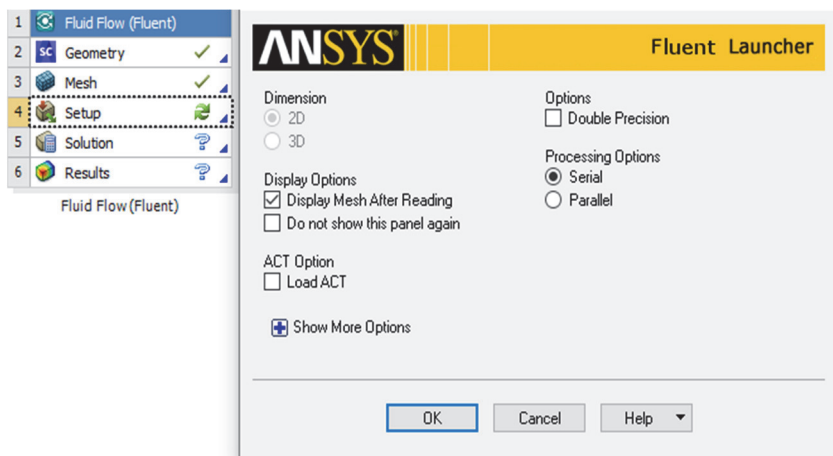


Рис. 11.18. Окно загрузки Fluent

Шаг 3. Постановка расчётной модели.

- Окно **Fluent** (рис. 11.19) состоит из графического окна, в котором можно видеть загруженную модель, окна текстовых сообщений, в которое выводятся результаты выполнения команд, дерева проекта и панели инструментов.

В зависимости от того, какой пункт выбран в дереве проекта, открывается соответствующая панель.

На панели **General** (общее) собраны инструменты для начальной настройки задачи.

- Необходимо выставить единицы измерения. Для этого нужно нажать кнопку **Units** и в появившемся окне (рис. 11.20) произвести необходимые действия.

По окончании задания единиц, нужно закрыть окно, нажав **Close**.



Рис. 11.19. Окно загрузки Fluent

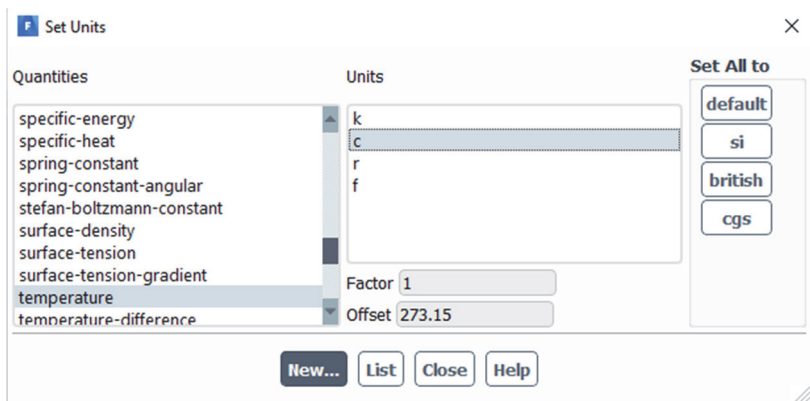


Рис. 11.20. Установить единицы измерения

• Задаём условия моделирования. Для этого в дереве проекта переходим на вкладку **Models** (модели) (рис. 11.21).

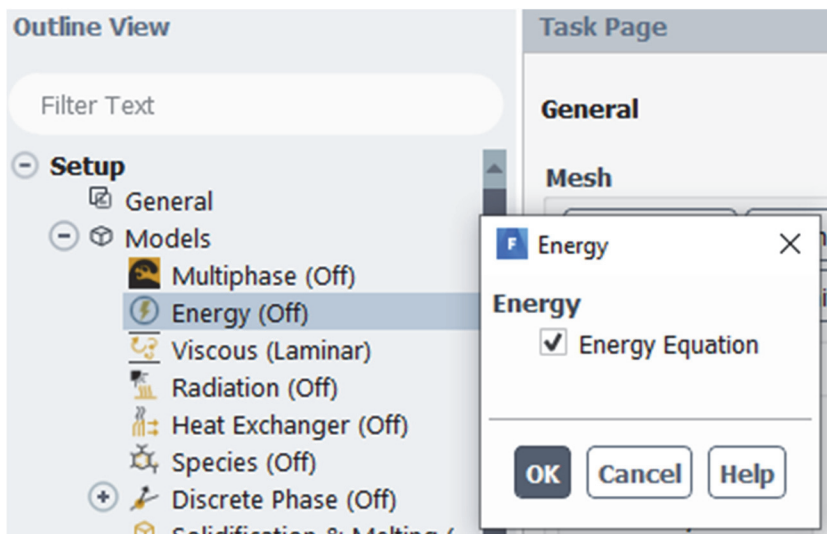


Рис. 11.21. Включение в расчёт уравнения энергии

• Задаём моделирование турбулентности по модели **Standard $k - \omega$** (численное исследование проводилось с учетом возможной турбулизации потока).

Для этого нужно дважды щёлкнуть по пункту **Viscous** (вязкость), в появившемся окне (рис. 11.22) выбрать модель турбулентности **Standard $k - \omega$ (2 eqn)** и закрыть окно (нажать ОК).

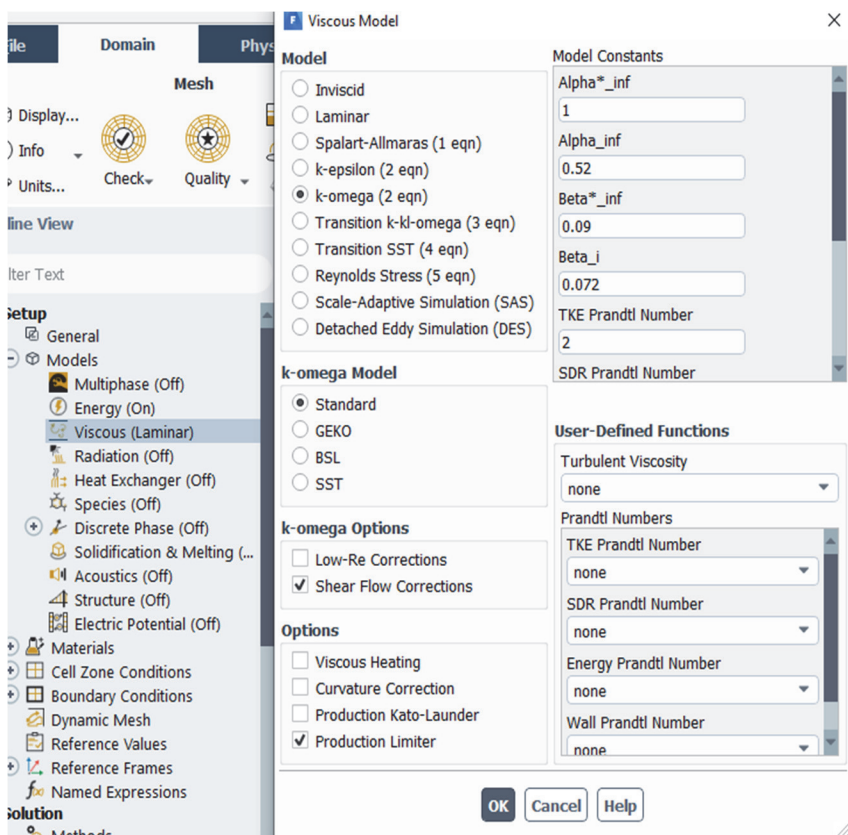


Рис. 11.22. Включение в расчёт двух уравнений модели турбулентности **Standard $k - \omega$**

- Добавляем в проект расчёта новое вещество – воздух. Для этого нужно перейти на вкладку **Materials** (вещества).

Можно видеть (рис. 11.23), что по умолчанию в проекте доступны два вещества: воздух (air) в качестве текучей среды (*fluid*) и алюминий (*aluminium*) в качестве сплошной (*solid*). Для добавления или изменения свойств веществ.

- Нужно нажать кнопку **Create/Edit** (создать/изменить). Вводим данные воздуха, как показано на рис. 11.24, для свойств воздуха.

По окончании задания свойств, необходимо нажать кнопку **Change/Create** (изменить/создать), после выполнения изменения свойств можно закрыть окно (**Close**).

- Задаём граничные условия. Для этого нужно перейти на вкладку **Boundary Conditions** (граничные условия):

- **Inlet**: velocity-inlet (тип данного граничного условия) → $u = 1 \sim 15$ м/с, $v = 0$ и $T = 56,5^\circ\text{C}$ (рис.11.25);

- **Outlet**: pressure-outlet → $p = 1$ атм (рис. 11.26);

- **Tube**: no-slip wall → условие прилипания, $T = 20,8^\circ\text{C}$ (рис. 11.27);

- **Wall**: no-slip wall → условие прилипания, тепловой поток = 0 (рис. 11.28). Давление во **Fluent** задаётся от уровня рабочего или ссылочного давления (**Operating Pressure**), которое по умолчанию установлено равным 1 атм.

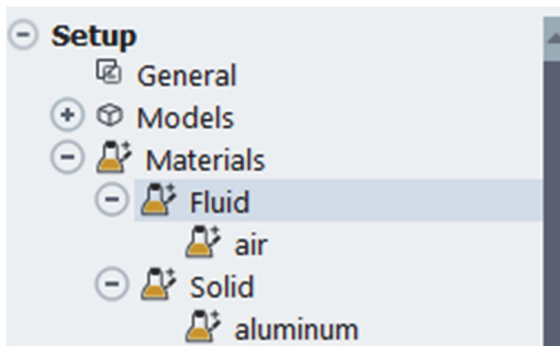


Рис. 11.23. Вкладка **Materials**

Create/Edit Materials X

Name air

Material Type fluid

Order Materials by
 Name
 Chemical Formula

Chemical Formula

Fluent Fluid Materials air

Fluent Database...

Mixture none

User-Defined Database...

Properties

Density (kg/m3)	constant	1.133	Edit...
Cp (Specific Heat) (j/kg-k)	constant	1005	Edit...
Thermal Conductivity (w/m-k)	constant	0.02748	Edit...
Viscosity (kg/m-s)	constant	1.90325e-05	Edit...

Change/Create **Delete** **Close** **Help**

Рис. 11.24. Задание параметров воздуха

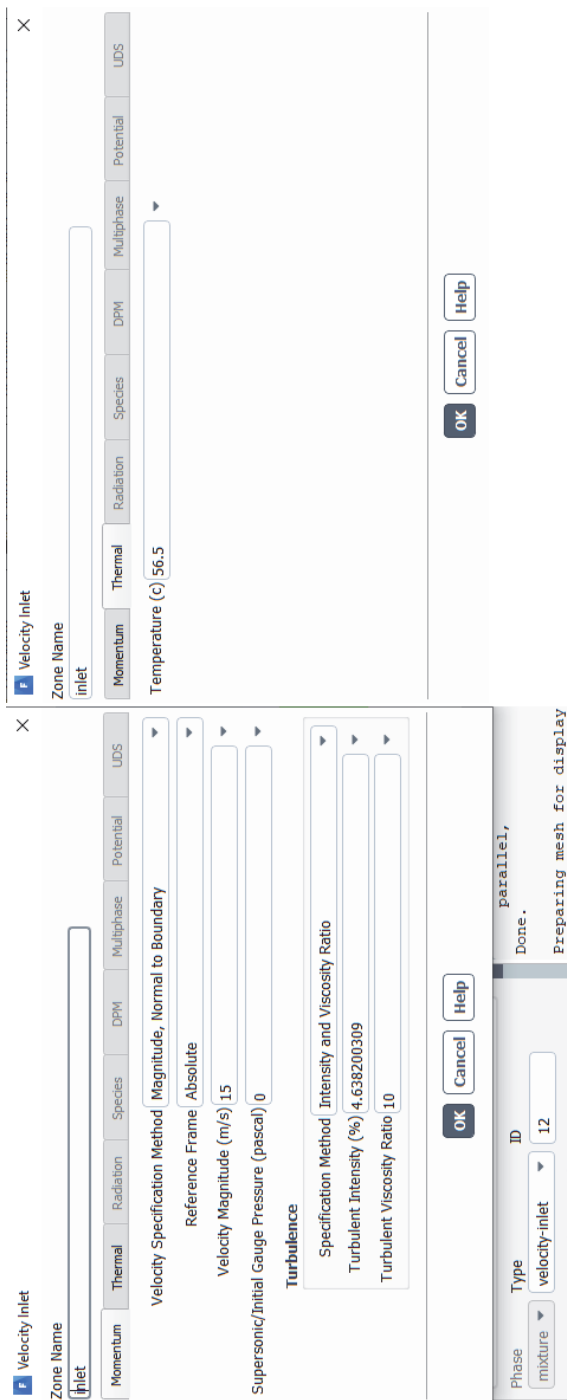


Рис. 11.25. Окно задания граничного условия *Inlet*

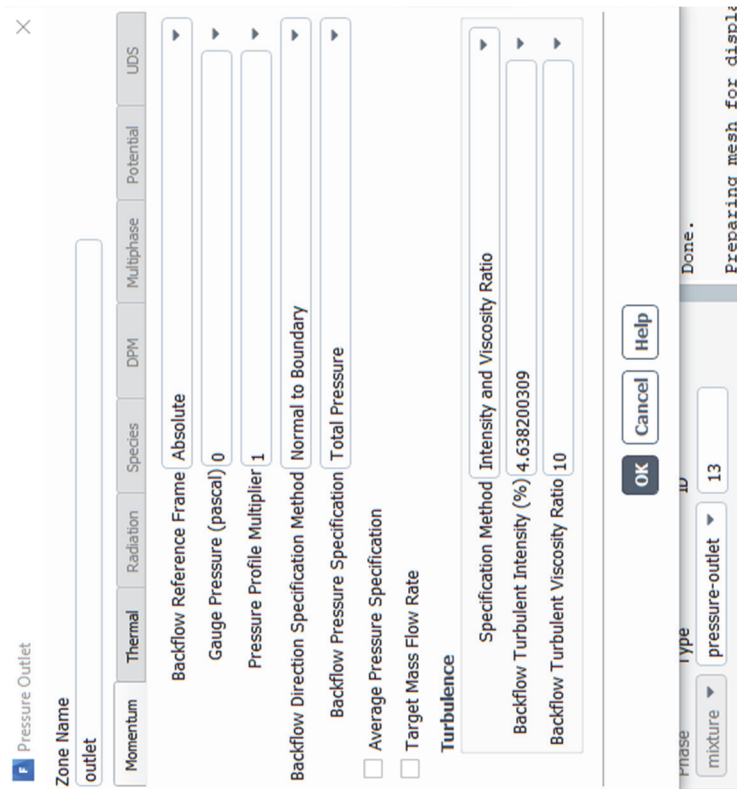


Рис. 11.26. Окно задания граничного условия *Outlet*

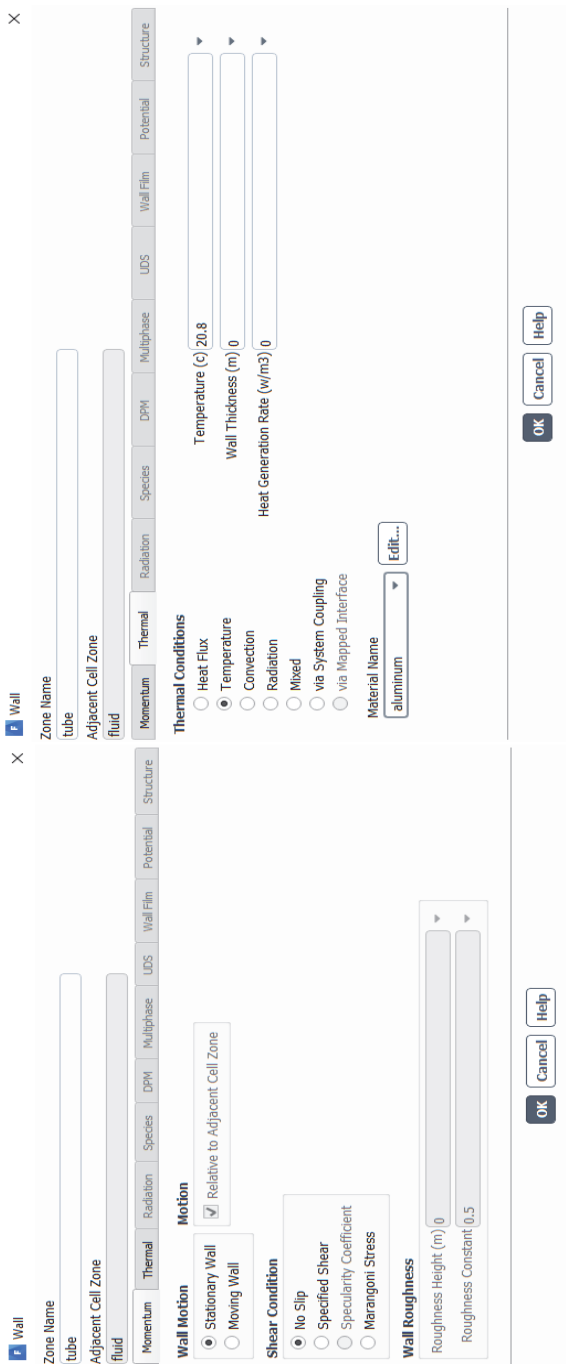


Рис. 11.27. Окно задания граничного условия Tube

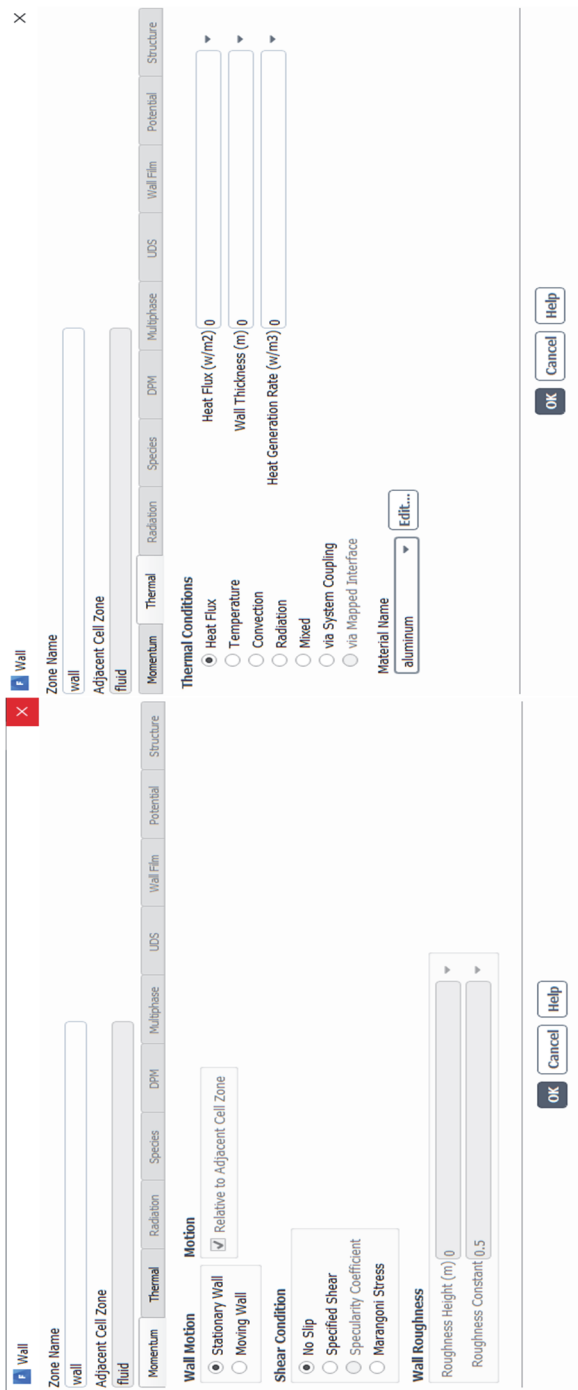


Рис. 11.28. Окно задания граничного условия *Wall*

- Проводим инициализацию задачи – заполнение расчётной модели первичными значениями – начальными условиями. Для этого нужно перейти на вкладку **Solution Initialization** (инициализация решения), на панели выбрать стандартная – тип инициализации (рис. 11.29) – **Standard Initialization**→**Compute from**→**Inlet**→**Initialize**.

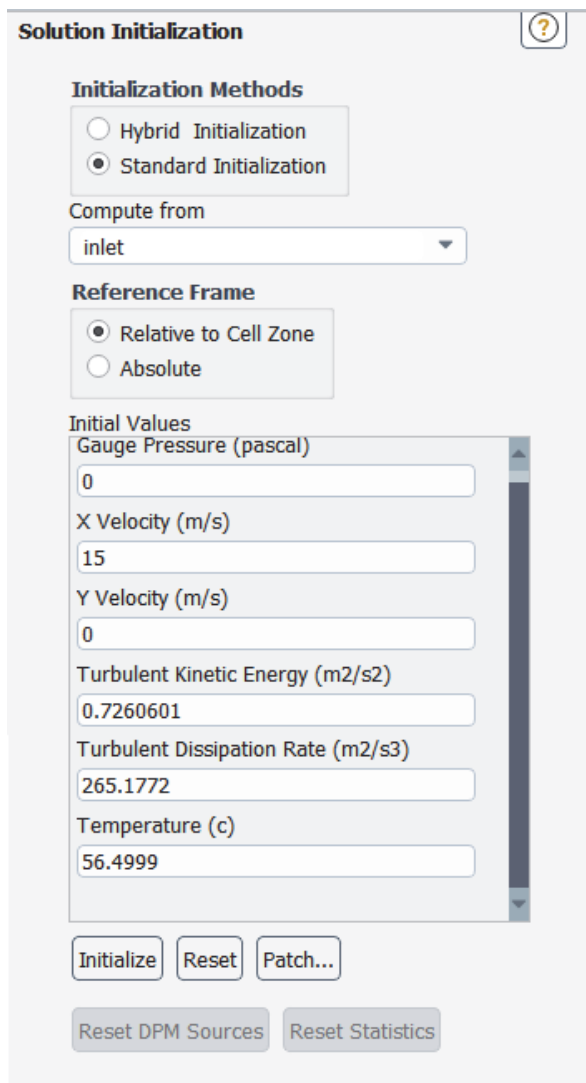


Рис. 11.29. Окно инициализации

• Выбираем алгоритм совместного решения уравнений движения и неразрывности «**Pressure – Velocity Coupling**» при решении выбирался **SIMPLE (Solution → Methods)**. Для получения точных решений использовалась дискретизация второго порядка точности «**Second Order Upwind**» (рис. 11.30). Прерывание счета происходит при достижении выполнения условий для уравнений неразрывности, движения и энергии в виде погрешностей 10^{-7} (**Solution → Monitors → Methods**) как показано на рис. 11.31.

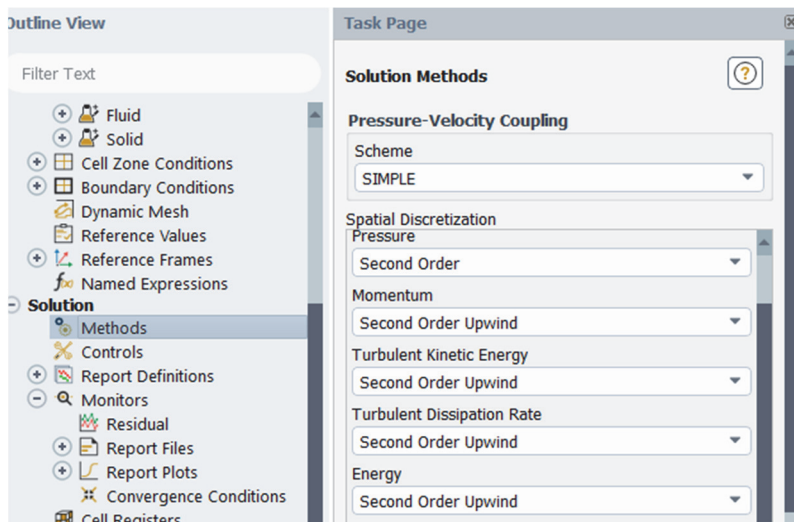


Рис. 11.30. Окно алгоритма решения

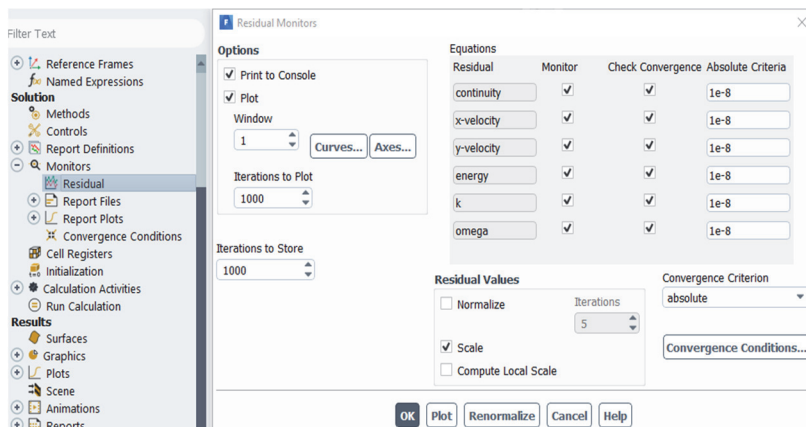


Рис. 11.31. Окно невязки

Шаг 4. Поиск решения.

• Выполняем решение. Для этого нужно перейти на вкладку **Run Calculation**, ввести в поле **Number of Iterations** (количество итераций) некоторое количество итераций, например 1000 и нажать кнопку **Calculate** (вычислять). При этом начнётся процесс поиска решения (рис. 11.32). При поиске решения в графическом окне отображается график так называемых невязок (**Residuals**) по количеству решаемых уравнений, а в текстовом окне выводится таблица изменения невязок от итерации к итерации. Когда будет завершено требуемое количество итераций или на какой-то итерации все невязки окажутся меньше установленного по умолчанию значения (10^{-7}), решение считается сошедшимся (**Solution is converged**) и расчёт заканчивается с появлением окна сообщения (рис. 11.32), в котором нужно нажать ОК.

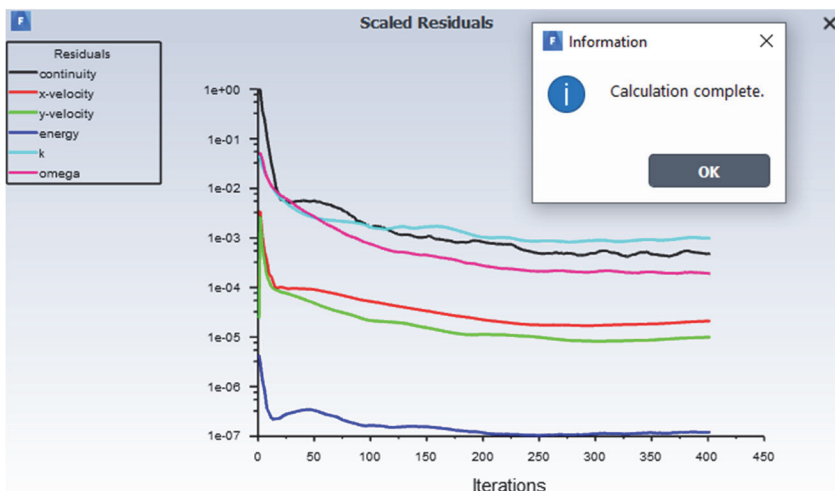


Рис. 11.32. Вкладка **Run Calculation** и окно сообщения «Расчёт завершён»

Шаг 5. Представление результатов расчёта.

• Просмотрим результаты расчёта «**Results**». Для этого нужно перейти на вкладку **Graphics** (графика). Дважды щелкнув на элементе **Contours** (контуры), задаём параметры визуализации как показано на рис. 11.33–11.34, 11.35а,б.



Рис. 11.33. Поля распределения температуры при $Re=20 \times 10^3$

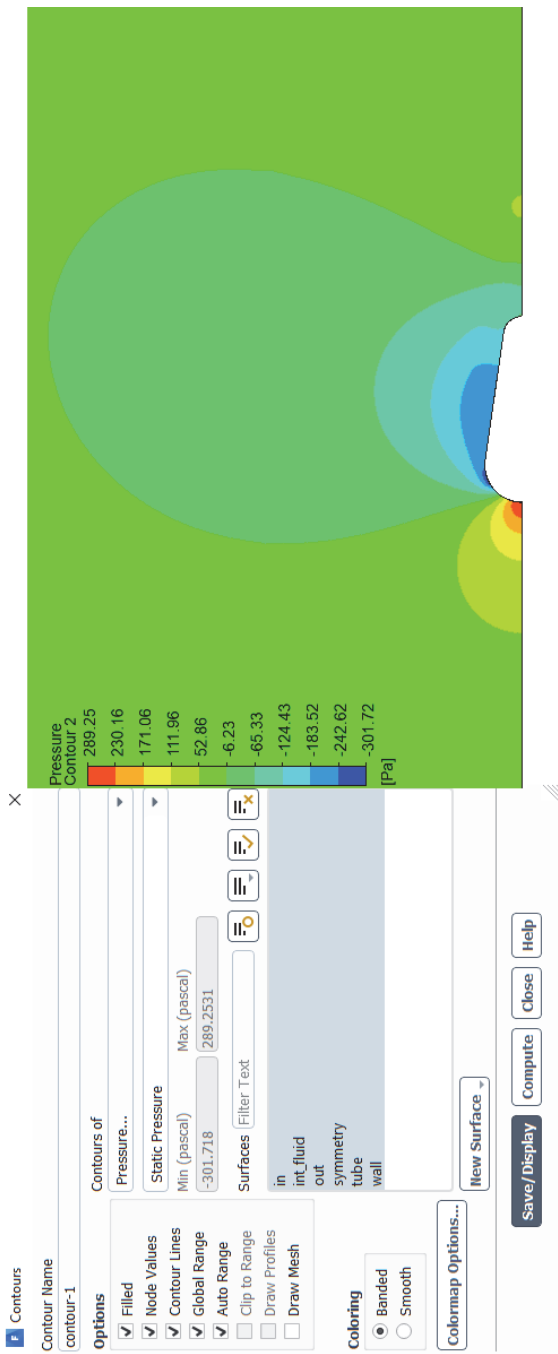


Рис. 11.34. Поле распределения статического давления при $Re=20 \times 10^3$

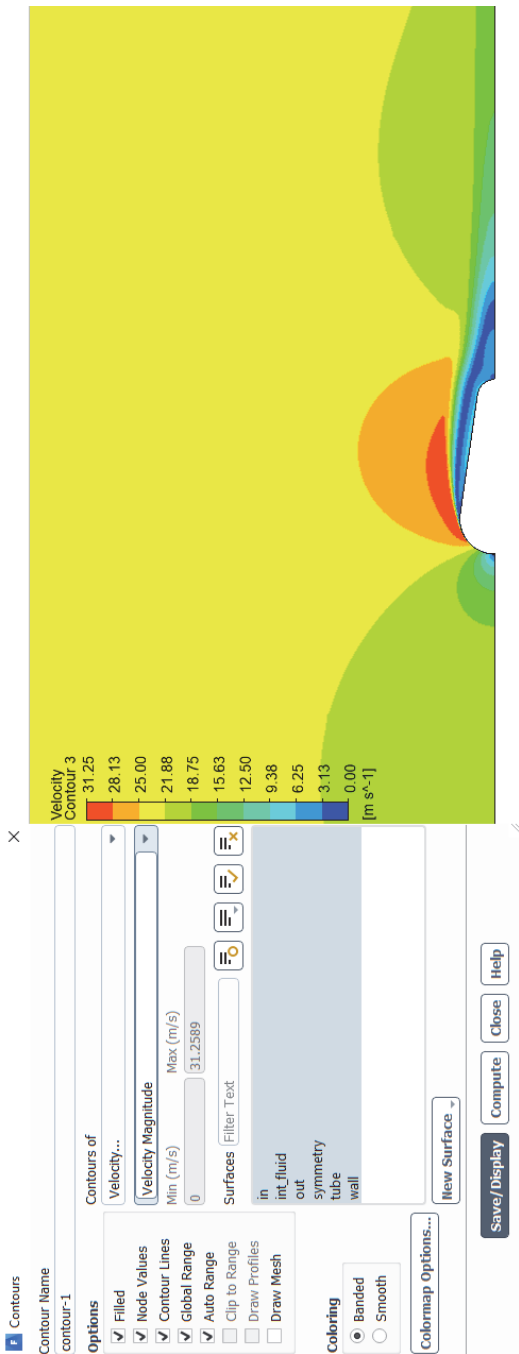


Рис. 11.35а. Поля распределения скорости при $Re = 20 \times 10^3$

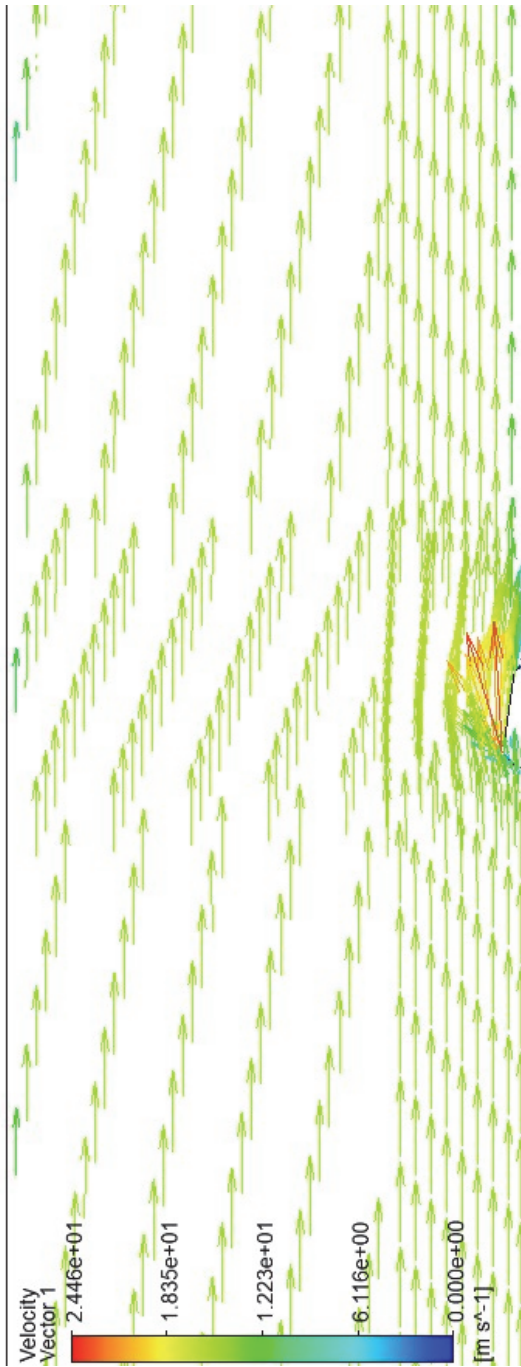


Рис. 11.356. Векторы скорости при $Re = 20 \times 10^3$

- После этого можно выйти из **Fluent**, закрыв его, и вернуться в **WorkBench**. Сохранение модели и результатов как обычно произойдет автоматически. Проект теперь содержит выполненные этапы постановки задачи (**Setup**) и её решения (**Solution**).

Задача №2: Численное исследование теплообмена и гидродинамики пучка каплевидных труб с помощью программного пакета **ANSYS WorkBench – Fluent**.

Объектом исследования является трехрядный пучок из 22 каплевидных труб шахматной компоновки.

Каплевидные трубы расположены в канале квадратного поперечного сечения со стороной 305 мм и длиной 780 мм (рис. 11.36) и имеют следующие размеры (рис. 11.37): радиус широкой части 5,8 мм, радиус малой части 2,9 мм, эквивалентный диаметр $D_{эк} = 22,5$ мм, продольный $S_{про}$ и поперечный $S_{поп}$ шаги труб в пучке одинаковы и равны 37 мм.

Расчетная область с граничными условиями показана на рис. 11.36.

В качестве внешнего теплоносителя, обтекающего пучок, рассматривался поток воздуха со скоростью на входе в канал $u_{вх} = 1,33 - 7$ м/с, что соответствует числам Рейнольдса $Re = 1,8 \times 10^3 - 9,4 \times 10^3$, при температуре $56,5^\circ\text{C}$ и атмосферном давлении, температура стенки равна $20,8^\circ\text{C}$.

Найти поля температуры, давления и скорости.

Найти коэффициенты теплоотдачи при наименьшем и наибольшем числах Рейнольдса.

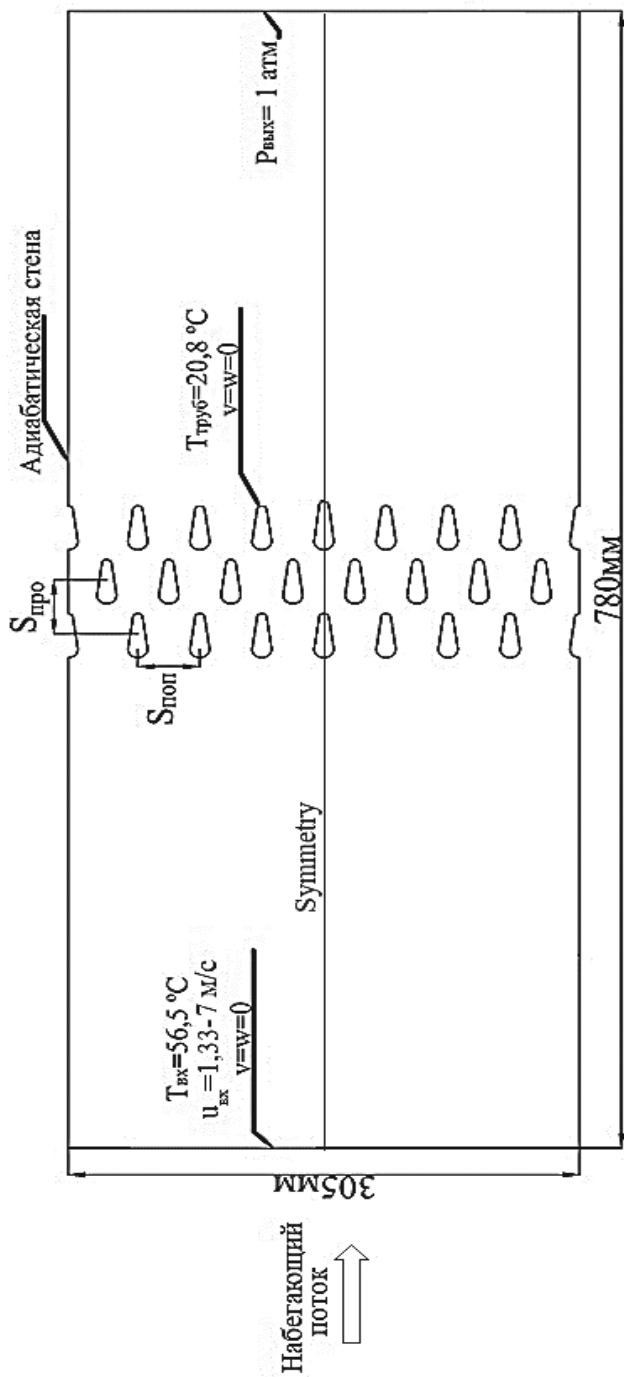


Рис. 11.36. Расположение пучка каплевидных труб

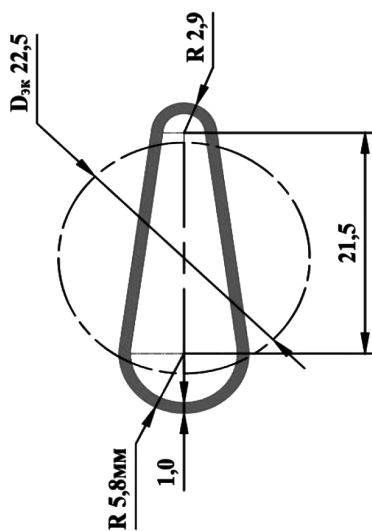


Рис. 11.37. Поперечное сечение каплевидной трубки

Решение: Моделирование пучка труб точно такое же, как и в первом случае (одиночная труба), за исключением того, что здесь используется модель турбулентности **RNG *k-ε*** с использованием метода уточненного пристеночного моделирования (**Enhanced Wall Treatment**), так как в дополнение к этому для всех труб задается граничное условие «**Tube: no-slip wall**» → условие прилипания, $T = 20,8^\circ\text{C}$ », а на входе в канал граничное условие «**Inlet: velocity-inlet** (тип данного граничного условия) → $u = 1,33 \sim 7 \text{ м/с}$, $v = 0$ и $T = 56,5^\circ\text{C}$ ».

Шаг 1. Создание геометрической модели (рис. 11.38).

Шаг 2. Создание сеточной модели (рис. 11.39).

Шаг 3. Постановка расчётной модели (рис. 11.19, 11.20, 11.23, 11.26, 11.28, 11.29, 11.30, 11.40, 11.41).

Шаг 4. Поиск решения (рис. 11.42).

Шаг 5. Представление результатов расчёта (рис. 11.43–11.45).

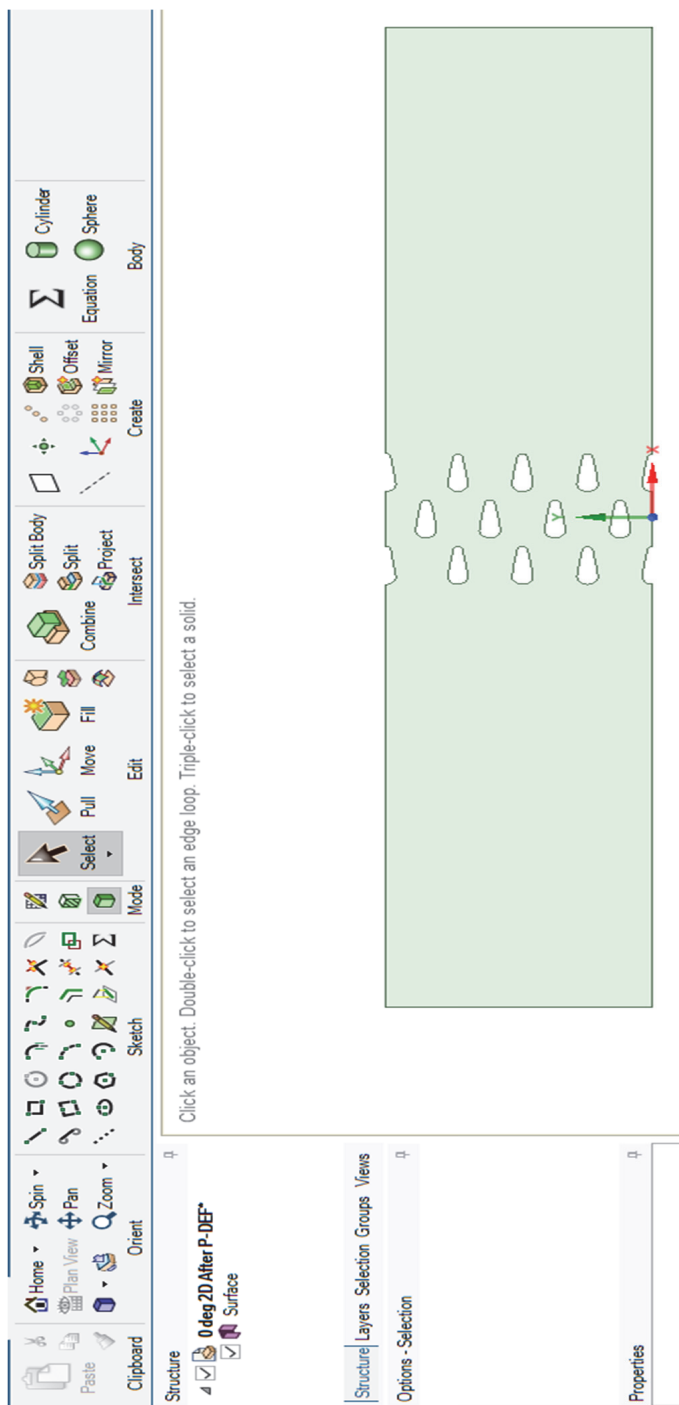


Рис. 11.38. Создать геометрию в *SpaceClaim*

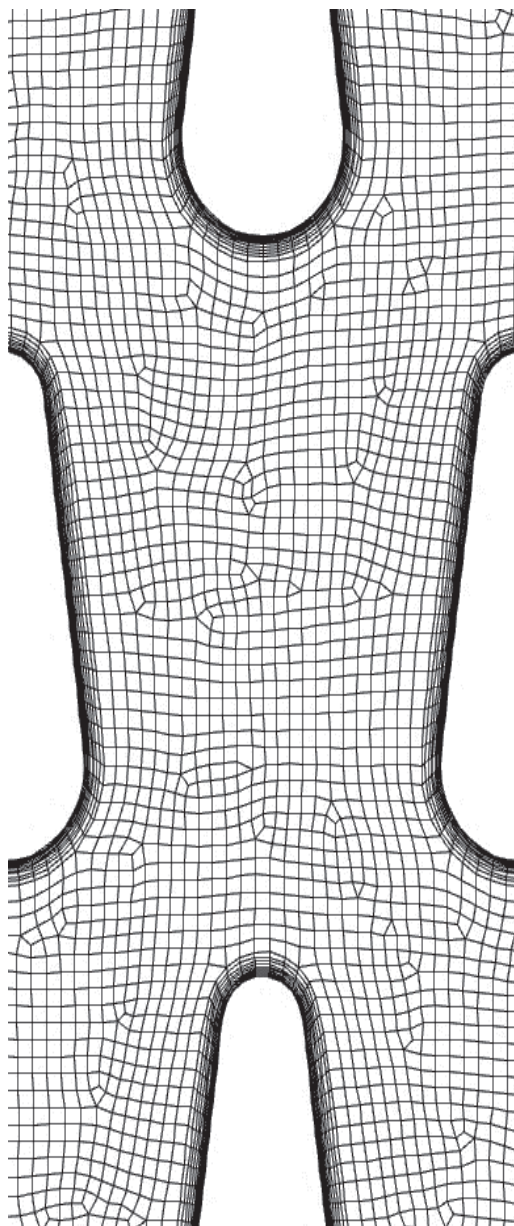


Рис. 11.39. Расчетная сетка в *Design Modeler*

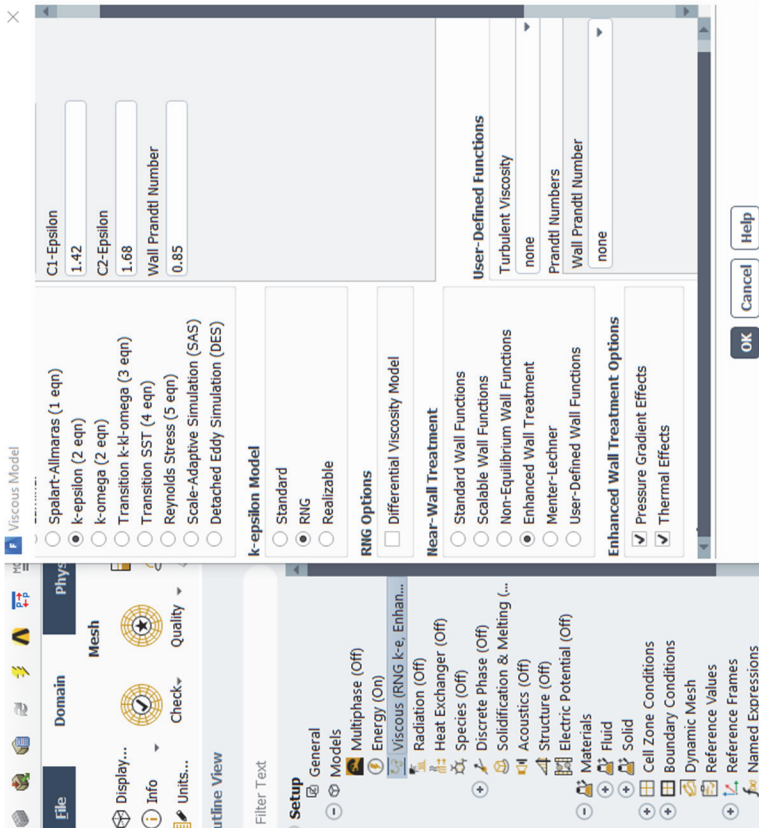


Рис. 11.40. Включение в расчёт двух уравнений модели турбулентности RNG $k-\epsilon$ с использованием метода улучшенного пристеночного моделирования (*Enhanced Wall Treatment*)

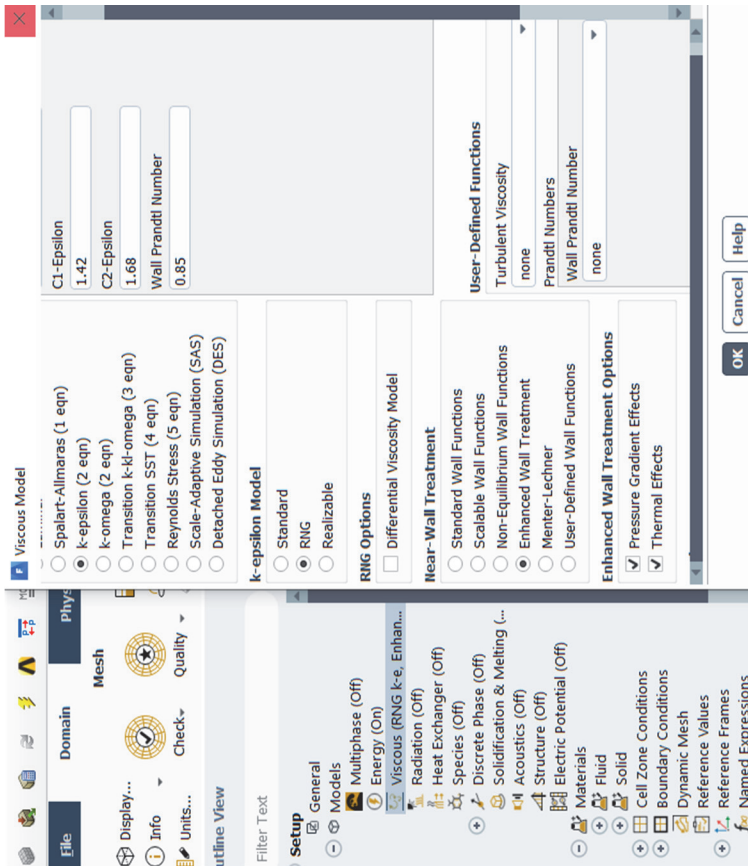


Рис. 11.40. Окончание

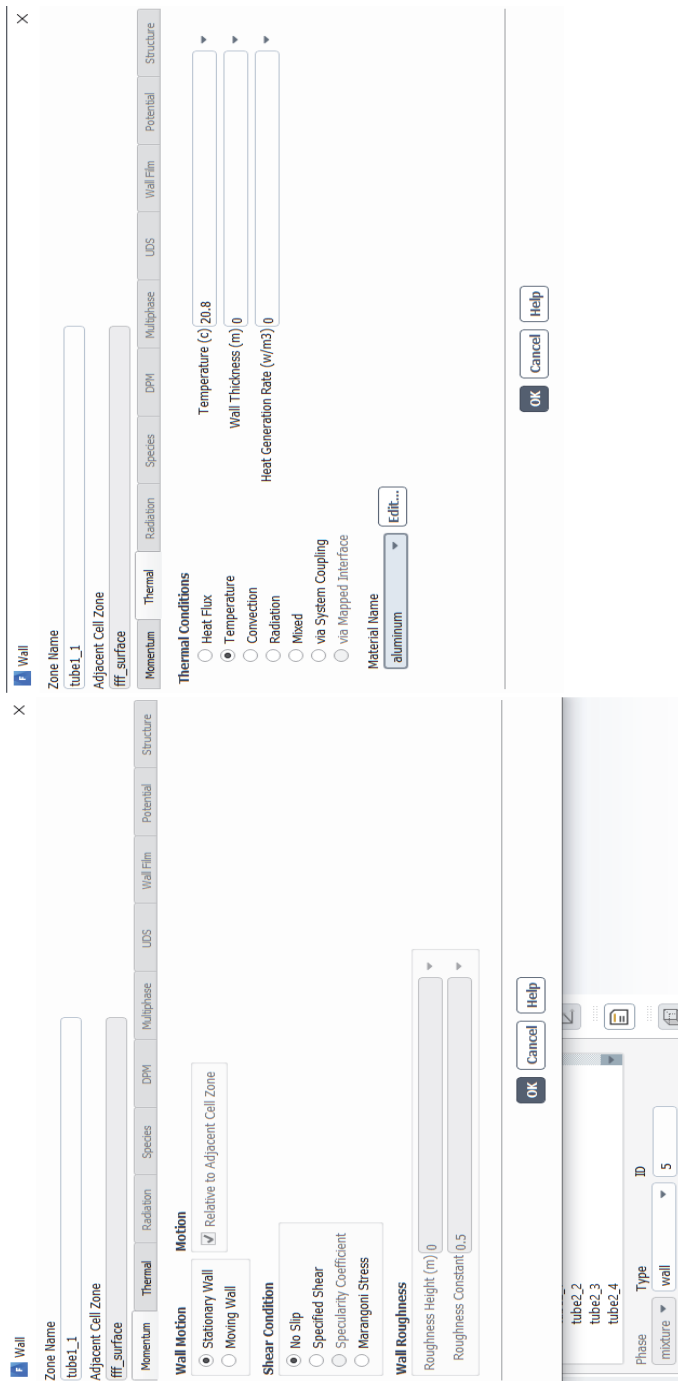


Рис. 11.41. Окно задания граничного условия *Tube* (для каждой трубы)

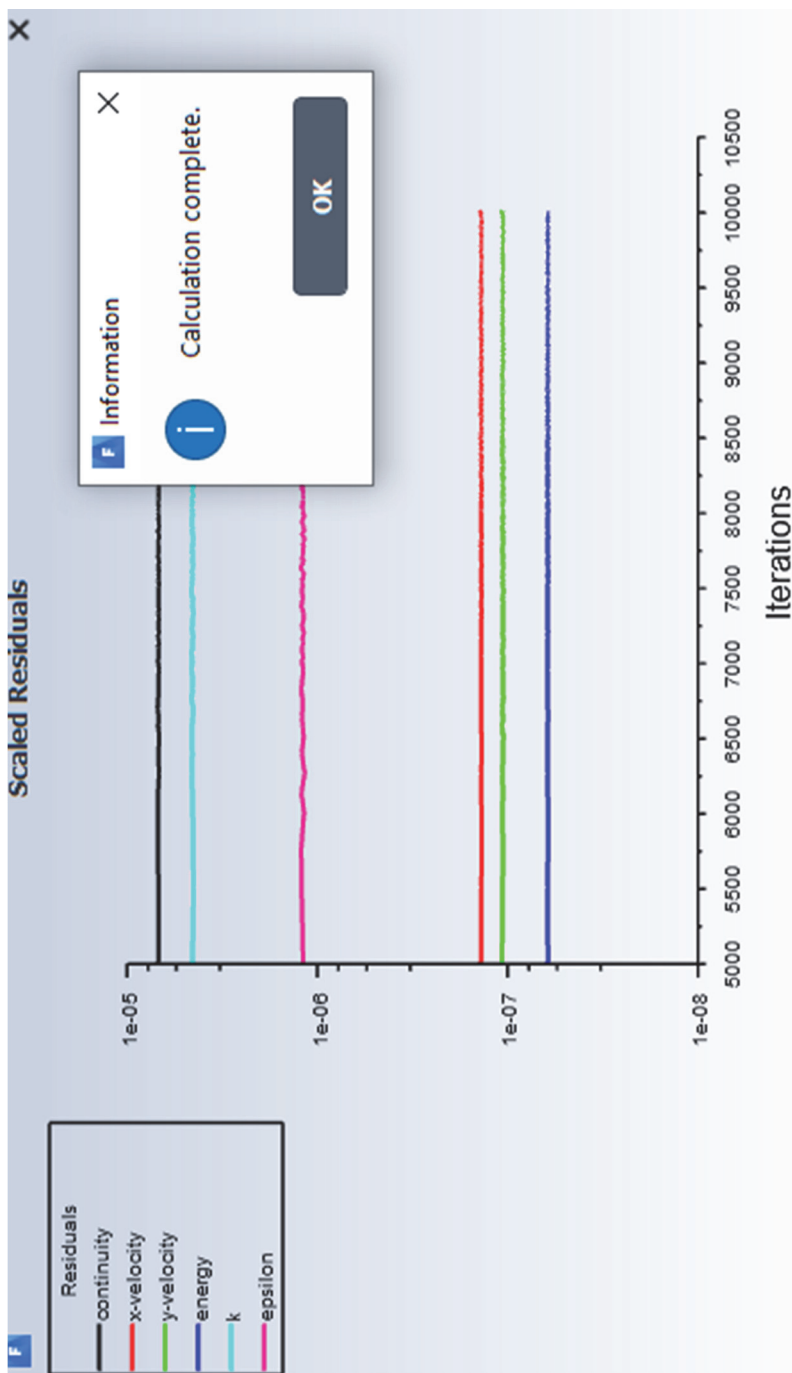


Рис. 11.42. Вкладка *Run Calculation* и окно сообщения «Расчёт завершён»

$Re=1,8 \times 10^3$



$Re=9,4 \times 10^3$

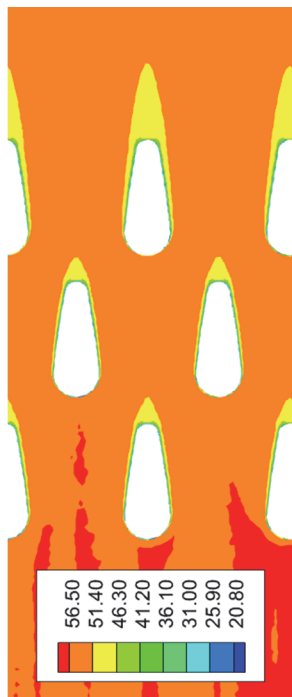
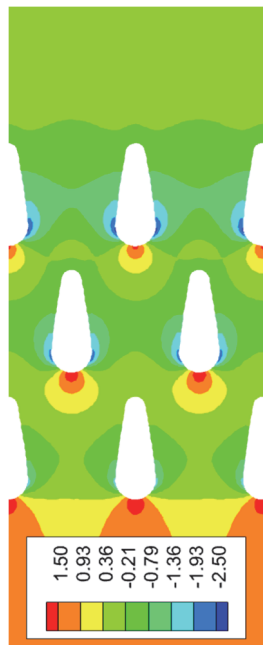


Рис. 11.43. Контуры температуры, °С

$Re=1,8 \times 10^3$



$Re=9,4 \times 10^3$

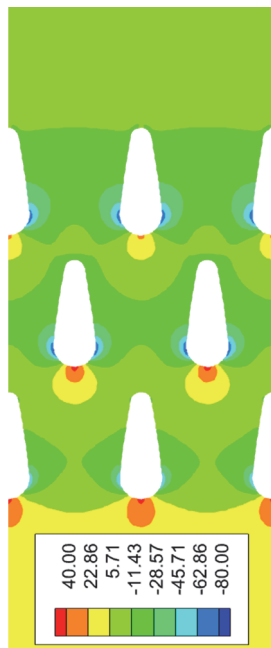
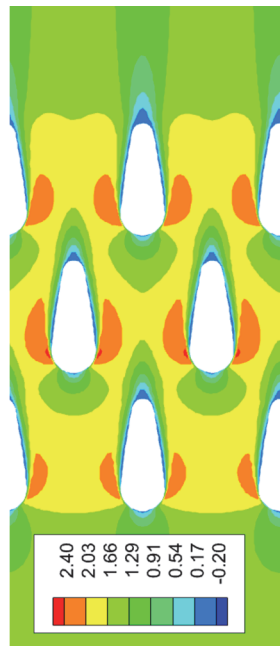


Рис. 11.44. Контуры давления, Па

$Re=1,8 \times 10^3$



$Re=9,4 \times 10^3$

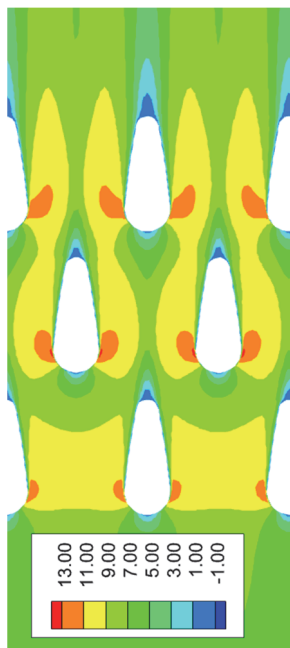
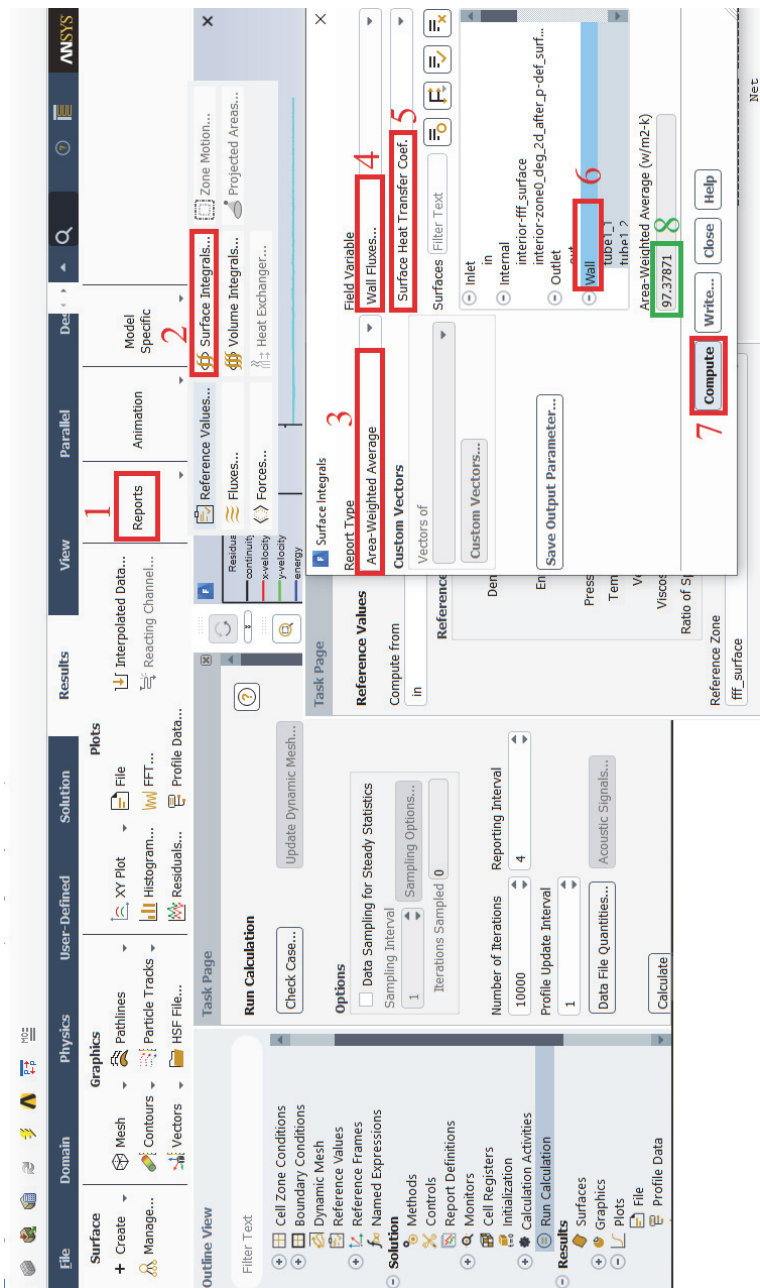


Рис. 11.45. Контуры скорости, м/с

• Чтобы найти коэффициенты теплоотдачи при наименьшем и наибольшем числе Рейнольдса (рис. 11.46):

Главное меню \rightarrow Results \rightarrow Reports \rightarrow Surface Integrals \rightarrow Report type: Area-weighted Average \rightarrow Field Variable: Wall Flux \rightarrow Surface Heat Transfer Coef. \rightarrow Wall (все поверхности труб) \rightarrow Compute

Вывод: Коэффициент теплоотдачи увеличивается с увеличением Re , что может быть связано с изменением характеристик потока (увеличением турбулентности воздуха) за рядами труб.



a)

Рис. 11.46. Коэффициенты теплообдачи при $Re=9,4 \times 10^3$ (а) и $Re=1,8 \times 10^3$ (б), Вт/(м²К)



б)

Рис. 11.46. Окончание

Контрольные вопросы и задания

1. Какие пакеты программ для CFD-моделирования вы знаете?
2. Опишите метод контрольного объема интегрирования системы дифференциальных уравнений сохранения.
3. Укажите способ построения и решения системы дискретных аналогов дифференциальных уравнений сохранения.
4. Какие виды граничных условий возможно задать при использовании пакета ANSYS Fluent?
5. Какие модели турбулентности доступны при использовании пакета моделирования Ansys?
6. Опишите процедуру поиска решения системы уравнений с помощью метода прогонки.
7. Опишите препроцессор, процессор и постпроцессор как элементы современных пакетов для численного моделирование процессов теплообмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2 т. / Д. Андерсон, Дж. Танненхилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990.
2. Базаров, И.П. Термодинамика / И.П. Базаров. – М.: Высшая школа, 1991.
3. Ван-Дайк, М. Альбом течений жидкости и газа / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1986.
4. Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкостей / М. Ван-Дайк. – М.: Мир, 1967.
5. Вукалович, М.П. Техническая термодинамика / М.П. Вукалович, И.И. Новиков. – М.: Энергия, 1968.
6. Суинни, Х. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности / Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. – М.: Мир, 1984.
7. Гребер, Г. Основы учения о теплообмене / Г. Гребер, С. Эрк, У. Григуль. – М.: Иностранная литература, 1958.
8. Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М.: Энергия, 1975.
9. Исаченко, В.П. Теплообмен при конденсации / В.П. Исаченко. – М.: Энергия, 1977.
10. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
11. Кириллин, В.А. Техническая термодинамика / В.А. Кириллин, В.В. Сычев, А.Е. Шейндлин – М.: Издательский дом МЭИ, 2008.
12. Кириллов, П.Л. Справочник по теплогидравлическим расчетам / П.Л. Кириллов, Ю.С. Юрьев, В.П. Бобков. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
13. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – М.: Атомиздат, 1979.
14. Кутателадзе, С.С. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое / С.С. Кутателадзе, А.И. Леонтьев. – М.: Энергоатомиздат, 1985.
15. Кутателадзе, С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990.

16. Кэйс, В.М. Конвективный тепло- и массообмен / В.М. Кэйс. – М.: Энергия, 1972.
17. Лабунцов, Д.А. Физические основы энергетики. Избранные труды по теплообмену, гидродинамике, термодинамике / Д.А. Лабунцов. – М.: Издательство МЭИ, 2000.
18. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986.
19. Лапин, Ю.В. Внутренние течения газовых смесей / Ю.В. Лапин, М.Х. Стрелец. – М.: Наука, 1989.
20. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970.
21. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967.
22. Михеев, М.А. Основы теплопередачи / М.А. Михеев, И.М. Михеева. – М.: Энергия, 1977.
23. Моисеев, Н.Н. Математика ставит эксперимент / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1979.
24. Пасконов, В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984.
25. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
26. Петухов, Б.С. Опытное изучение процессов теплопередачи / Б.С. Петухов – М.; Л.: ГЭИ, 1952.
27. Петухов, Б.С. / Теплообмен в ядерных энергетических установках / Б.С. Петухов, С.А. Ковалев, Л.Г. Генин. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
28. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука. 1970.
29. Практикум по теплопередаче: учеб. пособие / А.П. Солодов, Ф.Ф. Цветков, А.В. Елисеев и др.; под ред. А.П. Солодова. – М.: Энергоатомиздат, 1986.
30. Пригожин, И.Р. Современная термодинамика / И.Р. Пригожин, Д. Кондепуди. – М.: Мир. 2002.
31. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч – М.: Мир, 1980.

32. Себеси, Т. Конвективный теплообмен / Т. Себеси, П. Брэдшоу. – М.: Мир. 1987.
33. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970.
34. Солодов, А.П. Mathcad. Дифференциальные модели / А.П. Солодов, В.Ф. Очков. – М.: Издательство МЭИ, 2002.
35. Сполдинг, Д.Б. Конвективный массоперенос / Д.Б. Сполдинг. – М.: Энергия, 1965.
36. Справочник по теплообменникам: В 2 т.; пер. с англ. / под ред. Б.С. Петухова, В.К. Шикова. – М.: Энергоатомиздат. – Т.1. – 1987.
37. Теория тепломассообмена / под ред. А.Н.Леонтьева. – М.: Изд-во МГТУ, 1997.
38. Турбулентность. Принципы и применения. / под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. – М.: Мир, 1980.
39. Теплообмен при пленочной конденсации и пленочном кипении в элементах оборудования АЭС / И.И. Гогонин, И.А. Шемагин, В.М. Будов и др.; под ред. В.Е. Накорякова. – М.: Энергоатомиздат, 1993.
40. Теплоэнергетика и теплотехника: справочник. – Кн. 2. – Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент. / под ред.: А.В. Клименко, В.М. Зорина. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007.
41. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966.
42. Уоллис, Г. Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – М.: Мир, 1972.
43. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2 т. / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991.
44. Френкель, Я.И. Собрание избранных трудов. Т. III. Кинетическая теория жидкостей. / Я.И. Френкель. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1959
45. Хемминг, Р.В. Численные методы / Р.В. Хемминг. – М.: Наука, 1968.
46. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969.
47. Эккерт Э.Р. Теория тепло- и массообмена / Э.Р. Эккерт, Р.М. Дрейк. – М.: Госэнергоиздат, 1961.

48. HEDH: Heat Exchanger Design Handbook / Hewitt G.F., Executive Editor, 1998.
49. VDI-Waermeatlas, 10. bearbeitete und erweiterte Aufgabe, 2006.
50. Solodov, A. Differential models. An Introduction with Mathcad / A. Solodov, V. Ochkov. – Springer Berlin Heidelberg, New York, 2004.
51. Солодов, А.П. Тепломассообмен в энергетических установках: Инженерные методы расчета [Электронный курс] учеб. пособие / А.П. Солодов. – М.: Издательство МЭИ, 2015.
- 52 Солодов, А.П. Математические модели пленочной конденсации: учеб. пособие / А.П. Солодов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011.
53. Solodov, A.P. Computer Model of Nucleate Boiling. In: Convective Flow and Pool Boiling: Proceedings of the International Engineering Foundation 3rd Conference held at Irsee, Germany. Engineering Foundation Three Park Avenue, New York, NY 10016-5902. Editors: Markus Lehner, Franz Mayinger. 1999. PP.231–238.
54. Солодов, А.П. Дифференциальная модель пузырькового кипения / А.П. Солодов // Теплофизика высоких температур. – 2007. – Т.45. – №2. – С. 226–235.
55. Свободноконвективные течения, тепломассообмен / Б. Гебхарт, Й. Джалурия, Р. Махаджан и др. – М.: Мир, 1991.
56. Солодов, А. Электронный курс тепломассообмена: В 2 Т. / А.Солодов. – Palmarium Academic Publishing, 2014.

Учебное издание

Солодов Александр Павлович
Сиденков Дмитрий Владимирович

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Том 2

Учебник

Редактор Е.В. Политковская
Компьютерная верстка Ю.В. Макаровой

Подписано в печать	31.08.23.	Печать офсетная.	Формат 60х90 1/16
Печ. л. 38,0.	Тираж 420 экз.	Изд. № 23уК-007	Заказ

Оригинал-макет подготовлен в РИО НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14.
Отпечатано в типографии НИУ «МЭИ».
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 13.